https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i1p158-176

Uma proposta envolvendo o cálculo de área sob curvas utilizando o GeoGebra para o Ensino Médio

LUCCAS VINICIUS DA SILVA ARAUJO[1]
https://orcid.org/0009-0003-6593-3944
OSMAR DO NASCIMENTO SOUZA[2]
https://orcid.org/0000-0002-9165-3714
WELLINGTON PIVETA OLIVEIRA[3]
https://orcid.org/0000-0002-3840-1972

RESUMO

Este trabalho propõe uma abordagem para o ensino do cálculo de áreas sob curvas no Ensino Médio, sem recorrer diretamente à teoria de integração de Riemann. A proposta utiliza métodos geométricos de aproximação, como, o uso de retângulos e trapézios com o apoio do software GeoGebra para obter as estimativas da área abaixo de curvas da forma $y = f(x)$, *para x num intervalo [a,b]. A presente proposta apresenta as funções* $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ *e* $f(x) = x^3$, *definidas em [a,b], cujo cálculo de áreas é feito por aproximação, por meio de divisões do intervalo em n subintervalos, combinando atividades práticas de cálculo manual com o GeoGebra e proporcionando uma análise comparativa entre os métodos de aproximação. Como resultados, espera-se que por meio desta proposta, os alunos sejam incentivados a refletirem sobre a precisão das aproximações, vislumbrando por meio da abordagem que, quanto maior o número de divisões em retângulos e trapézios da área a ser calculada, mais próxima será a medida da área estimada por meio do ferramental tecnológico, abrindo espaço para introdução no estudo de somas de Riemann e integrais em etapas avançadas do processo de formação.*

Palavras-chave: *Aproximação Geométrica; Funções; Cálculo de área; Ensino de Matemática; Educação Básica.*

A proposal involving the area calculation of under curves using GeoGebra for High School

ABSTRACT

This work proposes an approach to teaching the calculation of areas under curves in high school, without directly resorting to Riemann integration theory. The proposal uses geometric approximation methods, such as the use of rectangles and trapezoids with the support of GeoGebra software to obtain estimates of the area under curves of the form

1Graduado em Licenciatura Matemática – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). E-mail: luccas.araujo@ufms.br

2Doutor em Matemática, Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Docente da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Corumbá, MS, Brasil. E-mail: osmarn.souza@gmail.com

3Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá (UEM). Docente da Universidade Federal do Paraná (UFPR), Jandaia do Sul, PR, Brasil. E-mail: wellington.piveta@ufpr.br

$y = f(x)$, for x in an interval [a,b]. This proposal presents the functions $y = x$, $f(x) = x^2$ and $f(x) = x^3$, defined in [a,b], whose area calculation is done by approximation, through divisions of the interval into n subintervals, combining practical manual calculation activities with GeoGebra and providing a comparative analysis between the approximation methods. As a result, it is expected that through this proposal, students will be encouraged to reflect on the accuracy of approximations, realizing through this approach that the greater the number of divisions of the area to be calculated into rectangles and trapezoids, the closer the measurement will be to the area estimated using technological tools, opening space for the introduction of the study of Riemann sums and integrals in advanced stages of the training process.

Keywords: *Geometric Approximation; Functions; Area Calculation; Mathematics Teaching; Basic Education.*

Introdução

O cálculo de áreas sob curvas é essencial em várias áreas científicas e tecnológicas, sendo amplamente utilizado, por exemplo, na Física para medir trabalho e deslocamento, e na Economia para avaliar crescimento acumulado ou lucro ao longo do tempo. Além dessas aplicações, o conceito de área é a base do cálculo integral, fundamental em áreas como Engenharia e Ciência da Computação. Ensinar esse conceito no Ensino Médio, sem o uso direto das integrais de Riemann, contribui significativamente para a formação dos alunos, introduzindo-os a ideias que poderão ser aprofundadas em estudos futuros.

Um dos grandes desafios no ensino do cálculo de áreas para estudantes, que ainda não aprenderam integração, é encontrar abordagens que favoreçam a essência do conceito de área de forma acessível. Métodos geométricos simples como, a decomposição de áreas em formas familiares como retângulos e trapézios, são modos eficazes de apresentar esses conteúdos envolvendo cálculo aproximado de área sob uma curva (Machado, 2008). Esse processo gradual ajuda os alunos a construírem uma compreensão dos conceitos envolvidos, sem exigir as abstrações matemáticas necessárias ao cálculo formal da integral de Riemann.

Os métodos geométricos, comumente usados para calcular áreas sem o uso do cálculo integral, incluem a aproximação por retângulos e trapézios. O método dos retângulos, por exemplo, consiste em subdividir a região sob a curva em pequenos retângulos, somando suas áreas para obter uma estimativa do valor total da área. Já o método dos trapézios, que leva mais em consideração a inclinação da curva, proporciona uma aproximação mais precisa, o que torna a análise dos erros mais interessante e significativa para ser discutida pelos alunos. Lopes (2013) destacou como essa aproximação, aplicada junto ao GeoGebra, pode ajudar os estudantes a desenvolverem uma intuição mais apurada sobre a relação entre a geometria e os números envolvidos no cálculo de área.

O uso de ferramentas tecnológicas como o GeoGebra facilita esse processo de aprendizagem ao permitir uma dinamicidade visual das aproximações, ajudando os alunos a compreender como os diferentes métodos (retângulos e trapézios) se ajustam à curva dada. O bom uso dessas ferramentas já se mostrou também capaz de proporcionar a visualização de conceitos mais avançados presentes na Análise Real, conforme destacam Costa e Alves (2024) o qual promove a visualização dinâmica dos conceitos de continuidade e convergência que estão presentes nas hipóteses e na tese de uma das versões do Teorema de Ascoli-Arzelà, facilitando assim a compreensão do teorema.

Conforme enfatizado por Lopes (2013), o GeoGebra oferece uma plataforma interativa em que os estudantes podem manipular gráficos e ajustar parâmetros em tempo real, permitindo-lhes observar os impactos das mudanças na precisão dos cálculos por meio de um ambiente propício para investigações, testes envolvendo diferentes exemplos e criação de hipóteses. Segundo Cordelina (2024), esse tipo de interação ajuda a consolidar o aprendizado, tornando o processo de aprendizagem mais envolvente, além de representar um convite à criatividade e reflexão para pensar em como explorar de maneira diferente os conteúdos desejados, promovendo uma reflexão mais profunda sobre os conceitos. Além de seu grande potencial pedagógico, o GeoGebra se destaca como uma ferramenta eficaz na criação de ilustrações profissionais, podendo ser utilizado para produzir gráficos e figuras para documentos em Microsoft Word, OpenOffice ou LaTeX (Nascimento, 2012). Ao utilizar o GeoGebra, os alunos têm a oportunidade de interagir de forma autônoma com os conteúdos abordados, promovendo um aprendizado visual e dinâmico. Essa interação favorece a experimentação de diferentes abordagens para resolver problemas, o que contribui para uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos.

Como destacado por Sousa (2014), essa abordagem permite que os alunos compreendam a importância das aproximações geométricas no cálculo, vislumbrando conceitos mais avançados como a integral de Riemann. Ao comparar a precisão dos diferentes métodos geométricos, os alunos desenvolvem o raciocínio crítico, aprendendo que nem sempre é possível encontrar, de imediato, um valor que represente a área calculada. O aumento do número de subdivisões refina as aproximações e faz com que o resultado da soma de Riemann se aproxime do valor da área, o que os ajuda a entender melhor a relação entre erros e precisão. Outros trabalhos como Simões *et al* (2016) já utilizam dessa abordagem para o cálculo aproximado de áreas no Ensino Médio, porém, além de se limitar ao uso do GeoGebra, este restringe-se a cálculo com retângulos e não apresenta os encaminhamentos para o desenvolvimento da proposta.

Com base nesses argumentos, a proposta apresentada neste trabalho explora essas ideias de forma prática, com o objetivo de fornecer aos estudantes uma compreensão inicial dos métodos geométricos para o cálculo de áreas sob curvas, por meio de retângulos e também de trapézios, utilizando as funções $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$. Ao aplicar os métodos dos retângulos e dos trapézios para essas funções, no intervalo [0,1], os alunos serão instigados a refletirem sobre os resultados obtidos e a precisão das aproximações, não apenas utilizando a visualização dinâmica do GeoGebra, mas também realizando seus próprios cálculos manualmente, o que torna a proposta mais desafiadora, uma vez que tal abordagem favorece tanto a intuição geométrica quanto a compreensão dos algoritmos de aproximação. Esse é um aspecto formativo importante para o desenvolvimento do pensamento crítico em matemática uma vez que estimula os alunos a comparar a precisão dos métodos utilizados e a questionar os resultados obtidos, bem como a lidar com erros. Além disso, neste manuscrito descrevemos os procedimentos e encaminhamentos para o desenvolvimento da proposta a ser aplicada a alunos do Ensino Médio, tornando o trabalho mais próximo da realidade e, consequentemente, mais atrativo.

Em seu estudo de caso em Cálculo, Mannan, A.M.K. (2025), mostra como o GeoGebra potencializa o acompanhamento e a avaliação de estratégias quando os alunos comparam métodos numéricos e analíticos e analisam seus erros. Por outro lado, Zulnaidi, H. (2017) compara o desempenho de grupos de alunos no ensino médio ao utilizarem o GeoGebra, para executar determinadas tarefas, com alunos que realizaram essas mesmas tarefas usando apenas os meios tradicionais. Ambos reconhecem a importância de praticar os dois métodos, porém acreditamos que esses meios, além de não serem excludentes, podem ser complementares. Dito isso, nossa proposta busca oferecer uma conciliação do uso do GeoGebra, para visualização dinâmica geométrica, com atividades manuais para estimular a reflexão sobre a precisão dos diferentes métodos de aproximação.

A fim de cumprir com o objetivo proposto, na sequência serão apresentados, na seção 1 *A Soma de Riemann e Cálculo de Área sob curva por meio de Trapézios*, que traz a definição e exemplos desses conceitos. Em seguida, na seção 2 *Encaminhamentos para o desenvolvimento da proposta*, apresentamos várias etapas da nossa proposta, que vão desde a *Introdução ao Cálculo Manual e Avaliação*. Por fim, são apresentadas as *Considerações Finais* sobre o trabalho proposto, as quais reforçam os estudos de Sousa (2014) e Lopes (2013), que mostram a relevância dessa abordagem para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

1. A Soma de Riemann

As somas de Riemann são construídas de modo a encontrar a área de uma região S, delimitada por uma função contínua arbitrária $f(x)$ definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Em seguida, o intervalo $[a, b]$ é dividido em n subintervalos escolhendo $n - 1$ pontos, que podemos denotá-los por $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$, entre a e b, sujeitos apenas a condições de que

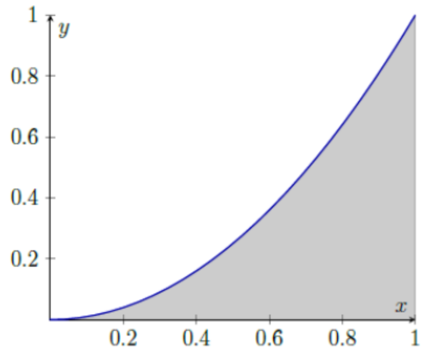
$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b \,,$$

(Finney et. al., 2002). A partir desses subintervalos, figuras geométricas como retângulos e trapézios podem ser construídas, as quais se ajustam à curva da função $f(x)$.

Inicialmente, utilizaremos a aproximação por retângulos. Para isso, delimitamos a função em um intervalo específico e dividimos a área S desse intervalo em n retângulos de tamanho determinado. O exemplo 1, a seguir, foi fundamentado em Stewart (2006), para demonstrar esse procedimento.

Exemplo 1. Use os retângulos para estimar a área da região sob a parábola $y = x^2$de $x = 0$ até $x = 1$ (a região parabólica S ilustrada na Figura 1).

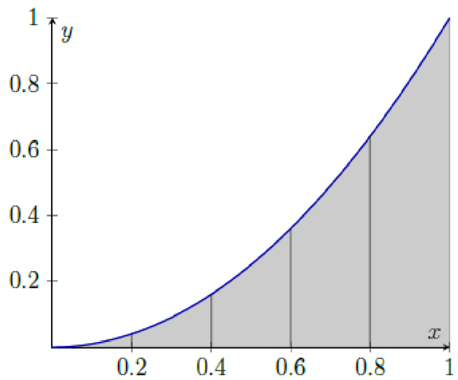
Figura 1: Gráfico da função $f(x) = x^2$com a região destacada no intervalo *[0,1]*.



Fonte: Os autores, 2025.

Solução. Primeiramente, observamos que a área da região S está compreendida no intervalo entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado de lado 1. No entanto, é possível obter uma estimativa mais precisa. Para isso, dividimos S em 5 sub-regiões, S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5 traçando as retas verticais nos pontos $x = \frac{1}{5}$, $x = \frac{2}{5}$, $x = \frac{3}{5}$ e $x = \frac{4}{5}$ conforme ilustrado na figura 2.

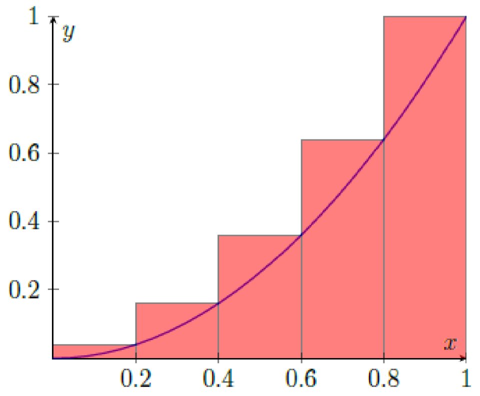
Figura 2: Gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo *[0,1]* dividida em 5 subintervalos.



Fonte: Os autores, 2025.

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa (Figura 3). Em outras palavras, as alturas desses retângulos correspondem aos valores da função $f(x) = x^2$ nos extremos direitos dos subintervalos $\left[0, \frac{1}{5}\right]$, $\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$, $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$ e $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

Figura 3: Gráfico da função $f(x) = x^2$ separada em 5 retângulos.



Fonte: Os autores, 2025.

Cada um dos retângulos tem largura Δx, que corresponde a $\frac{b-a}{n}$, em que a e b são as extremidades do nosso intervalo e n a quantidade de subintervalos, neste caso $\Delta x = \frac{1}{5}$. E as alturas são os valores que $f(x_k)$ assume quando $x_k = a + k \cdot \Delta x$, em que k corresponde ao subintervalo escolhido e $k < n$, neste caso, as alturas são $\left(\frac{1}{5}\right)^2, \left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{3}{5}\right)^2, \left(\frac{4}{5}\right)^2$ e 1^2. Seja A a soma das áreas desses retângulos aproximantes; então,

$$A = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot 1^2 = \frac{11}{25} = 0{,}44,$$

porém, esta área não equivale à área de da região S, pois apenas a aproxima dela superiormente. Alterando as alturas para que a aproximação seja inferior, obtemos um valor diferente.

$$B = \frac{1}{5} \cdot (0)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{6}{25} = 0{,}24\,.$$

Assim obtemos estimativas inferior e superior para a área da região S: $0{,}24 < S < 0{,}44$.

Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas. Uma estimativa melhor pode ser obtida pela média aritmética desses números: $S \approx 0{,}3333335$.

Definição 1. A área A da região S que está sob o gráfico de uma função f, definida no intervalo $[a, b]$, é o limite da soma das áreas $f(x_k) \cdot \Delta x$, isto é,

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$$

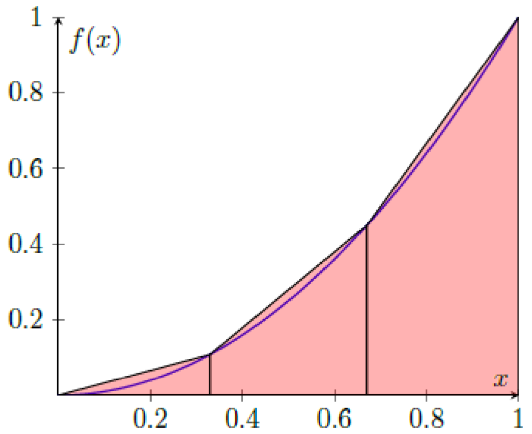
em que $f(x_k)$ é a altura do retângulo e base $\Delta x = \frac{b-a}{n}, com x_k = a + k \cdot \Delta x$.

1.1 Cálculo de área sob curva por meio de Trapézios

No que se refere ao cálculo de área do intervalo de determinada região sob uma curva, cuja aproximação se dá por meio de trapézios, também podemos dizer que se trata de um método numérico utilizado para calcular a área da região sob o gráfico da função $f(x)$ em um intervalo $[a,b]$. O trapézio é uma figura geométrica com dois lados paralelos e a_2 e uma altura h. Nesse cálculo, os dois lados paralelos correspondem aos valores da função $f(x)$ em dois pontos consecutivos, e a altura é o tamanho do subintervalo h.

Exemplo 2. Use os trapézios para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ para $0 < x < 1$ (a região parabólica S ilustrada na Figura 4).

Figura 4: Gráfico da função $\mathrm{f}(x) = x^2$ com *n=3* trapézios.



Fonte: Os autores, 2025.

Para determinar a área aproximada dessa região por meio de trapézio, faremos uma soma sucessiva de cada área desses trapézios pela fórmula da área que é a média das bases multiplicada pela altura, ou seja, $A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$, em que h é o tamanho do subintervalo, b são os pontos de $f(x_i)$, B são os pontos de $f(x_{i+1})$, sendo i a posição do subintervalo do ponto. Temos

$$Área \approx \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{0^2}{3^2} + \frac{1^2}{3^2}\right) \cdot \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1^2}{3^2} + \frac{2^2}{3^2}\right) \cdot \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{3^2}\right) \cdot \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{0^2}{3^2} + \frac{1^2}{3^2}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{0^2}{3^2} + \frac{1^2}{3^2}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{0^2}{3^2} + \frac{1^2}{3^2}\right) \cdot \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\left[\left(\frac{0^2}{3^2} + \frac{1^2}{3^2}\right) + \left(\frac{1^2}{3^2} + \frac{2^2}{3^2}\right) + \left(\frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{3^2}\right)\right]$$

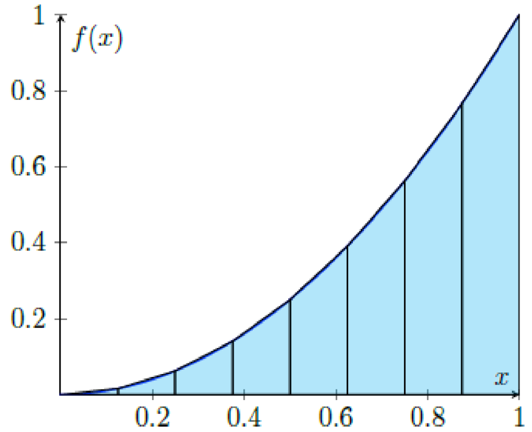
$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{5}{9} + \frac{13}{9}\right) = \frac{19}{54} = 0{,}35\,.$$

Observando o comportamento desses cálculos é possível notar outro padrão, em que o valor da média das bases é $\frac{1}{2}$, além da própria altura $\frac{1}{n}$. Notemos também que é possível encontrar o somatório

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1),$$

porém limitado superiormente não por n, mas sim por $n-1$. Vejamos a seguir, na Figura 5, para $n = 8$ trapézios.

Figura 5: Gráfico da função $f(x) = x^2$ com $n = 8$ trapézios.



Fonte: Os autores, 2025.

$$Área \approx \frac{1}{2n} \cdot [f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 8} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{3^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{4^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{6^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{7^2}{8^2}\right) + 1\right]$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{3^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{4^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{6^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{7^2}{8^2}\right)\right] + \frac{1}{16}$$

Usando

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1),$$

como mostrado anteriormente, obtemos para $n = 8$:

$$Área \approx \frac{1}{2 \cdot 8} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1^2}{8^2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{2^2}{8^2}\right) + \cdots + 2 \cdot \left(\frac{(8-1)^2}{8^2}\right)\right] + \frac{1}{2 \cdot 8}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 8} \cdot \frac{2}{8^2} \cdot [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2] + \frac{1}{2 \cdot 8}$$

$$= \frac{1}{8^3} \cdot \frac{8}{6} \cdot (8-1) \cdot (2 \cdot 8 - 1) + \frac{1}{16} = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot 15 + \frac{1}{16} = \frac{35}{128} + \frac{1}{16} = \frac{43}{128} = 0{,}34$$

Podemos aplicar essa fórmula geral para obter valores mais precisos para *n* trapézios:

Para $n = 16$ trapézios: $Área \approx \frac{1}{6 \cdot 16^2} \cdot 15 \cdot 31 + \frac{1}{32} \approx 0{,}334$.

Para $n = 32$ trapézios: $Área \approx \frac{1}{6 \cdot 32^2} \cdot 31 \cdot 63 + \frac{1}{64} \approx 0{,}333$.

Para $n = 64$ trapézios: $Área \approx \frac{1}{6 \cdot 64^2} \cdot 63 \cdot 127 + \frac{1}{64} \approx 0{,}333$.

Em geral, para uma quantidade *n* qualquer de trapézios, obtemos a fórmula do cálculo da área:

$$Área \approx \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot (2n-1) + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot n \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n}$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos a área exata abaixo da curva $y = x^2$ de $x = 0$ até $x = 1$:

$$Área = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

pois quanto mais n se aproxima do infinito, a fração $\frac{1}{n}$ tende a 0, ou seja, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

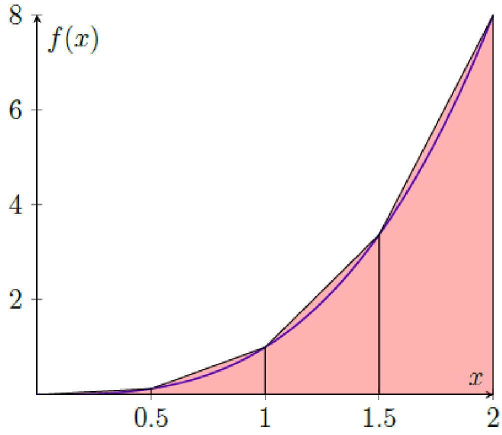
Definição 2. A área da região A sob o gráfico de uma função f, definida no intervalo $[a, b]$, pode ser aproximada pela soma das áreas dos trapézios formados pela divisão do intervalo em n partes de mesma largura. A fórmula para a Regra do Trapézio é dada por:

$$A = \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

sendo $x_0 = a$ e $x_n = b$ extremidades do intervalo; $x_0, x_1, \cdots, x_n$ pontos de divisão do intervalo; e $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ valores da função nos subintervalos.

Exemplo 3. Uma fábrica está construindo uma peça com um design especial, e o volume de um material é calculado pela área da base que varia ao longo do comprimento da peça. O formato da área da base em cada ponto é modelado por $f(x) = x^3$, em que x é o comprimento, em metros, no intervalo [0,2] (Figura 6).

Figura 6: Gráfico da função $f(x) = x^3$ com a região destacada no intervalo$[0,2]$.



Fonte: Os autores, 2025.

Aplicando a fórmula geral dada na definição 2, temos:

$$Área \approx \frac{2}{2\cdot 4}\cdot\left[0+2\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^3+2\cdot\left(\frac{4}{4}\right)^3+2\cdot\left(\frac{6}{4}\right)^3+\left(\frac{8}{4}\right)^3\right]=\frac{1}{4^4}\cdot(2\cdot 2^3+2\cdot 4^3+2\cdot 6^3+8^3)$$

$$=\frac{1}{256}\cdot(16+128+432+512)\ =\ \frac{1088}{256}=\frac{17}{4}=4{,}25$$

Ao analisar o comportamento dos valores nesses cálculos, percebe-se novamente a identificação de um padrão. Observa-se que, assim como no caso anterior, é possível isolar o valor da média das bases e a altura. Além disso, nota-se que o somatório do cubo dos k primeiros termos segue a relação

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}.$$

De modo análogo ao exemplo anterior, o limitante superior dessa relação não é dado por n, mas sim por $n-1$, o que reforça o padrão previamente identificado. Também é possível observar que, ao dobrarmos o intervalo de $[0,1]$ para $[0,2]$, os subintervalos de $x_i = \frac{i}{n}$, com $i = 1,2,3,\cdots,n$, são dobrados para $2x_i = \frac{2i}{n}$, com $i = 1,2,3,\cdots,n$. Então agora faremos a simplificação da fórmula da área para o intervalo $[0,2]$, com $f(x_i) = \left(\frac{2i}{n}\right)^3$:

$$Área \approx \frac{b-a}{2n}\cdot[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$=\frac{2}{2n}\cdot\left[\frac{2^3\cdot 0^3}{n^3}+2\cdot\frac{2^3\cdot 1^3}{n^3}+2\cdot\frac{2^3\cdot 2^3}{n^3}+\cdots+2\cdot\frac{2^3\cdot(n-1)^3}{n^3}+\frac{2^3\cdot n^3}{n^3}\right]$$

$$=\frac{2^3}{n}\cdot\left[2\cdot\frac{1^3}{n^3}+2\cdot\frac{2^3}{n^3}+2\cdot\frac{3^3}{n^3}+\cdots+2\cdot\frac{(n-1)^3}{n^3}+\frac{n^3}{n^3}\right]$$

$$= \frac{8}{n} \cdot \frac{2}{n^3} \cdot [1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-2)^3 + (n-1)^3] + \frac{8}{n}$$

$$= \frac{16}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^3 + \frac{8}{n} = \frac{16}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{4} + \frac{8}{n}$$

$$= \frac{4}{n^2} \cdot (n-1) \cdot (n-1) + \frac{8}{n} = \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{8}{n}$$

$$= 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{8}{n}$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos a área abaixo da curva $y = x^3$ de $x = 0$ até $x = 2$, dada por: $Área = \lim_{n \to \infty} 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{8}{n} = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$.

Conforme anunciado, na próxima seção, apresentamos alguns encaminhamentos para a abordagem desses conceitos, a título de sugestão, no contexto educativo.

2. Encaminhamentos para o desenvolvimento da proposta

Considerando os exemplos que tratam da Soma de Riemann, o objetivo deste estudo é apresentar uma proposta que explora métodos geométricos para o ensino do cálculo de áreas sob curvas no Ensino Médio, sem recorrer às técnicas de integração. Para tanto, a proposta utiliza como recurso tecnológico o GeoGebra e abordagens manuais, buscando promover a reflexão sobre a precisão dos diferentes métodos de aproximação.

No que se refere a esta etapa da Educação Básica – Ensino Médio, a Base Nacional Comum Curricular recomenda, por exemplo, que os estudantes desenvolvam habilidades como:

> (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil, 2018, p. 545).

Contudo, a mobilização de diferentes métodos para o cálculo de área perpassa experiências prévias com situações didáticas que oferecem aos estudantes condições para experimentarem, problematizarem, discutirem, conjecturarem, representarem, além de outras condições que contribuem para o desenvolvimento conceitual, procedimental e significativo dos conceitos e suas aplicações. É nesse sentido que esclarecemos que esta proposta encontra sentido nas reflexões realizadas por Dewey (2023), filósofo norte-americano que se debruçou a refletir sobre Educação e os processos educativos, quando compreendemos a necessidade de mobilização, pelos estudantes, de habilidades como a supracitada.

Em Dewey (2023), o “aprender fazendo” sustenta práticas que se apoiam em modelos paradigmáticos as quais fogem de uma abordagem mais expositiva e diretiva. No cenário educacional, temos investido cada vez mais em abordagens cuja centralidade do processo não seja o conteúdo e os materiais didáticos evidenciando um movimento tecnicista, mas a atuação do indivíduo que interage com eles, revelando uma postura mais construtivista e interacionista.

Propostas assentes a paradigmas mais investigativos que envolve, entre outras coisas, a resolução de problemas, a manipulação de objetos e a construção de representações matemáticas que evidenciam procedimentos e raciocínios, mediados por Tecnologias Digitais têm ganhado espaço nas práticas e pesquisas no campo da Educação Matemática. Nesse sentido, esta proposta foi elaborada quando consideramos a defesa de “explorar as ferramentas e as potencialidades que as tecnologias proporcionam, criando estratégias de ensino e de aprendizagem que ajudem os alunos na experimentação, na visualização e na construção dos conhecimentos matemáticos” (Brum; Pereira, 2018, p. 84).

Considerando esses e outros fundamentos, a proposta que apresentamos nesta seção encontra sentido no processo de construção do cálculo de área utilizando o GeoGebra como recurso tecnológico, pautado em tarefas de cunho investigativo, em que o estudante assume papel ativo no aprendizado. A proposta é dividida em seis etapas, de modo a favorecer uma melhor compreensão dos conceitos trabalhados em cada uma delas.

2.1 Primeira etapa da proposta: introdução

A primeira etapa da proposta consiste na introdução do cálculo de áreas sob curvas sem utilizar métodos de integração. O objetivo é estimular o raciocínio dos alunos, levando-os a refletirem sobre como podem abordar o problema utilizando ferramentas geométricas e métodos de aproximação.

Uma breve explicação sobre a importância de calcular a área de uma região sob curvas $y = f(x)$, definidas em um intervalo $[a, b]$, pode ser feita por meio de exemplos com referência na realidade. Por exemplo, destacando que esse cálculo é frequentemente utilizado para representar situações práticas como a determinação de deslocamento em função da velocidade, o cálculo do trabalho em Física, a análise de distribuições de probabilidade em Estatística e a avaliação de taxas de crescimento ou decrescimento em Biologia e Economia. Outro aspecto a ser discutido é o que esse cálculo representa, enfatizando que ele fornece uma medida acumulada de valores ao longo de um intervalo, o que é essencial para compreender fenômenos contínuos em diferentes campos do conhecimento. Dada essa importância, serão apresentadas três funções: $f(x) = x, f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$, cujos gráficos serão construídos no quadro para promover a discussão. Os alunos serão desafiados a refletirem sobre como as áreas sob os gráficos dessas funções podem ser calculadas no intervalo [0,1], incentivando a identificação de aproximações baseadas em figuras geométricas elementares por eles conhecidas como, retângulos e trapézios.

Ao longo dessas discussões, os alunos terão a oportunidade de experimentar e comparar as aproximações geométricas, discutindo como cada método se aproxima do valor real e quais são as limitações de cada abordagem. A ideia central é promover uma análise crítica, em que os erros e acertos possam ser reconhecidos por eles, tornando-se parte do processo de aprendizado e, assim, preparando os alunos para a introdução futura de métodos mais sofisticados de cálculo de áreas como, a soma de Riemann e a integral definida.

2.2 Segunda etapa da proposta: função $f(x) = x$

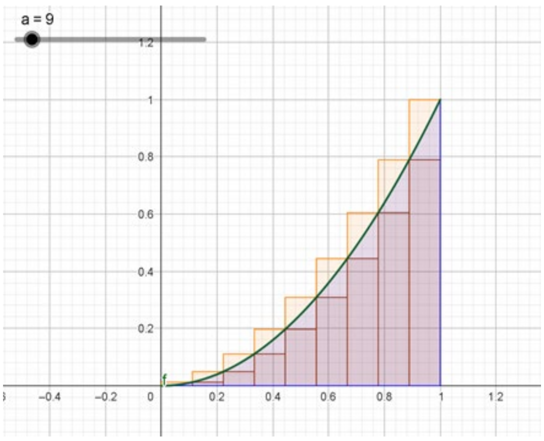
Essa etapa da proposta tem como objetivo demonstrar que a área sob a curva da função linear $f(x) = x$, no intervalo [0,1], pode ser calculada de forma direta utilizando a fórmula da área de um triângulo. Essa função e seu gráfico serão apresentados aos alunos na lousa, os quais serão guiados a reconhecerem que a área abaixo de seu gráfico corresponde à de um triângulo, reforçando a decomposição em formas geométricas conhecidas. Esse exemplo inicial servirá para consolidar o conceito de decomposição de áreas e preparar os alunos para o cálculo de áreas delimitadas por funções mais sofisticadas. Em seguida, será levantado o questionamento sobre quais são a base e a altura do triângulo representado pelo gráfico da função no intervalo dado, com o objetivo de que os estudantes identifiquem esses valores. Será explicado também que esses valores dependerão do intervalo de domínio dado da função e, em sequência, serão orientados a deduzir, mesmo que intuitivamente, a fórmula para o cálculo da área do triângulo $\left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$ sendo b a base e h a altura do triângulo, a qual pode ser obtida como a metade da área do retângulo de lados b e h. Será destacado que, nesse exemplo, de intervalo [0,1], está sendo considerado a base de medida 1, assim como a medida da altura também será 1 unidade, de modo que o valor procurado é $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ unidade de área.

2.3 Terceira etapa da proposta: função $f(x) = x^2$

Nesta etapa, pretende-se levar os alunos a compreenderem que o cálculo da área sob a curva de $f(x) = x^2$, no intervalo [0,1], não pode ser realizado diretamente por decomposição em figuras geométricas simples. Para estimular uma abordagem mais investigativa, será solicitado aos alunos que, com base no gráfico da função apresentado no quadro, reflitam e proponham métodos que possam estimar o valor dessa área. Durante a discussão, eles serão incentivados a testarem suas ideias e verificar os resultados obtidos. Caso necessário, o professor poderá intervir para orientar as estratégias, o raciocínio, introduzindo a ideia de medidas, de aproximações e, na medida do possível, sugerir o uso de retângulos e trapézios como ferramentas práticas para o cálculo.

Para que fique mais visível aos alunos como esse cálculo pode ser realizado, a atividade pode ser iniciada utilizando o GeoGebra como recurso pedagógico, em que os alunos utilizarão uma sequência de passos para construção da função no software GeoGebra sob orientação do professor, da aproximação por retângulos, além do erro desse cálculo. A ideia é iniciar com 3 retângulos (figura 7) e ir aumentando gradativamente. Os detalhes dessas etapas da implementação da função e execução dos comandos no software GeoGebra em sala de aula, com exemplos, inclusive, das demais funções, podem ser encontrados em Araujo et al (2025).

Figura 7: Aproximação por meio de retângulos da função $f(x) = x^2$, com $n = 9$ retângulos, pelo software GeoGebra.

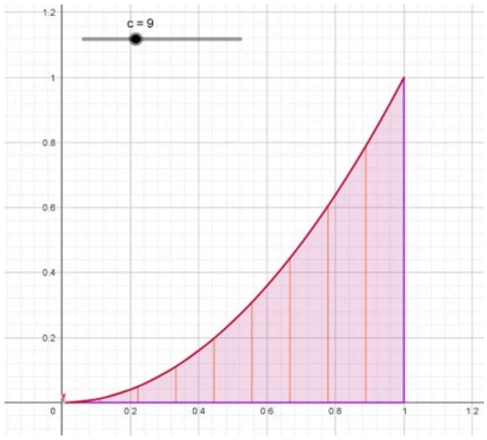


Fonte: Os autores, 2025.

Após essa primeira tentativa, os alunos serão questionados sobre o que acontece com o erro à medida que o número de retângulos aumenta. Essa reflexão ajudará a consolidar a compreensão de que, o aumento na quantidade de retângulos pode melhorar a precisão da estimativa da área.

Em seguida, será apresentada a utilização de retângulos para calcular a área aproximada manualmente, com 4 e 5 retângulos. Os alunos realizarão esses cálculos e compararão os resultados obtidos, discutindo as diferenças entre as aproximações encontradas quando se aumenta a quantidade de retângulos e a área real fornecida pelo software. O foco da discussão será a análise dos erros em cada abordagem, permitindo que os alunos reflitam sobre a importância de aumentar o número de divisões para melhorar a precisão das aproximações. Na sequência outro método será apresentado para a estimativa da área, utilizando os trapézios para calcular a área abaixo da curva (figura 8).

Figura 8: Aproximação por meio de trapézios da função $f(x) = x^2$, com $n = 9$ trapézios, pelo software GeoGebra.



Fonte: Os autores, 2025.

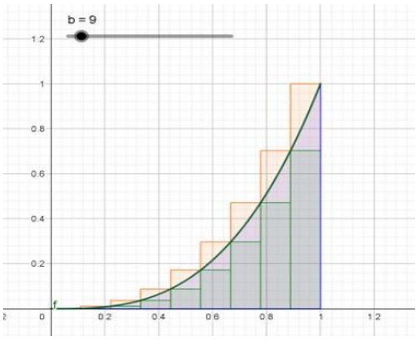
Também, será proposto, assim como no método de aproximação da área por retângulos, o uso da representação gráfica e o cálculo manual pelo método de trapézios, considerando a construção com 4 e 5 trapézios. Os alunos serão convidados, novamente, a utilizarem o GeoGebra para comparar a aproximação da área por trapézios como foi realizado também com retângulos. Eles realizarão esses cálculos e compararão os resultados obtidos por meio de ambos os métodos, discutindo as diferenças entre suas estimativas e a área real. Ao final, a discussão será direcionada para a análise dos erros em cada abordagem, permitindo que os alunos reflitam sobre a importância de aumentar também o número de divisões, seja com retângulos ou trapézios, para melhorar a precisão das estimativas.

2.4 Quarta etapa da proposta: função $f(x) = x^3$

O objetivo desta etapa é propor aos alunos o cálculo da área sob a curva da função cúbica $f(x) = x^3$, com $0 \leq x \leq 1$, utilizando os métodos de retângulos e trapézios no GeoGebra e analisar os erros associados a cada método.

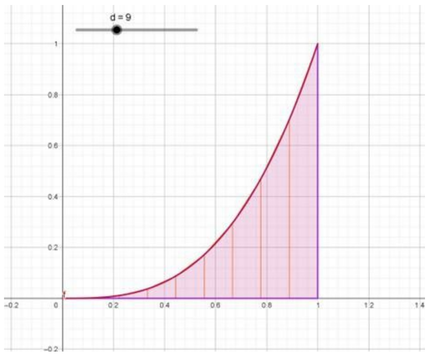
Para iniciar, retornaremos ao gráfico da função $f(x) = x^3$ no intervalo [0,1], desenhado no início da proposta. Novamente, realizaremos uma atividade prática no GeoGebra, em que os discentes construirão, seguindo uma sequência de passos, o gráfico da função, a aproximação por meio de retângulos (figura 9) e a aproximação por meio de trapézios (figura 10), além do erro dessa estimativa (Araujo, 2025).

Figura 9: Aproximação por meio de retângulos da função $f(x) = x^3$ pelo software GeoGebra.



Fonte: Os autores, 2025.

Figura 10: Aproximação por meio de trapézios da função $f(x) = x^3$ pelo software GeoGebra.



Fonte: Os autores, 2025.

Após essa primeira análise, os discentes aplicarão o método dos trapézios para calcular a área sob a curva. Eles anotarão os resultados obtidos com esse método e compararão os erros entre as estimativas feitas com retângulos e trapézios. Essa comparação permitirá que os alunos reflitam sobre qual dos dois métodos parece ser mais eficiente para a função cúbica. O valor exato da área será informado aos alunos para que possam compará-lo com as aproximações obtidas. Durante essa atividade, os alunos serão questionados a respeito do erro obtido nessa estimativa comparando-o com o caso da função quadrática discutida anteriormente, no sentido de ser maior ou menor e o que ele representa. Ao final, os alunos serão questionados sobre qual método (retângulos ou trapézios) oferece a melhor estimativa do valor para a área sob a curva dessa função e por quê isso acontece. Essa discussão final será crucial para consolidar o aprendizado, pois os alunos poderão analisar como as características da função cúbica impactam a precisão das diferentes aproximações e a importância de aumentar o número de divisões para reduzir os erros.

2.5 Quinta etapa da proposta: cálculo manual com somatório

A quinta etapa da proposta tem como objetivo aplicar a fórmula do trapézio manualmente, utilizando 4 e 5 trapézios, para demonstrar como esse método pode estimar a área real sob uma curva. Para iniciar, será retomado o gráfico da função $f(x) = x^3$ no intervalo [0,1]. Será explicado aos estudantes que, após utilizarem o GeoGebra para visualizar a área sob a curva, agora trabalharão com o cálculo manual. Nesse contexto, a proposta é aplicar a fórmula da área do trapézio para calcular a área sob a curva, dividindo o intervalo [0,1] em 4 e 5 trapézios. A fórmula da área do trapézio será construída no quadro, a qual foi apresentada na Definição 2.2.

Os alunos desenvolverão o cálculo manual com quatro trapézios, dividindo o intervalo em três partes iguais e calculando as áreas dos trapézios correspondentes. Em seguida, repetir-se-á em cinco trapézios, permitindo que os alunos comparem os resultados obtidos nas duas tentativas. Durante essa análise, serão questionados sobre o que podem observar em relação à precisão, ao aumentar o número de trapézios, levando-os à conclusão de que quanto mais divisões, mais próximo do valor exato da área.

2.6 Sexta Etapa da proposta: avaliação

A etapa final da proposta visa consolidar o aprendizado e discutir os principais conceitos abordados ao longo das aulas. Para isso, os resultados obtidos para as três funções trabalhadas serão resumidos, permitindo que os estudantes façam uma revisão do que aprenderam. Os alunos serão incentivados a refletirem sobre os erros dos métodos utilizados e a precisão das estimativas realizadas. Para estimular essa reflexão, poderá ser proposta uma questão aberta que provoque a reflexão e discussão: "Qual método apresentou maior precisão nos cálculos: retângulos ou trapézios? Argumente com base nos exemplos desenvolvidos em sala".

Essa atividade final será fundamental para garantir que os alunos atribuam significado os conteúdos abordados e desenvolvam uma compreensão sobre as técnicas para o cálculo de áreas sob curvas. Nessa direção, espera-se, portanto, que os cálculos realizados manualmente e por meio do GeoGebra sejam comparados e o uso desse software reconhecido como recurso que auxilia na realização desta tarefa.

Considerações Finais

Este trabalho apresentou uma proposta para o ensino de áreas sob curvas no Ensino Médio, combinando métodos geométricos e tecnologia educacional como, o GeoGebra. A proposta foi desenvolvida para abordar conceitos fundamentais como, a soma de Riemann de forma acessível e interativa, utilizando funções elementares, a saber $f(x) = x, f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$, como base para um aprendizado gradativo. Essa abordagem permite aos alunos explorar a relação entre subdivisões e precisão, além de comparar erros nos métodos de aproximação por retângulos e trapézios.

Foi apresentada uma orientação acerca dos encaminhamentos, com potencial para implementação em contextos escolares, cabendo às devidas adaptações contextuais, de modo a ampliar a compreensão conceitual, a visualização e a atribuição de significado para o conceito de área sob curvas. O uso do GeoGebra, nesse contexto, se destaca como um recurso essencial, promovendo dinamicidade e facilitando a visualização de conceitos abstratos nesta proposta. Além disso, incentiva o desenvolvimento do raciocínio lógico e matemático por meio da análise comparativa de erros.

Fica evidente, nesta proposta, que diferente de abordagens mais diretivas, aos estudantes é dado espaço para pensarem, testarem e argumentarem sobre os seus raciocínios no desenvolvimento das tarefas. Esse espaço mostra-se importante, sobretudo, para questionarem-se sobre a ideia de aproximação no contexto do cálculo de área, contribuindo para desmistificar a ideia de que a resposta é única e nunca aproximada, tendo uma interface com a “ideologia da certeza” (Skovsmose, 2000). Desse modo, o caráter investigativo exige reflexão sobre aquilo que é desenvolvido para que então possa ser representado, bem como, avaliado em termos de ideias, pensamento e procedimentos.

Com isso, apostamos que esta proposta se mostra potente para o ensino-aprendizagem, pois embora a literatura evidencie que ensinar e aprender exigem envolvimento, engajamento, protagonismo, atuação do indivíduo, material adequado, prática contextualizada, entre tantas outras características, consideramos que ela apresenta elementos importantes que, quando associada à mediação pedagógica, pode se tornar um ambiente favorecedor da aprendizagem, podendo, inclusive, quando desenvolvida em sala de aula, ser compreendida/interpretada sob diferentes lentes teóricas.

Compreendemos ainda que o trabalho reforça a relevância de discutir com os alunos tópicos mais avançados como, integral definida de forma gradual e contextualizada, contribuindo para a construção de um ensino de matemática mais envolvente e alinhado às demandas contemporâneas, desde a abordagem introdutória que se faz, relacionando o conteúdo abordado com temas referente à realidade.

Referências

[1] Alves, F. R. V., & Costa, A. L. A. (2024). Visualização de elementos do Teorema de Ascoli-Arzelà com ferramentas do software GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 13(3), 141-154.

[2] Araújo, L. V. S., Souza, O. N., & Oliveira, W. P. (2025). *Aproximação geométrica de áreas sob curvas utilizando o GeoGebra: uma proposta envolvendo funções para o Ensino Médio. 45* f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Mato

Grosso do Sul, Corumbá, MS.

[3] Brum, Aline de Lima; Pereira, Eliane Corrêa. (2018). Implicações da investigação matemática no espaço educacional com a inserção das tecnologias digitais. *Revista Eletrônica de Matemática*, Florianópolis, 13(2), 132-148.

[4] Brasil. (2022). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular do Novo Ensino Médio*. Brasília: MEC.

[5] Cordelina, G., & Pavanello, E. (2024). Uma possibilidade de programação no GeoGebra: primeiros passos. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 13(3), 23-41.

[6] Dewey, J. (2023). *Experiência e educação*. Editora Vozes.

[7] Finney, R. L., Weir, M. D., & Giordano, F. R. (2002). Cálculo de George B. Thomas Jr. (v. 1, 10. ed.). São Paulo, SP: *Pearson Addison Wesley*.

[8] Lopes, C. L. M. (2013). *A aprendizagem de perímetros e áreas com GeoGebra: uma experiência de ensino. 97* f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa, Portugal.

[9] Machado, N. J. (2008). *Cálculo diferencial e integral na escola básica: possível e necessário.* São Paulo, SP: Universidade de São Paulo (USP).

[10] Mannan, A.M.K. & Bajuri, M.R. & Abdullah, N.A. & Redzuan, R.S. (2025). Exploring metacognitive processes in calculus problem-solving: A case study using GeoGebra. Journal of Mathematics, *Science and Technology Education, 2(2), 103–115.* https://doi.org/10.12973/jmste.2.2.103

[11] Nascimento, E. G. A. (2012). Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de Geometria: reflexão da prática na escola. In: *Anais da Conferência Latinoamericana de GeoGebra* (s.p.). Uruguai.

[12] Simões, A. C.; Oliveira, R. Z. G. (2016). Usando o GeoGebra no cálculo de área sob gráfico de funções no Ensino Médio. *C.Q.D. Revista Eletrônica Paulista de Matemática.* (v. 7). 14 f. https://doi.org/10.21167/cqdvol7ermac201623169664acsrzgo146159

[13] Skovsmose, O. (2000). Cenários para Investigação. *Bolema*, Rio Claro, 12(14), p. 66-91.

[14] Sousa, K. R. Q. (2014). *Cálculo: uma proposta possível para o ensino médio*. 97 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso, Barra do Garças, MT.

[15] Stewart, J. (2006). *Cálculo* (v. 1, 5. ed.). São Paulo, SP: Thomson Learning.

[16] Zulnaidi, H. & Syed Zamri, S.N.A. (2017). The effectiveness of the GeoGebra software: The intermediary role of procedural knowledge on students' conceptual knowledge and their achievement in mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13(6), 2155–2180*. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01219a

ENVIADO: 02/04/2025

ACEITO: 17/10/2025