



<https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i2p009-030>

## Simulação Interativa com GeoGebra para Sistemas Amortecidos com Excitação da Base

ELIANE PEREIRA<sup>1,2</sup>

 <https://orcid.org/0000-0002-3022-4641>

### RESUMO

*Este trabalho aborda a modelagem, análise e simulação do sistema amortecido com excitação da base, utilizando o formalismo Lagrangiano para derivar as equações de movimento. A simulação foi desenvolvida no GeoGebra e permitiu visualizar o comportamento do sistema. Os resultados indicam que, quando o fator de amortecimento  $\zeta$  é menor que 1, a ressonância ocorre conforme a frequência de excitação se aproxima da frequência natural do sistema, resultando em amplificações significativas da resposta vibratória. Para  $\zeta \geq 1$ , o comportamento ressonante é eliminado, evidenciando o papel do amortecimento na dissipação da energia e no controle da resposta dinâmica do sistema. Além da análise quantitativa, a abordagem interativa demonstrou ser uma ferramenta eficaz para a compreensão de fenômenos como ressonância e transmissibilidade de deslocamento. A simulação permitiu visualizar a transição entre os regimes transitório e permanente, destacando a influência do amortecimento na dissipação das condições iniciais.*

**Palavras-chave:** vibração; ressonância; simulação interativa.

### Interactive Simulation with GeoGebra for Damped Systems with Base Excitation

### ABSTRACT

*This work addresses the modeling, analysis, and simulation of a damped system with base excitation, using the Lagrangian formalism to derive the equations of motion. The simulation was developed in GeoGebra and allowed for the visualization of the system's behavior. The results indicate that when the damping factor  $\zeta$  is less than 1, resonance occurs as the excitation frequency approaches the natural frequency of the system, resulting in significant amplifications of the vibrational response. For  $\zeta \geq 1$ , the resonant behavior is eliminated, highlighting the role of damping in dissipating energy and controlling the dynamic response of the system. In addition to the quantitative analysis, the interactive approach proved to be an effective tool for understanding phenomena such as resonance and displacement transmissibility. The simulation allowed for the visualization of the transition between the transient and steady-state regimes, highlighting the influence of damping on the dissipation of initial conditions.*

**Keywords:** vibration; resonance; interactive simulation.

<sup>1</sup> Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA), Instituto de Engenharia do Araguaia, Santana do Araguaia, PA, Brasil

<sup>2</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Departamento de Matemática e Estatística, Medianeira, PR, Brasil E-mail: lilausp@gmail.com



## Introdução

A ocorrência de vibrações em estruturas representa um desafio significativo em diversas áreas da engenharia, como engenharias mecânica, aeroespacial e civil, podendo resultar em efeitos adversos que comprometem o desempenho e a segurança de sistemas e construções. Por exemplo, no setor de usinagem, o fenômeno de instabilidade vibratória pode surgir durante o corte de materiais, levando a imperfeições na superfície e reduzindo a qualidade do produto final (Quintana & Ciurana, 2011). Na indústria aeroespacial, motores montados nas asas de aeronaves frequentemente geram ruídos e vibrações indesejadas durante o voo, o que pode afetar o conforto dos passageiros e a integridade estrutural da aeronave (Gharib et al., 2013). Já em construções civis, edifícios expostos a cargas dinâmicas, como ventos fortes ou terremotos, podem sofrer vibrações excessivas, colocando em risco a segurança das pessoas e a estabilidade da estrutura (Soong & Spencer Jr, 2002).

Para enfrentar esses problemas, técnicas de controle de vibrações foram desenvolvidas ao longo dos anos. A ideia de isolar estruturas de vibrações indesejadas remonta ao século XIX, quando John Milne realizou um experimento pioneiro ao colocar uma casa de madeira sobre rolamentos, demonstrando que era possível reduzir os efeitos de tremores causados por terremotos (Housner et al., 1997). Esse conceito evoluiu significativamente com o tempo, especialmente após a aplicação da teoria do controle moderno à engenharia civil, conforme introduzido por Yao (1972), o que marcou o início de pesquisas aprofundadas sobre o tema. Hoje, as estratégias de controle de vibrações são amplamente utilizadas e podem ser divididas em quatro categorias principais: controle passivo (Webster & Semke, 2004; Tusset et al., 2013), controle ativo (Younespour & Ghaffarzadeh, 2015; Braghin et al., 2013), controle semiativo (Khiavi et al., 2014; Abdel-Rohman & John, 2006) e controle híbrido (Wang et al., 1999; Hiramoto & Grigoriadis, 2016). Essas abordagens envolvem o uso de dispositivos de dissipação de energia, que são essenciais para absorver e reduzir as vibrações em estruturas (Symans et al., 2008; Saaed et al., 2015).

Neste trabalho, foi analisado o sistema amortecido com excitação da base, que se caracteriza como um caso de controle passivo. Esses dispositivos são amplamente utilizados devido às suas vantagens, como alta confiabilidade, baixo custo de manutenção, simplicidade de instalação e independência de fontes externas de energia. São particularmente eficazes em contextos nos quais a complexidade e o custo devem ser minimizados. No sistema em estudo, uma massa é conectada a uma base móvel por meio de um mecanismo de mola e amortecedor. A base pode ser excitada por um movimento externo, como um deslocamento harmônico ou aleatório, que induz uma resposta na massa acoplada. A equação de movimento que descreve essa dinâmica leva em consideração não apenas as forças elásticas e de amortecimento, mas também a força inercial resultante do movimento da base.

A resposta de um sistema amortecido com excitação da base depende de vários fatores, incluindo a frequência de excitação, o nível de amortecimento e as propriedades inerentes ao sistema, como a rigidez da mola e a massa. Quando a frequência da excitação se aproxima da frequência natural do sistema, pode ocorrer o fenômeno de ressonância, caracterizado por amplificações significativas nas vibrações. O amortecimento atua, por sua vez, como um mecanismo essencial para dissipar a energia do sistema, reduzindo a amplitude das oscilações e controlando a resposta dinâmica.

Ao longo deste estudo, foram exploradas as equações diferenciais que governam o movimento do sistema, analisaram-se as soluções gerais e particulares, discutiram-se os diferentes regimes de amortecimento que influenciam a resposta. A compreensão desses conceitos é fundamental para a aplicação prática em problemas de engenharia real, onde a excitação da base é um fator crítico no design e na análise dos sistemas dinâmicos.

Neste trabalho, empregamos o formalismo Lagrangiano para modelar e analisar o comportamento do sistema massa-mola-amortecedor com excitação da base. Este formalismo fornece uma abordagem eficiente para derivar as equações de movimento do sistema, permitindo uma compreensão profunda da interação entre as forças de restauração, dissipação e excitação. Além disso, foram explorados as soluções homogêneas e particulares da equação diferencial resultante, destacando os regimes transitório e permanente que descrevem, respectivamente, os efeitos das condições iniciais do sistema e o comportamento de longo prazo, que é dominado pela excitação externa.

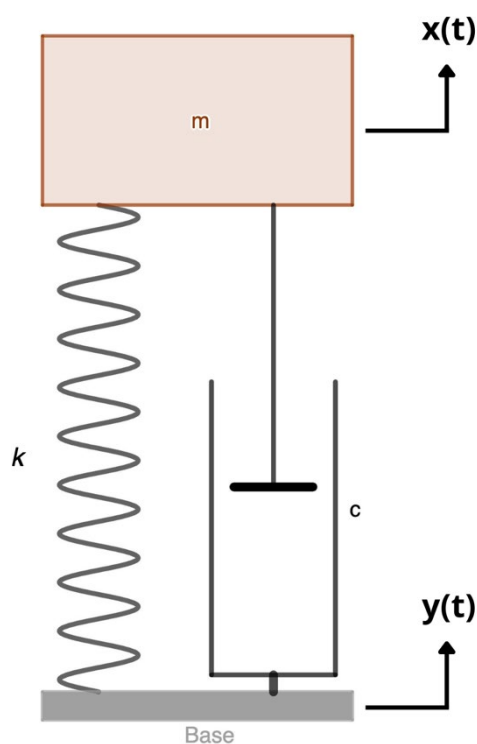
A utilização do GeoGebra no estudo de sistemas amortecidos com excitação da base oferece uma abordagem interativa e visual para a compreensão de fenômenos dinâmicos (Pereira & Sandmann, 2024). Esse software permite a modelagem do sistema, facilitando a análise das equações diferenciais que governam o seu comportamento, possibilitando a visualização gráfica das oscilações e a resposta do sistema em tempo real aos parâmetros, oferecendo insights sobre a influência das variáveis, como a frequência de excitação, o coeficiente de amortecimento e a massa. Os usuários podem observar as transições de regimes dinâmicos, como os fenômenos de ressonância e amortecimento. Outra vantagem é a capacidade de explorar a relação entre os parâmetros do sistema, como a amplitude das vibrações e sua resposta a mudanças nos valores de excitação.

A combinação de modelagem matemática, simulação interativa e análise de resultados oferece não apenas uma abordagem prática para o estudo de sistemas dinâmicos, mas também uma ferramenta educacional valiosa. Este artigo busca contribuir para a análise e o ensino de sistemas massa-mola-amortecedor com excitação da base, destacando a importância de integrar simulações computacionais ao estudo de fenômenos dinâmicos.

## 1. Modelagem do Sistema Amortecido com Excitação da Base

O sistema amortecido com excitação da base (Rao, 1995), representado na Figura 1, é composto por três elementos principais: uma massa  $m$ , uma mola com constante elástica  $k$  e um amortecedor com coeficiente de amortecimento  $c$ . A base, à qual a mola e o amortecedor estão fixados, pode ser excitada por um movimento externo, como uma vibração harmônica. O deslocamento da massa  $m$ , em relação à posição de equilíbrio, é descrito pela coordenada  $x$ . Muitos sistemas vibratórios podem ser representados por um modelo de um grau de liberdade, como o sistema considerado aqui, que é um exemplo clássico em mecânica vibratória.

Figura 1 – Sistema amortecido com excitação da base.



Fonte: Produzido pela autora no GeoGebra.

As vibrações mecânicas são fenômenos comuns em sistemas dinâmicos e podem impactar de forma significativa o desempenho e a durabilidade de componentes e estruturas, como veículos, pontes, edifícios e máquinas industriais. O sistema mostrado na Figura 1 é conhecido como o modelo de 1/8 de um veículo (Jazar & Marzbani, 2023), sendo essencial para o entendimento das vibrações em automóveis.

A energia mecânica total  $E$  de um sistema vibratório é a soma da energia cinética  $k$  e da energia potencial  $V$ . Durante as vibrações, há uma troca contínua entre essas duas formas de energia. Em sistemas ideais sem dissipação, a energia mecânica total permanece constante, mas quando há um elemento dissipativo,

como um amortecedor, essa energia diminui com o tempo, resultando na atenuação das vibrações.

No sistema amortecido com excitação da base, a energia cinética está associada ao movimento da massa  $m$ , e é expressa como:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad (1)$$

onde  $\dot{x}$  é a velocidade da massa.

A energia potencial do sistema é armazenada na mola e é diretamente proporcional ao quadrado do deslocamento relativo entre suas extremidades. Conforme ilustrado na Figura 1, esse deslocamento é dado por  $(x - y)$ . Assim, a energia potencial elástica do sistema pode ser expressa como:

$$V = \frac{1}{2}k(x - y)^2, \quad (2)$$

onde  $k$  é a constante elástica da mola.

O amortecedor desempenha um papel crucial na dissipação da energia mecânica do sistema, sendo a eficiência do amortecimento medida pela perda de energia em um ciclo vibratório. Amortecedores lineares têm sua dissipação proporcional à velocidade relativa das extremidades, expressa por  $(\dot{x} - \dot{y})$ , veja a Figura 1. O coeficiente de amortecimento constante  $c$  caracteriza a função de dissipação, dada por:

$$R = \frac{1}{2}c(\dot{x} - \dot{y})^2. \quad (3)$$

Esses elementos são essenciais para reduzir vibrações e melhorar a estabilidade e o conforto em sistemas dinâmicos.

Neste trabalho, o formalismo Lagrangiano será empregado para modelar e analisar a dinâmica do sistema. Por meio desse método, serão derivadas as equações de movimento a partir das energias cinética e potencial, bem como da força dissipativa.

A equação de movimento para um sistema de um grau de liberdade, descrito pela coordenada  $x$ , é obtida utilizando as equações de Lagrange (Lundberg, 2013):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (4)$$

onde  $L$  é a Lagrangiana do sistema, definida como  $L = T - V$ . Substituindo as expressões da energia cinética 1 e potencial 2, a Lagrangiana assume a forma:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - y)^2. \quad (5)$$

Substituindo as equações 3 e 5 na equação 4 e diferenciando, obtém-se a equação de movimento:

$$m\ddot{x} + k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = 0. \quad (6)$$

Rearranjando os termos e isolando as variáveis de entrada ( $y$ ) e de saída ( $x$ ), a equação resulta em:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky. \quad (7)$$

Os coeficientes  $m$ ,  $c$  e  $k$  são constantes. Assumindo que o movimento de excitação é harmônico do tipo senoidal, com

$$y = F_0 \sin(\omega t), \quad (8)$$

onde  $F_0$  é a amplitude da excitação e  $\omega$  a frequência angular, a excitação é introduzida na base do sistema, fazendo-o vibrar.

Substituindo a equação 8 e sua derivada primeira na equação de movimento 7, obtém-se:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = cF_0\omega \cos(\omega t) + kF_0 \sin(\omega t) \quad (9)$$

ou equivalentemente.

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 2\xi\omega_n\omega F_0 \cos(\omega t) + \omega_n^2F_0 \sin(\omega t), \quad (10)$$

onde  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é a frequência natural, e  $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$  é o fator de amortecimento.

Para simplificar, usa-se a fórmula da soma de arco para o seno:  $\sin(\omega t + \alpha) = \cos(\alpha)\sin(\omega t) + \sin(\alpha)\cos(\omega t)$  e as definições  $\cos(\alpha) = (\omega_n^2F_0)/B$  e  $\sin(\alpha) = (2\xi\omega_n\omega F_0)/B$ . Assim a equação de movimento 10 pode ser reescrita como:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = B \sin(\omega t + \alpha), \quad (11)$$

onde  $B = \sqrt{((2\xi\omega_n\omega F_0)^2 + (\omega_n^2F_0)^2)}$  e  $\alpha$  é a fase.

A solução geral  $x_g(t)$  da equação diferencial 11 é composta pela solução homogênea  $x_h(t)$  e pela solução particular  $x_p(t)$ , sendo:

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (12)$$

O termo  $x_h(t)$  leva em conta a resposta transitória e é sempre zero para grandes períodos de tempo. O segundo termo  $x_p(t)$  fornece a resposta em estado estacionário do sistema.

Em vibrações mecânicas, a equação homogênea é chamada de vibração livre e sua solução é denominada resposta de vibração livre. A equação não homogênea é chamada de vibração forçada e sua solução é denominada resposta de vibração forçada.

A equação diferencial homogênea associada ao sistema é dada por:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0. \quad (13)$$

A equação característica correspondente a essa equação é obtida assumindo uma solução do tipo  $x(t) = e^{rt}$ , o que resulta na seguinte equação característica:  $r^2 + 2\xi\omega_nr + \omega_n^2 = 0$ . Essa é uma equação quadrática em  $r$ , cujas raízes podem ser determinadas por:

$$r_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (14)$$

Assim, a solução da equação homogênea é dada por:

$$x_h(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}, \quad (15)$$

onde as constantes  $C_1$  e  $C_2$  dependem das condições iniciais e  $r_1$  e  $r_2$  são as raízes da equação característica e são chamadas de autovalores do sistema. O valor do coeficiente de amortecimento determina o tipo de resposta temporal do sistema. Conforme o valor do amortecimento, as soluções podem ser classificadas em três categorias principais: subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido.

O sistema é considerado subamortecido quando  $\xi < 1$ . Nesse tipo de sistema, os autovalores  $r_{1,2}$  são números complexos conjugados e consequentemente, a solução 15 assume a forma:

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega_nt}(C_1e^{i\omega_ht} + C_2e^{-i\omega_ht}), \quad (16)$$

onde  $\omega_h = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$  é denominada frequência natural amortecida.

Ao empregar a identidade de Euler,  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ , a solução 16 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega_nt}(D_1\cos(\omega_ht) + D_2\sin(\omega_ht)), \quad (17)$$

onde  $D_1 = C_1 + C_2$  e  $D_2 = i(C_1 - C_2)$ . Como o deslocamento  $x_h(t)$  é uma quantidade física real, os coeficientes  $D_1$  e  $D_2$ , na equação 17, devem ser reais, o que exige que  $C_1$  e  $C_2$  sejam complexos conjugados.

Os valores das duas constantes  $D_1$  e  $D_2$  podem ser determinados pelas condições iniciais do sistema. Se as condições forem:

$$x_h(0) = x_0 \text{ e } \dot{x}_h(0) = v_0, \quad (18)$$

então

$$D_1 = x_0 \text{ e } D_2 = \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_h}. \quad (19)$$

O sistema é classificado como criticamente amortecido quando  $\xi = 1$ . Nessa condição, os autovalores  $r_1$  e  $r_2$  coincidem, o que resulta em  $r = r_{1,2} = -\omega_n$ .

Quando os autovalores são idênticos, a solução para o deslocamento é dada por:

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}(C_1 + C_2 t). \quad (20)$$

A partir das condições iniciais 18, os coeficientes  $C_1$  e  $C_2$  podem ser determinados da seguinte forma:

$$C_1 = x_0 \text{ e } C_2 = v_0 + \xi\omega_n x_0. \quad (21)$$

O sistema é considerado superamortecido quando  $\xi > 1$ . Nessa configuração, os autovalores  $r_1$  e  $r_2$  são dois números reais, dados pela equação 14. Dessa forma, a solução para o deslocamento  $x_h(t)$  é dada por:

$$x_h(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}. \quad (22)$$

Utilizando as condições iniciais 18, os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  podem ser determinados da seguinte maneira:

$$A_1 = \frac{v_0 - r_2 x_0}{r_1 - r_2} \text{ e } A_2 = \frac{r_1 x_0 - v_0}{r_1 - r_2}. \quad (23)$$

A equação do movimento 11 sugere que a solução particular  $x_p(t)$  tenha a forma:

$$x_p(t) = A \sin(\omega t - \varphi), \quad (24)$$

onde a amplitude  $A$  e fase  $\varphi$  são desconhecidas. Aplicando a identidade trigonométrica  $\sin(\omega t - \varphi) = \cos(\varphi)\sin(\omega t) - \sin(\varphi)\cos(\omega t)$ , pode-se reescrever a solução  $x_p(t)$  como:

$$x_p(t) = E_1 \sin(\omega t) + E_2 \cos(\omega t), \quad (25)$$

onde:

$$E_1 = A \cos(\varphi) \text{ e } E_2 = -A \sin(\varphi). \quad (26)$$

A próxima etapa consiste em substituir essa forma da solução  $x_p(t)$  e suas derivadas na equação do movimento 11 para determinar  $A$  e  $\varphi$ . A equação do movimento pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} -\omega^2[E_1 \sin(\omega t) + E_2 \cos(\omega t)] + 2\xi\omega_n\omega[E_1 \cos(\omega t) - E_2 \sin(\omega t)] + \\ + \omega_n^2[E_1 \sin(\omega t) + E_2 \cos(\omega t)] = 2\xi\omega_n\omega F_0 \cos(\omega t) + \omega_n^2 F_0 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (27)$$

Em seguida, aplica-se a propriedade distributiva à equação 27, obtendo-se:

$$\begin{aligned} -\omega^2 E_1 \sin(\omega t) - \omega^2 E_2 \cos(\omega t) + 2\xi\omega_n\omega E_1 \cos(\omega t) - 2\xi\omega_n\omega E_2 \sin(\omega t) + \\ + \omega_n^2 E_1 \sin(\omega t) + \omega_n^2 E_2 \cos(\omega t) = 2\xi\omega_n\omega F_0 \cos(\omega t) + \omega_n^2 F_0 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (28)$$



Agora, no lado esquerdo da expressão 28, as funções  $\text{sen}(\omega t)$  e  $\text{cos}(\omega t)$  são colocados em evidência, resultando em

$$[-\omega^2 E_1 - 2\xi\omega_n\omega E_2 + \omega_n^2 E_1]\text{sen}(\omega t) + [-\omega^2 E_2 + 2\xi\omega_n\omega E_1 + \omega_n^2 E_2]\text{cos}(\omega t) = 2\xi\omega_n\omega F_0\text{cos}(\omega t) + \omega_n^2 F_0\text{sen}(\omega t). \quad (29)$$

Por fim, colocando em evidência  $E_1$  e  $E_2$ , encontra-se:

$$[(\omega_n^2 - \omega^2)E_1 - 2\xi\omega_n\omega E_2]\text{sen}(\omega t) + [(\omega_n^2 - \omega^2)E_2 + 2\xi\omega_n\omega E_1]\text{cos}(\omega t) = 2\xi\omega_n\omega F_0\text{cos}(\omega t) + \omega_n^2 F_0\text{sen}(\omega t). \quad (30)$$

Como os coeficiente de  $\text{sen}(\omega t)$  e  $\text{cos}(\omega t)$  da equação (30) devem ser iguais em ambos os lados da equação. Isso fornece um sistema de equações:

$$(\omega_n^2 - \omega^2)E_1 - 2\xi\omega_n\omega E_2 = \omega_n^2 F_0, \quad (31)$$

$$(\omega_n^2 - \omega^2)E_2 + 2\xi\omega_n\omega E_1 = 2\xi\omega_n\omega F_0.$$

Essas duas equações permitem calcular  $E_1$  e  $E_2$ . Reescrevendo-as em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \omega_n^2 - \omega^2 & -2\xi\omega_n\omega \\ 2\xi\omega_n\omega & \omega_n^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_n^2 F_0 \\ 2\xi\omega_n\omega F_0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Para determinar  $E_1$  e  $E_2$  é necessário inverter a matriz e resolver o sistema:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_n^2 - \omega^2 & -2\xi\omega_n\omega \\ 2\xi\omega_n\omega & \omega_n^2 - \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \omega_n^2 F_0 \\ 2\xi\omega_n\omega F_0 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Após realizar a inversão da matriz, encontra-se:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{F_0}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2} \begin{bmatrix} \omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2) + (2\xi\omega_n\omega)^2 \\ 2\xi\omega_n\omega(\omega_n^2 - \omega^2) - 2\xi\omega_n^3\omega \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Com os valores de  $E_1$  e  $E_2$  determinados, é possível calcular a amplitude  $A$  e a fase  $\varphi$ , por meio da equação 26. A amplitude  $A$  é dada por:

$$A = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}, \quad (35)$$

e a fase  $\varphi$  pode ser obtida pela relação:

$$\text{tg}(\varphi) = -\frac{E_2}{E_1}. \quad (36)$$

Assim, a fase  $\varphi$  é calculada como:

$$\varphi = \text{tg}^{-1}\left(-\frac{E_2}{E_1}\right). \quad (37)$$

A amplitude  $A$  é obtida por meio da equação 35, substituindo  $E_1$  e  $E_2$  de 34. Depois de algumas operações algébricas, obtém-se:

$$A(r) = \sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \cdot F_0, \quad (38)$$

onde introduz-se a razão de frequência  $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ .

Substituindo  $E_1$  e  $E_2$  na equação 37, encontra-se:

$$\varphi(r) = tg^{-1} \left( \frac{2\xi r^3}{1-r^2+(2\xi r)^2} \right). \quad (39)$$

Aqui, a fase  $\varphi$  representa o atraso angular da resposta 24 em relação à excitação externa 8.

A razão entre a amplitude da resposta  $x_p(t)$  e a amplitude do movimento da base  $y(t)$ , denotada por  $T = A/F_0$ , é chamada de transmissibilidade de deslocamento, a qual é obtida a partir da equação 38:

$$T(r) = \sqrt{\frac{1+(2\xi r)^2}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}. \quad (40)$$

## 2. Desenvolvimento e Implementação de um Applet no GeoGebra

O GeoGebra, um software multifuncional (Cordelina & Pavanelo, 2024; Santos & Pansonato, 2024; Alves, 2024; Pereira, 2021), foi utilizado para desenvolver um applet interativo que possibilita a modelagem visual e dinâmica do sistema. Essa ferramenta não apenas facilita o entendimento das respostas dinâmicas, mas também possibilita a análise de fenômenos como ressonância, transmissibilidade de deslocamento e a influência de diferentes regimes de amortecimento. O applet inclui controles ajustáveis para os parâmetros do sistema, como a constante elástica da mola, a massa e o coeficiente de amortecimento, permitindo aos usuários explorar diferentes configurações e suas consequências dinâmicas. O objetivo é não apenas compreender as respostas vibratórias, mas também oferecer insights práticos para o projeto de sistemas mais eficientes e resilientes, capazes de operar de maneira segura e estável mesmo em condições adversas.

A seguir, apresenta-se um detalhamento do processo de construção do applet disponível no link <https://www.geogebra.org/classic/ebmsnyq> (Pereira, 2025), desenvolvido no software GeoGebra. O processo teve início com a ferramenta Controle Deslizante, que foi empregada para a definição das variáveis: constante elástica  $k$ , massa  $m$  e coeficiente de amortecimento  $c$ . Essas variáveis podem ser ajustadas diretamente no applet, permitindo que os usuários analisem o comportamento do sistema e identifiquem as condições necessárias para evitar a ocorrência de ressonância.

A frequência de excitação da base  $\omega$ , a amplitude da base  $F_0$  e a frequência natural do sistema  $\omega_n$  foram estabelecidas com valores fixos de 1 Hz, 1 e pela fórmula  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ , respectivamente. Para configurar esses parâmetros, inseriu-

se  $F_0=1$ , em seguida,  $\omega=1$  e posteriormente  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  na Janela de Álgebra. Logo após, foi definida a função de excitação da base por meio do comando:  $Y(t) = \text{Se}(t \geq 0, F_0 \text{sen}(\omega t))$ . Essa função foi construída de forma a restringir o domínio ao tempo positivo.

O próximo passo é criar, no applet, a função que representa a solução homogênea do sistema. Para isso, foram definidas as condições iniciais de posição  $x_0$  e de velocidade  $v_0$ , fixadas nos valores de 0,9 m e 0,1 m/s, respectivamente. No applet, esses parâmetros foram configurados inserindo-se os comandos  $x_0 = 0,9$  e  $v_0 = 0,1$  na Janela de Álgebra. Foi considerado o regime subamortecido, caracterizado por  $\xi < 1$ , cuja solução é obtida pela equação  $x_1(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left( D_1 \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) + D_2 \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) \right)$ , também inserida na Janela de Álgebra, juntamente com as constantes  $D_1$  e  $D_2$ , calculadas a partir das equações 19.

No caso de amortecimento crítico, em que  $\xi = 1$ , a solução é descrita pela equação 20, previamente registrada na Janela de Álgebra e nomeada como  $x_2(t)$ , a fim de distingui-la das demais soluções homogêneas. Os coeficientes  $C_1$  e  $C_2$ , determinados a partir da equação 21, foram também inseridos na Janela de Álgebra.

No regime de superamortecimento, caracterizado por  $\xi > 1$ , a solução é expressa pela equação 22, que foi inserida na Janela de Álgebra e identificada como  $x_3(t)$ . Os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$ , definidos pela equação 23, foram igualmente inseridos na Janela de Álgebra.

Finalmente, insere-se o comando  $x_h(t) = \text{Se}(\xi < 1, x_1(t), \text{Se}(\xi > 1, x_3(t), \text{Se}(\xi = 1, x_2(t))))$  na Janela de Álgebra, o qual determina a solução homogênea da equação diferencial que descreve o sistema amortecido com excitação da base. Esse comando seleciona automaticamente a solução apropriada com base no valor do fator de amortecimento  $\xi$ .

Para a solução particular, foram utilizados o fator de amortecimento  $\xi$ , a razão de frequência  $r$ , a fase  $\phi(r)$  e a amplitude dinâmica  $A(r)$ , previamente definidas no applet por meio das definições  $r = \omega/\omega_n$  e  $\xi = c/2\sqrt{km}$  e das funções 39 e 38 inseridas na Janela de Álgebra. Posteriormente, foi adicionada a expressão da solução particular  $x_p(t) = A(r) \text{sen}(\omega t - \phi(r))$ , obtida na seção anterior.

A solução geral do sistema é determinada pela combinação da solução homogênea com a solução particular. Dessa forma, na Janela de Álgebra, foi inserido o comando  $x_G(t) = \text{Se}(t \geq 0, x_h(t) + x_p(t))$ .

Para a análise dos dados, conforme será detalhado na próxima seção deste trabalho, é necessário obter os gráficos da solução geral e da função de excitação

da base, ambos representados em função do tempo, bem como o gráfico da transmissibilidade de deslocamento  $T$  em função da razão de frequência  $r$ . Esse gráfico é construído a partir da amplitude  $A$ , utilizando o comando  $T(r) = \text{Se}(r \geq 0, ((A(r))/(F_0)))$ , inserido na Janela de Álgebra. Para facilitar a visualização, foi utilizada a ferramenta Caixa para Exibir/Esconder, que permite ao usuário alternar entre exibir e ocultar os gráficos da solução geral e da função de excitação da base separadamente do gráfico da transmissibilidade de deslocamento na Janela de Visualização.

A animação do modelo foi desenvolvida na Janela de Visualização 2. O processo teve início com a construção da base, que foi modelada com referência à função de excitação da base representada pela equação 8. Para isso, foram definidos quatro pontos, considerando que a base desloca-se apenas na direção vertical. Assim, a coordenada  $y$  foi determinada pela função de excitação no instante correspondente ao valor da variável  $t$ , enquanto as coordenadas  $x$  foram escolhidas para definir o comprimento do retângulo que forma a base. Os pontos foram definidos como:  $P=(0,Y(t))$ ,  $Q=(5.5,Y(t))$ ,  $D=(0,0.5+Y(t))$  e  $E=(5.5,0.5+Y(t))$ , sendo inseridos na Janela de Álgebra. Observa-se que a constante 0.5 foi adicionada às coordenadas  $y$  dos pontos  $D$  e  $E$ , visando definir a altura do retângulo que representa a base. Para delinear a forma retangular da base, foi empregada a ferramenta Polígono, que conecta os pontos mencionados.

O objetivo agora é criar a representação da massa  $m$  na animação. O procedimento empregado é semelhante ao adotado na construção da base, com a diferença de que, neste caso, a solução geral  $x_G(t)$  será utilizada como referência para as coordenadas  $y$  dos quatro pontos que definem o retângulo. Os pontos são definidos como:  $G=(0,8.5+x_G(t))$ ,  $B=(5.5,8.5+x_G(t))$ ,  $C=(0,11.5+x_G(t))$  e  $F=(5.5,11.5+x_G(t))$ . Observa-se que as coordenadas  $y$  dos pontos  $G$  e  $B$  foram adicionadas à constante 8.5, visando posicionar a massa acima da base, conforme ilustrado na Figura 1. Para os pontos  $C$  e  $F$ , foi somada a constante 11.5, com o duplo propósito de garantir um espaçamento adequado entre a base e a massa e de definir a altura do retângulo que representa a massa, fixada em 3. As coordenadas  $x$  dos pontos  $G$ ,  $B$ ,  $C$  e  $F$  mantêm-se idênticas às utilizadas na construção da base. Essa correspondência pode ser verificada ao comparar os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $D$  e  $E$  com os pontos correspondentes da massa, assegurando o mesmo comprimento para ambas as representações. Por fim, o retângulo que representa a massa foi construído utilizando a ferramenta Polígono, conectando os pontos  $G$ ,  $B$ ,  $C$  e  $F$ .

A representação da mola na animação foi construída utilizando a função Curva, que cria curvas paramétricas. Essa função possui cinco argumentos: o primeiro e o segundo correspondem às expressões que definem as coordenadas  $x$  e  $y$  da curva em função de um parâmetro, respectivamente; o terceiro é a variável

independente que parametriza a curva; o quarto é o valor inicial da variável; e o quinto, o valor final.

O seguinte comando foi inserido na Janela de Álgebra com o objetivo de definir a mola:

$f = \text{Curva}(0.7\sin(20\pi((p - \text{inicio}) / (\text{delta}))) + x(G + 1), p, p, \text{inicio}, \text{final}),$

onde:

- $\text{inicio} = 0.5 + Y(t)$ : representa a posição inicial da mola,
- $\text{final} = 8.5 + x_G(t)$ : representa a posição final da mola, e
- $\text{delta} = \text{final} - \text{inicio}$ : corresponde ao intervalo entre as variáveis inicio e final.

Essa construção permite que a mola seja representada de forma dinâmica, ajustando-se às condições estabelecidas pela função de excitação e pela solução geral.

A construção do amortecedor foi dividida em duas partes: a primeira está associada à massa  $m$  por meio da solução geral, e a segunda está vinculada à base por meio da função de excitação. Observe a ilustração da Figura 1 ou no applet (Pereira, 2025). Na primeira parte, foram utilizados dois segmentos de reta. O primeiro é definido pelos pontos  $P1 = (4.1, 8.5 + x_G(t))$  e  $P2 = (4.1, 3.5 + x_G(t))$ . O segundo segmento é definido pelos pontos  $H = (3.4, 3.5 + x_G(t))$  e  $I = (4.8, 3.5 + x_G(t))$ . Para conectar esses pontos, utilizou-se a ferramenta Segmento.

A segunda parte foi construída com quatro segmentos de reta, por meio da ferramenta Segmento, que foram definidos pelos seguintes pares de pontos:

- $L = (3, 0.8 + Y(t))$  e  $N = (3, 6 + Y(t))$ ;
- $L = (3, 0.8 + Y(t))$  e  $M = (5.2, 0.8 + Y(t))$ ;
- $O = (5.2, 6 + Y(t))$  e  $M = (5.2, 0.8 + Y(t))$ ;
- $K = (4.1, 0.8 + Y(t))$  e  $J = (4.1, 0.5 + Y(t))$ .

Essa abordagem permite representar o amortecedor de forma precisa e dinâmica, conectando a massa à base conforme as condições da solução geral e da função de excitação.

Os controles deslizantes da constante elástica da mola  $k$ , da massa  $m$  e do coeficiente de amortecimento  $c$  são exibidos na Janela de Visualização 2, permitindo ao usuário analisar o comportamento do sistema ao variar esses parâmetros.

Para controlar a animação, foram criados três botões utilizando a ferramenta Botão: um para iniciar a animação, outro para pausá-la e um terceiro para retornar ao instante inicial. Após a criação dos botões, na aba Estilo, foram selecionadas as figuras apropriadas para representar cada uma das funções

associadas aos botões. Na aba Programação, foram atribuídos os seguintes comandos aos botões: ao de iniciar a animação, o comando `IniciarAnimacao[t]`; ao de pausa, o comando `IniciarAnimacao[t, false]`; e ao de retorno ao instante inicial, o comando `t = 0`.

Adicionalmente, para oferecer ao usuário uma visualização clara e imediata dos valores do fator de amortecimento  $\xi$  e da razão de frequência  $r$ , a ferramenta ABCTexto foi utilizada. Na aba Avançado, foram selecionadas as variáveis correspondentes para exibição direta na interface do applet.

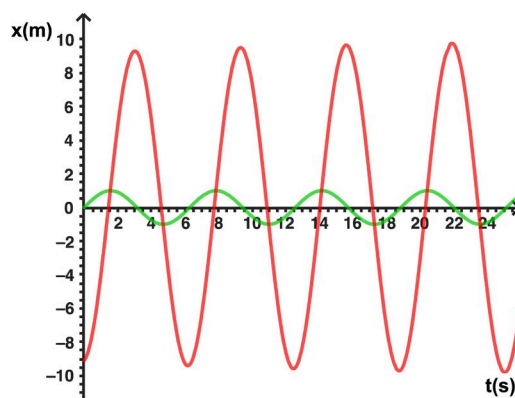
### 3. Análise da Dinâmica do Sistema

O comportamento de um sistema amortecido, quando sujeito a vibrações na base, é influenciado por uma série de elementos-chave. Entre eles, destacam-se a frequência do estímulo externo, o grau de amortecimento presente e as características próprias do sistema, como a massa envolvida e a rigidez da mola. Nesta seção, estudou-se como esses fatores atuam em conjunto para definir como o sistema responde às perturbações impostas.

O estudo inicia-se com o caso em que  $\xi < 1$ . Nesse regime, quando a frequência natural  $\omega_n$  do sistema coincide com a frequência de excitação  $\omega$ , ocorre ressonância, resultando na máxima amplitude da resposta, o que pode gerar vibrações excessivas, dependendo do nível de amortecimento. No applet, a frequência de excitação  $\omega$  foi fixada em 1 Hz. Portanto, o sistema pode entrar em ressonância quando a massa  $m$  e a constante elástica  $k$  da mola forem iguais, implicando que a frequência natural  $\omega_n$  será igual a 1 Hz. Por exemplo, com uma massa  $m$  igual a 5 kg e a constante elástica  $k$  da mola sendo igual a 5 N/m, se o coeficiente de amortecimento  $c$  for menor que 2 N.s/m, o sistema não consegue dissipar a energia das oscilações de maneira eficiente, resultando em amplitudes elevadas por um período prolongado e, conseqüentemente, na ocorrência de ressonância. Esse fenômeno pode gerar tensões excessivas nos componentes, acarretando danos estruturais, desgaste prematuro, falhas mecânicas e, em situações extremas, até rupturas de peças críticas.

Se o coeficiente de amortecimento  $c$  é 0,5 N.s/m, conforme mostrado na animação do applet (Pereira, 2025), o sistema entra em colapso. O fator de amortecimento  $\xi$  torna-se igual a 0,05. Na Figura 2, observa-se a solução geral do sistema, que representa o deslocamento da massa  $m$  e a função de excitação aplicada à base. Nota-se que a amplitude da oscilação da massa aumenta significativamente em comparação com a amplitude de oscilação da base, evidenciando o comportamento ressonante e a insuficiência do amortecimento para controlar as vibrações.

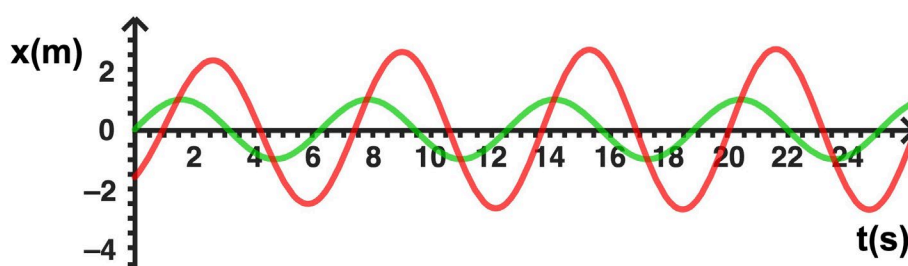
Figura 2 – A curva vermelha representa a solução geral do sistema, considerando os seguintes parâmetros: massa de 5 kg, constante elástica da mola de 5 N/m e coeficiente de amortecimento de 0,5 N·s/m. Em contrapartida, a curva verde corresponde à função que define a excitação aplicada à base.



Fonte: Produzido pela autora no GeoGebra.

Quando o coeficiente de amortecimento  $c$  é 2 N·s/m, o fator de amortecimento  $\xi$  resulta em 0,2, um valor geralmente adequado para suavizar as oscilações em muitos sistemas, embora sua eficácia dependa das características específicas de cada sistema. No caso estudado neste artigo, observa-se no applet que esse valor de amortecimento representa o limite crítico entre a ocorrência ou não de ressonância. Ao comparar as Figuras 2 e 3, percebe-se que a amplitude das oscilações da base diminuiu, evidenciando o efeito do amortecimento ao diminuir as oscilações e controlar a resposta vibratória do sistema.

Figura 3 – A função que descreve a excitação da base e a solução geral do sistema são, respectivamente, representadas pelas curvas verde e vermelha. Os parâmetros adotados são: constante elástica da mola igual a 5 N/m, massa igual a 5 kg e coeficiente de amortecimento igual a 2 N·s/m.

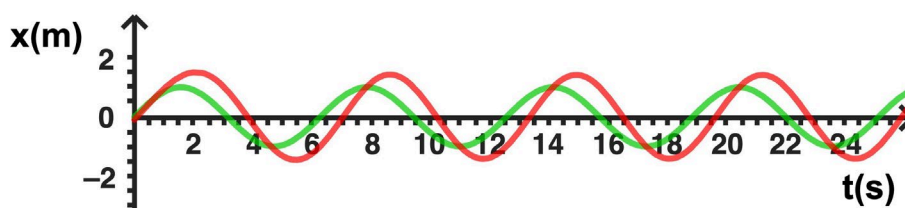


Fonte: Produzido pela autora no GeoGebra.

Sempre que o valor do coeficiente de amortecimento  $c$  é superior a 2 N·s/m, como por exemplo, se  $c$  for igual a 5 N·s/m, a ressonância não ocorre. Essa situação é observada no applet e no gráfico 4, onde a solução geral do sistema se aproxima da função de excitação da base. Com base nesses três exemplos, conclui-se que um amortecimento inadequado pode comprometer seriamente a segurança e a durabilidade do sistema.



Figura 4 – A curva vermelha representa a solução geral do sistema, composto de uma massa de 5 kg e uma constante elástica de 5 N/m, enquanto a curva verde representa a função de excitação da base.



Fonte: Produzido pela autora no GeoGebra.

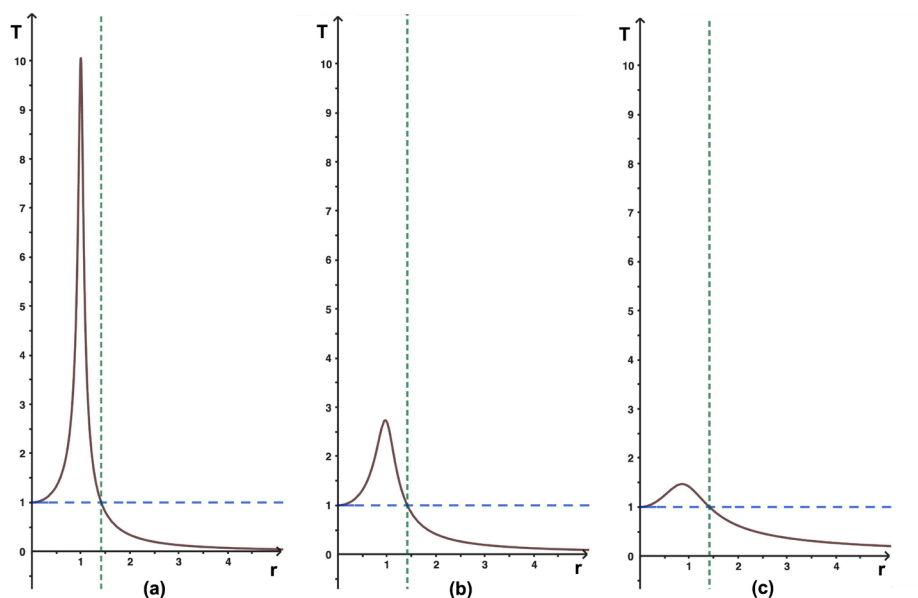
A ocorrência de ressonância também pode ser verificada por meio do gráfico de transmissibilidade de deslocamento  $T$ . Nos gráficos apresentados na Figura 5, observa-se que a transmissibilidade diminui à medida que o coeficiente de amortecimento  $c$  aumenta.

Em todos os casos, o gráfico da transmissibilidade de deslocamento  $T$  em função da razão de frequência  $r$  apresenta os seguintes comportamentos: quando  $T = 1$ , isso indica que a amplitude estática  $F_0$  é igual à amplitude dinâmica  $A$ . Essa condição ocorre para  $r = 0$  ou  $r = \sqrt{2}$ , valores que correspondem às soluções da equação 37 em  $T=1$ . Além disso, quando  $r$  tende ao infinito, a transmissibilidade  $T$  tende a zero. No entanto,  $T$  atinge valores altos quando  $r \rightarrow 1$  e  $\xi \rightarrow 0$ . Teoricamente,  $T$  tende ao infinito quando  $\xi=0$  e  $r=1$ . Domínios de frequência em torno da frequência natural são chamados de zonas de ressonância. Conforme ilustrado nos gráficos da Figura 5, a amplitude da vibração na zona de ressonância pode ser reduzida com a introdução de amortecimento.

As condições necessárias para a ocorrência de ressonância incluem que a razão de frequência  $r$  seja igual a 1 e o fator de amortecimento  $\xi$  seja suficientemente pequeno. Se  $\xi$  assume valor igual ou superior a 1, a ressonância não ocorre. Por exemplo, se o coeficiente de amortecimento  $c$  for 5 N.s/m, a constante elástica  $k$  for 2,5 N/m e a massa  $m$  for 2,5 kg, o sistema não entrará em ressonância, mesmo que a razão de frequência  $r$  seja igual a 1. Conforme mostrado no gráfico da Figura 6, as amplitudes da solução geral e da função de excitação da base são próximas, resultando em uma transmissibilidade reduzida, conforme ilustrado na Figura 7. Esse comportamento é também visível na animação do applet, onde o sistema oscila de forma suave.

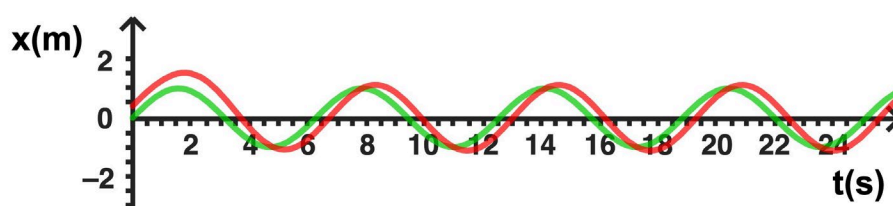


Figura 5 – Transmissibilidade de deslocamento em função da razão de frequência  $r$  para um sistema com massa de 5 kg, constante elástica de 5 N/m e coeficiente de amortecimento de (a) 0,5 N·s/m, (b) 2 N·s/m e (c) 5 N·s/m.



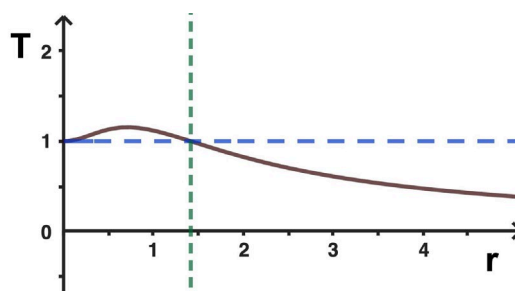
Fonte: Produzido pela autora no GeoGebra.

Figura 6 – A função de excitação da base e a solução geral do sistema são representadas, respectivamente, pelas curvas em verde e vermelha.



Fonte: Produzido pela autora no GeoGebra.

Figura 7 - Transmissibilidade de deslocamento em função da razão  $r$ .

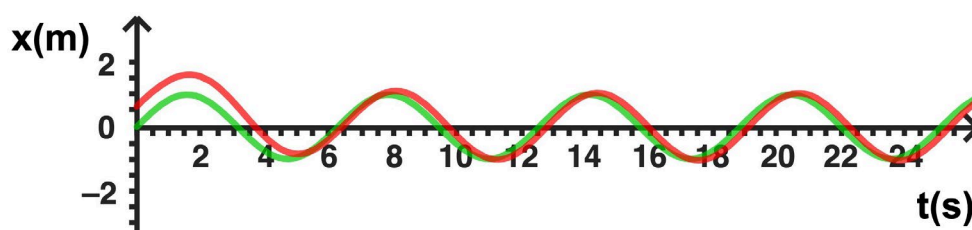


Fonte: Produzido pela autora no GeoGebra.

Caso o fator de amortecimento  $\xi$  for igual a 1 e a razão de frequência  $r$  seja menor ou maior que 1, a transmissibilidade de deslocamento permanece baixa, exibindo um comportamento semelhante ao exemplo previamente discutido. Devido à grande semelhança, será deixado ao leitor interessado a verificação no applet.

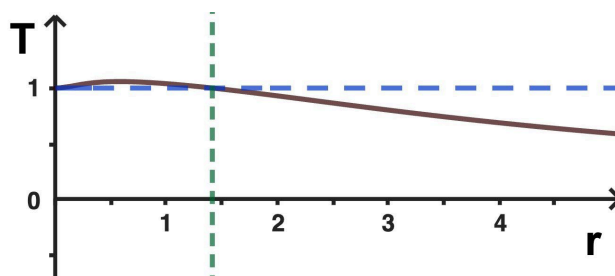
Para o último caso, em que o fator de amortecimento  $\xi$  é maior que 1, essa configuração representa a situação em que a transmissibilidade de deslocamento atinge o menor valor dentre todas as situações discutidas anteriormente. Como o comportamento, neste caso é muito semelhante aos demais, será apresentado apenas um exemplo ilustrativo. Considere a constante elástica  $k$  igual a 1,5 N/m, a massa  $m$  igual a 1,33 kg e o coeficiente de amortecimento  $c$  igual a 5 N.s/m; para esses parâmetros, a razão  $r$  e o fator de amortecimento  $\xi$  assumem os valores 0,9416 e 1,77, respectivamente. O gráfico da Figura 8 mostra que as amplitudes da solução geral praticamente coincidem com as da função de excitação da base, enquanto a Figura 9 evidencia que a transmissibilidade de deslocamento é a menor dentre todos os exemplos apresentados.

Figura 8 – A solução geral do sistema é indicada pela curva em vermelha, enquanto a função de excitação da base é representada pela curva em verde.



Fonte: Produzido pela autora no GeoGebra.

Figura 9 – Transmissibilidade de deslocamento em função da razão  $r$ .

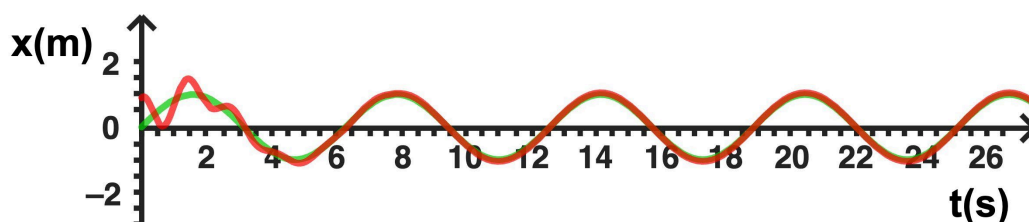


Fonte: Produzido pela autora no GeoGebra.

No sistema amortecido com excitação da base, existem dois regimes distintos: o transitório e o permanente. O regime transitório é influenciado pelas condições iniciais, como o deslocamento inicial  $x_0$  e a velocidade inicial  $v_0$ , enquanto o regime permanente descreve o comportamento do sistema após a dissipação dos efeitos iniciais, momento em que a resposta se estabiliza e passa a apresentar um comportamento previsível. Quanto maior for o amortecimento do sistema, mais breve será o período de transição associado ao regime transitório. Ao comparar as Figuras 10 e 11, observa-se que, com o aumento do coeficiente de amortecimento  $c$ , os efeitos das condições iniciais dissipam-se mais rapidamente, resultando em uma resposta permanente estável que depende unicamente da excitação da base.

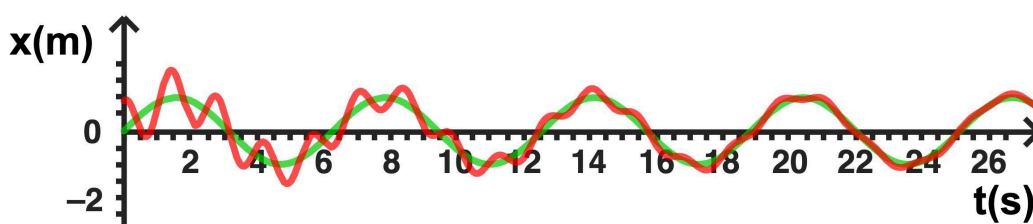
Nos exemplos analisados anteriormente, observa-se que, em determinadas configurações do sistema, o regime transitório pode não existir, como nos casos em que o coeficiente de amortecimento  $\xi$  é menor que 1, ou o regime transitório é pequeno, como observado nos casos em que  $\xi$  é igual ou maior que 1.

Figura 10 – A função de excitação da base é ilustrada pela curva verde, enquanto a curva vermelha representa a solução geral do sistema, caracterizado por uma constante elástica de 100 N/m, uma massa de 5 kg e uma constante de amortecimento de 5 N·s/m.



Fonte: Produzido pela autora no GeoGebra.

Figura 11 – A solução geral do sistema, com massa de 5 kg, constante elástica de 100 N/m e coeficiente de amortecimento de 1 N·s/m, é representada pela curva vermelha, enquanto a função de excitação da base é ilustrada pela curva verde.



Fonte: Produzido pela autora no GeoGebra.

## 4. Conclusão

Neste trabalho, foram realizadas a modelagem, a análise e a simulação do sistema amortecido com excitação da base, utilizando o formalismo Lagrangiano para a obtenção das equações de movimento. Por meio da implementação de um applet interativo no GeoGebra, foi possível visualizar a influência dos parâmetros do sistema na resposta dinâmica, proporcionando uma compreensão mais aprofundada sobre os efeitos do amortecimento e da ressonância.

Os resultados demonstraram que, quando o fator de amortecimento  $\xi$  é inferior a 1, a ressonância ocorre quando a frequência de excitação se aproxima da frequência natural, levando a grandes amplificações da resposta vibratória. Observou-se que a transmissibilidade de deslocamento apresenta um pico significativo quando o valor de  $r$  tende a um e o valor de  $\xi$  tende a zero, indicando que a resposta do sistema pode ser drasticamente amplificada na ausência de

amortecimento adequado. À medida que o coeficiente de amortecimento aumenta, a amplitude das oscilações é reduzida, evidenciando a importância desse parâmetro na atenuação dos efeitos da ressonância. Para  $\xi \geq 1$ , o sistema não apresenta comportamento ressonante, demonstrando que a dissipação de energia controla a resposta dinâmica e evita oscilações excessivas.

Além da análise quantitativa dos resultados, a abordagem interativa adotada neste estudo mostrou-se uma ferramenta pedagógica valiosa. A simulação permitiu a visualização da transição entre os regimes transitório e permanente, facilitando a compreensão da dissipação das condições iniciais e da estabilização da resposta do sistema. O uso de um ambiente interativo favoreceu a exploração intuitiva dos conceitos de ressonância, transmissibilidade de deslocamento e amortecimento, proporcionando aos estudantes e pesquisadores uma forma acessível e dinâmica de compreender a relação entre os parâmetros do sistema e sua resposta.

Assim, este trabalho contribui tanto para a análise prática de sistemas dinâmicos quanto para o ensino de conceitos fundamentais de vibrações mecânicas. A combinação entre modelagem matemática, simulação computacional e visualização interativa fortalece o aprendizado, tornando a teoria mais acessível e aplicável a problemas reais. A abordagem aqui proposta pode ser ampliada para outros sistemas dinâmicos, consolidando-se como um recurso didático eficiente no ensino de física e engenharia.

## Referências

- Quintana, G., & Ciurana, J. (2011). Chatter in machining processes: A review. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 51(5), 363-376. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2011.01.001>
- Gharib, M., Omran, A., & El-Bayoumi, G. (2013). Optimal vibration control for structural-acoustic coupling system. *Journal of Vibration and Control*, 19(1), 14-29. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546311430717>
- Soong, T. T., & Spencer Jr, B. F. (2002). Supplemental energy dissipation: state-of-the-art and state-of-the-practice. *Engineering structures*, 24(3), 243-259. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(01\)00092-X](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(01)00092-X)
- Housner, G., Bergman, L. A., Caughey, T. K., Chassiakos, A. G., Claus, R. O., Masri, S. F., & Yao, J. T. (1997). Structural control: past, present, and future. *Journal of engineering mechanics*, 123(9), 897-971. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1997\)123:9\(897\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:9(897))
- Yao, J. T. (1972). Concept of structural control. *Journal of the Structural Division*, 98(7), 1567-1574. DOI: <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0003280>
- Webster, A., & Semke, W. (2004). Frequency-dependent viscoelastic structural

- elements for passive broad-band vibration control. *Journal of Vibration and Control*, 10(6), 881-895. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546304041150>
- Tusset, A. M., Balthazar, J. M., & Felix, J. L. P. (2013). On elimination of chaotic behavior in a non-ideal portal frame structural system, using both passive and active controls. *Journal of Vibration and Control*, 19(6), 803-813. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546311435518>
- Younespour, A., & Ghaffarzadeh, H. (2015). Structural active vibration control using active mass damper by block pulse functions. *Journal of Vibration and Control*, 21(14), 2787-2795. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546313519285>
- Braghin, F., Cinquemani, S., & Resta, F. (2013). A new approach to the synthesis of modal control laws in active structural vibration control. *Journal of Vibration and Control*, 19(2), 163-182. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546311430246>
- Khiavi, A. M., Mirzaei, M., & Hajimohammadi, S. (2014). A new optimal control law for the semi-active suspension system considering the nonlinear magneto-rheological damper model. *Journal of Vibration and Control*, 20(14), 2221-2233. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546313478292>
- Abdel-Rohman, M., & John, M. J. (2006). Control of wind-induced nonlinear oscillations in suspension bridges using multiple semi-active tuned mass dampers. *Journal of Vibration and Control*, 12(9), 1011-1046. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546306069035>
- Wang, C. M., Yan, N., & Balendra, T. (1999). Control on dynamic structural response using active-passive composite-tuned mass dampers. *Journal of Vibration and Control*, 5(3), 475-489. DOI: <https://doi.org/10.1177/107754639900500308>
- Hiramoto, K., & Grigoriadis, K. M. (2016). Active/semi-active hybrid control for motion and vibration control of mechanical and structural systems. *Journal of Vibration and Control*, 22(11), 2704-2718. DOI: <https://doi.org/10.1177/107754631>
- Symans, M. D., Charney, F. A., Whittaker, A. S., Constantinou, M. C., Kircher, C. A., Johnson, M. W., & McNamara, R. J. (2008). Energy dissipation systems for seismic applications: current practice and recent developments. *Journal of structural engineering*, 134(1), 3-21. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2008\)134:1\(3\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2008)134:1(3))
- Saaed, T. E., Nikolakopoulos, G., Jonasson, J. E., & Hedlund, H. (2015). A state-of-the-art review of structural control systems. *Journal of Vibration and Control*, 21(5), 919-937. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546313478294>
- Pereira, E., & Sandmann, A. (2024). Chaos determinístico do pêndulo elástico:

- um estudo usando o GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 13(2), 062-081. DOI: <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i2p062-081>
- Rao, S. S. (1995). *Mechanical Vibrations*, Addison-Wessley. Reading, MA, 43-46.
- N. Jazar, R., & Marzbani, H. (2023). 1/8 Vehicle Model. In *Vehicle Vibrations: Linear and Nonlinear Analysis, Optimization, and Design* (pp. 275-312). Cham: Springer International Publishing.
- Lundberg, T. (2013). Analysis of simplified dynamic truck models for parameter evaluation.
- Cordelina, G., & Pavanelo, E. (2024). Uma possibilidade de programação no GeoGebra: primeiros passos. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 13(3), 023-041. DOI: <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p085-103>
- Santos, M. A., & Pansonato, C. C. (2024). A Geometria Esférica e o GeoGebra: abordagem trigonométrica para solucionar problemas de navegação no globo terrestre. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 13(3), 123-140. DOI: <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p123-140>
- Alves, F. R. V. (2024). História da Matemática e Tecnologia: visualização de sequências recorrentes, algumas propriedades e a noção de Tabuleiro 2D/3D. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 13(3), 045-064. DOI: <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2024.v13i3p045-064>
- Pereira, E. (2021). Experiência de baixo custo para determinar a forma da superfície de um líquido em rotação usando o smartphone. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 43, e20210168. DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0168>
- Pereira, E. (2025). <https://www.geogebra.org/classic/ebmsnyqt>

**ENVIADO: 10/02/2025**

**ACEITO: 26/08/2025**

