https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i2p031-053

GeoGebra como recurso semiótico en la parametrización de sólidos y cálculo de volúmenes con integrales dobles

MARCO ANTONIO AYALA CHAUVIN [1]
https://orcid.org/0000-0002-0084-6773

RICHARD LEONARDO LUNA ROMERO [2]
https://orcid.org/0009-0008-8832-7898

FELIX GABRIEL ORDOÑEZ SANCHEZ [3]
https://orcid.org/0009-0003-0131-6656

JENNIFER VALERIA QUEZADA GUAJALA [4]
https://orcid.org/0009-0007-3718-6485

RESUMEN

El artículo investiga el uso de GeoGebra como recurso semiótico para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos complejos, concretamente la parametrización de sólidos y el cálculo de volúmenes mediante integrales dobles. Adoptando un enfoque cuantitativo y un alcance descriptivo correlacional, se analizó el rendimiento académico de los estudiantes que utilizaron GeoGebra en comparación con un grupo de control. Los resultados mostraron que los estudiantes que utilizaron esta herramienta tecnológica obtuvieron un mejor rendimiento académico y una mayor comprensión conceptual, destacando la importancia de la visualización y la interactividad en el aprendizaje de la matemática.

Palabras-clave: *GeoGebra; Integrales Dobles; Representación Semiótica.*

GeoGebra as a semiotic resource in the parametrization of solids and volume calculation with double integrals

ABSTRACT

The article investigates the use of GeoGebra as a semiotic resource to improve the understanding of complex mathematical concepts, specifically the parameterization of solids and the calculation of volumes by means of double integrals. Adopting a quantitative approach and a descriptive correlational scope, the academic performance of students who used GeoGebra was analyzed in comparison with a control group. The results showed that students who used this technological tool obtained better academic performance and greater conceptual understanding, highlighting the importance of visualization and interactivity in the learning of mathematics.

Keywords: *Double Integrals; GeoGebra; Semiotic Representation.*

O GeoGebra como um recurso semiótico na parametrização de sólidos e no cálculo de volumes com integrais duplas

RESUMO

O artigo investiga a utilização do GeoGebra como recurso semiótico para melhorar a compreensão de conceitos matemáticos complexos, nomeadamente a parametrização de sólidos e o cálculo de volumes através de integrais duplas. Adoptando uma abordagem quantitativa e um âmbito correlacional descritivo, foi analisado o desempenho académico

[1] Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL), Loja, Ecuador. Correo electrónico: maayala5@utpl.edu.ec
[2] Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL), Loja, Ecuador. Correo electrónico: rlluna@utpl.edu.ec
[3] Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL), Loja, Ecuador. Correo electrónico: fgordonez2@utpl.edu.ec
[4] Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL). Loja, Ecuador. Correo electrónico: jvquezada4@utpl.edu.ec

dos alunos que utilizaram o GeoGebra comparando o mesmo com quele de um grupo de controle. Os resultados mostraram que os alunos que utilizaram essta ferramenta tecnológica obtiveram um melhor desempenho académico e uma maior compreensão conceitual, evidenciando a importância da visualização e da interatividade na aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: *GeoGebra; Integrais Duplas; Representação Semiótica.*

Introducción

El análisis matemático multivariado desempeña un papel esencial en la formación de estudiantes de ciencias e ingeniería debido a su relevancia en la resolución de problemas complejos. Sin embargo, la comprensión de conceptos como la parametrización y el cálculo de volúmenes mediante integrales dobles presenta dificultades significativas para los estudiantes. Estas dificultades están asociadas principalmente a la transición entre representaciones algebraicas y gráficas, como señalan González (2020) y Urrutia et al. (2024), quienes destacan que el enfoque procedimental y la dependencia de un único registro, generalmente el algebraico, limitan la comprensión profunda de estos temas.

En este contexto, la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas (TRSR) de Duval (1995) proporciona un marco teórico para abordar estas dificultades. La capacidad de realizar conversiones entre registros algebraicos, gráficos y numéricos es fundamental para el entendimiento de las integrales dobles y su aplicación en la resolución de problemas prácticos. Prieto y Vásquez (2024) subrayan la importancia de emplear estos registros de manera natural, comprensible y práctica, para facilitar el aprendizaje significativo.

Para mejorar la comprensión conceptual de los estudiantes, es útil el desarrollo de una estrategia didáctica en la que se utilice GeoGebra, que es un *software* matemático de descarga gratuita, que proporciona un método innovador, atractivo y eficaz para que los estudiantes logren una adecuada comprensión de los conceptos relacionados a la parametrización y el cálculo de volúmenes con integrales dobles, facilitando de esta manera la visualización de conceptos tridimensionales y la interacción entre representaciones algebraicas y gráficas. Es por esto que Quintana et al. (2022) recomiendan que tanto educadores como estudiantes deben prepararse en el uso de estas herramientas para optimizar la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos abstractos.

El presente estudio tiene como objetivo diseñar, implementar y evaluar el uso de *applets* interactivos creados con GeoGebra que permitan a los estudiantes explorar y comprender de manera práctica y visual la parametrización de sólidos y el cálculo de volúmenes. Estos recursos buscan no solo facilitar el aprendizaje de las integrales dobles, sino también fomentar habilidades cognitivas necesarias para una transición efectiva entre diversos registros semióticos, lo que a su vez ayuda a mejorar la educación en matemáticas e ingeniería.

1. Revisión de la literatura

En esta sección se destaca la importancia de esta investigación a través de una revisión de trabajos existentes que contextualizan el estudio en el ámbito académico. Se examinan tres aspectos fundamentales: el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, centrándose en el tema de las integrales dobles; el uso de GeoGebra como herramienta dinámica que facilita el aprendizaje de estos conceptos; y la manera en que esta herramienta contribuye a la transición entre el registro algebraico y el gráfico. Este análisis se enmarca dentro de la TRSR, que ofrece una perspectiva esencial para comprender los procesos cognitivos implicados en la representación y conversión de conceptos matemáticos.

Bajo este enfoque, el acelerado avance tecnológico y su integración en el ámbito educativo han dado lugar a una variedad de investigaciones que exploran el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza del cálculo. Barradas (2021), sostiene que los recursos digitales utilizados como complemento en la enseñanza del cálculo han demostrado ser sumamente ventajosos para los docentes y estudiantes, contribuyendo a una mejora en el rendimiento académico. En este contexto, herramientas como GeoGebra destacan por su capacidad para complementar los métodos tradicionales de resolución, favoreciendo una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos (Fernández, 2024), en concreto, en el rendimiento de un curso de Cálculo II, Zamora et al. (2020) señalan que dichas diferencias se acentúan entre más intensivo es el uso de las TICs, sin embargo, también señalan que el tamaño del efecto al comparar ambas metodologías es relativamente pequeño, lo que subraya la necesidad de continuar investigando sobre la efectividad del *software* en la enseñanza de las matemáticas.

La parametrización de sólidos y el cálculo de volúmenes mediante integrales dobles son fundamentales en los cursos avanzados de cálculo multivariable. Estas habilidades requieren intuición espacial para visualizar regiones tridimensionales, habilidades analíticas para manipular expresiones y precisión en la formulación de problemas, incluyendo límites, regiones de integración y funciones de varias variables. Según Aguerrea et al. (2022), las deficiencias matemáticas de los estudiantes suelen originarse en niveles educativos previos que perduran en la educación superior, destacando errores procedimentales y conceptuales recurrentes.

Es fundamental implementar métodos pedagógicos innovadores que respondan a los desafíos actuales y faciliten la enseñanza de temas complejos. Hoyos et al. (2021) destacan que el uso de *software* educativo en geometría analítica tridimensional no solo complementa la labor docente, sino que también incrementa la motivación de los estudiantes, optimizando la resolución de problemas en menor tiempo. Esta área, estrechamente vinculada al cálculo multivariado y por ende a las integrales dobles, proporciona la base conceptual necesaria para trabajar en el espacio tridimensional. Según Herrera y Guzmán (2021), el desarrollo de habilidades espaciales es crucial para el rendimiento en cálculo multivariable, aunque a menudo se asume que los estudiantes ya las poseen, lo que no siempre es el caso. Por ello, investigar y aplicar metodologías efectivas es clave para mejorar el desempeño en asignaturas de alta exigencia.

Esta investigación se centra en cómo el uso de software dinámico puede facilitar y enriquecer la enseñanza y el aprendizaje de conceptos avanzados de cálculo, como la parametrización de sólidos y el cálculo de volúmenes a través de integrales dobles. Estudios recientes muestran que las principales dificultades a las que se enfrentan los estudiantes son tanto cognitivas como afectivas, abarcando aspectos como la falta de comprensión teórica y la desmotivación. Estas limitaciones dificultan la visualización e interpretación de superficies tridimensionales y regiones de integración. Quintana y Mejía (2022), destacan la necesidad de abordar las limitaciones en la representación y comunicación matemática, especialmente en lo que respecta a la manipulación y conversión entre diferentes sistemas de representación, un desafío esencial para la resolución de problemas en cálculo. Por otra parte, en el ámbito del cálculo de volúmenes, Teófilo de Sousa et al. (2021) señalan que una de las mayores complicaciones radica en la representación gráfica de las superficies y en la selección de métodos apropiados para calcular su volumen, especialmente cuando se trata de figuras no convencionales.

Debido a esto, la TRSR surge como una respuesta, ya que sostiene que el aprendizaje matemático no se produce directamente sobre los objetos matemáticos en sí, sino a través de los registros semióticos que los representa, como los símbolos, gráficos, diagramas, entre otros. Duval plantea que existen dos procesos fundamentales para comprender un concepto matemático: el tratamiento, que consiste en operar dentro de un mismo registro de representación, y la conversión, qué implica convertir un objeto matemático de un registro de representación a otro.

Tecnologías como GeoGebra, en el contexto de la TRSR, se posicionan como herramientas valiosas que no solo ayudan a superar dificultades cognitivas, sino que también estimulan el aprendizaje al promover una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos, debido a que este *software* ofrece una vista gráfica vinculada con la hoja de cálculo simbólico, permitiendo que cualquier manipulación en una se refleje automáticamente en la otra y viceversa. Esta característica favorece la transición entre los registros algebraico y gráfico, lo cual representa un desafío frecuente en la enseñanza de matemáticas básica y avanzadas.

De esta manera, una estrategia didáctica basada en la TRSR y en el uso de GeoGebra fomentará el razonamiento matemático en los estudiantes, permitiendo mejorar su capacidad para comunicar sus respuestas con claridad y precisión; ya que la TRSR potencia la comprensión al permitir la articulación entre distintos registros semióticos, tanto de forma algebraica como gráfica.

2. Metodología

Esta investigación adoptó un enfoque cuantitativo, ya que es el más apropiado para examinar fenómenos representados en datos numéricos. Este enfoque facilita una medición precisa, la identificación de patrones y tendencias, la predicción de resultados, la determinación del grado de relación entre dos variables de estudio y la generalización de hallazgos a una población a partir de un grupo determinado (Pandey et al., 2023).

El estudio tuvo un alcance descriptivo correlacional, fue descriptivo porque se describió el estado de las variables identificadas, proporcionando información estructurada sobre el fenómeno a estudiar y fue correlacional, porque se estableció e interpretó la relación entre ambas a través del análisis de datos estadísticos (Barroga et al., 2023). Las variables identificadas fueron el uso de GeoGebra que será la variable independiente y la comprensión de los conceptos matemáticos asociados con la parametrización de sólidos y cálculo de volúmenes mediante integrales dobles, que se medirá a través del aprendizaje alcanzando por los estudiantes, siendo esta la variable dependiente

El diseño de la investigación fue cuasiexperimental, ya que se realizó una comparación de resultados entre dos grupos de estudio. Sin embargo, la asignación de los participantes a cada intervención no se llevó a cabo de manera aleatoria, sino que fue determinada previamente por la Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador (UTPL) (Andrade, 2021).

La muestra estuvo compuesta por estudiantes de Ingeniería Civil del segundo semestre de la asignatura Análisis Matemático Multivariado en el período octubre 2023-febrero 2024. De una población total de 160 estudiantes matriculados en la asignatura anteriormente mencionada, se trabajó con dos grupos de 40 estudiantes cada uno. Un grupo se asignó como experimental y el otro como grupo control. Se utilizó un muestreo no probabilístico intencional por conveniencia, debido a que la elección de los participantes no fue de forma aleatoria. Este muestreo fue elegido debido a su eficiencia en términos de ahorro de tiempo y recursos, aspectos fundamentales para este estudio (Rahman, 2023).

La pregunta de investigación que buscó responder este estudio fue la siguiente: ¿El uso de GeoGebra para la parametrización de sólidos y cálculo de volúmenes con integrales dobles, mejora la comprensión y por tanto el rendimiento académico de los estudiantes de análisis matemático multivariado de la carrera de Ingeniería Civil?

Para llevar a cabo este estudio, todas las actividades se realizaron al cabo de seis semanas. La semana 1 se dedicó a la enseñanza de los conceptos previos relacionados al tema de parametrizaciones de curvas, superficies y al cálculo de áreas de regiones tipo I y II empleando integrales dobles; una región tipo I se refiere a una región de la forma $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$ y una región tipo II se refiere a una región de la forma $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \ \wedge h(y) \leq x \leq g(y)\}$. En la semana 2, los estudiantes recibieron el pre test relacionado con los conceptos de la semana 1, que fue el punto de partida para la elaboración de una estrategia didáctica que se impartirá en las semanas siguientes. Las semanas 3 y 4 se centraron en actividades de GeoGebra relacionadas con los temas de parametrizaciones de curvas y superficies que componen un sólido, seguidas de talleres de apropiación. La semana 5 se centró en la enseñanza del cálculo de volúmenes por medio de integrales dobles empleando GeoGebra. Finalmente, en la semana 6 se realizó un post test para analizar el impacto del uso de GeoGebra en la enseñanza de estos conceptos.

2.1. Pre Test

Con el propósito de conocer cómo el uso de GeoGebra puede mejorar la visualización y la comprensión de los estudiantes sobre la parametrización de sólidos y el cálculo de su volumen mediante integrales dobles, se aplicó un pre test durante una sesión de clases de dos horas. Dado que habían asistido a clases sobre parametrizaciones de curvas y superficies, así como a clases sobre áreas de regiones tipo I y II con integrales dobles, el pre test fue diseñado para sondear la comprensión de estos conceptos por parte de los estudiantes, centrándose en su visualización gráfica y la conversión de registros.

La primera pregunta del pre test fue “Reconocer, dibujar y parametrizar las curvas que delimitan la región ya sea de tipo I o II acotada por las gráficas $y - x^2 = 0; x = y$”. La pregunta dos, “Parametrizar la superficie de la región propuesta en la pregunta uno”. Finalmente, la pregunta tres, “Calcular el área de la región propuesta a través de integrales dobles”

2.2. Intervención con GeoGebra

La representación de regiones en 2D y figuras 3D es un desafío común para los estudiantes cuando aprenden integrales dobles (Khemane et al., 2022). Para abordar esta dificultad, se incorporó o usó el *software* GeoGebra en la enseñanza de la parametrización de curvas y superficies que conforman un sólido, así como el cálculo de su volumen mediante integrales dobles.

Además de las clases regulares, los estudiantes dedicaron una semana a actividades con GeoGebra diseñadas para reforzar sus habilidades de visualización y dibujo. En general, cada jornada consistía en una clase de 45 minutos seguida de una tutoría de una hora, en la que se reforzaban los conceptos aprendidos mediante talleres de apropiación con preguntas relacionadas al tema tratado. A partir de la segunda semana, estas tutorías se centraron en actividades específicas con GeoGebra.

Las actividades incluyeron la representación de planos y superficies cuadráticas, como paraboloides y esferas, así como la determinación de intersecciones entre estas superficies. Además, los estudiantes compararon las superficies dibujadas a mano con las generadas en GeoGebra y reflexionaron sobre las diferencias entre sus representaciones, realizando ajustes a sus gráficos elaborados en papel y lápiz. Las diversas herramientas del *software* les permitieron explorar distintas formas de visualizar las superficies una vez ingresada su representación algebraica.

A continuación, se detalla el uso de GeoGebra en el proceso de parametrización de sólidos y al cálculo de su volumen.

Parametrización de las curvas de un sólido sobre una región tipo I

El análisis del sólido $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b \ \wedge g(x) \leq y \leq f(x) \wedge 0 \leq z \leq F(x, y)\}$ se inició con la parametrización de las curvas que lo delimitan, tal como se muestra en la figura 1. Para facilitar su identificación, se asignaron nombres específicos a cada una de estas curvas. En particular, se identificaron primero las curvas que definen la región de tipo I: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$, correspondiente a la superficie inferior, como se observa en la figura 2.

Figura 1: Representación gráfica de un sólido sobre una región tipo I

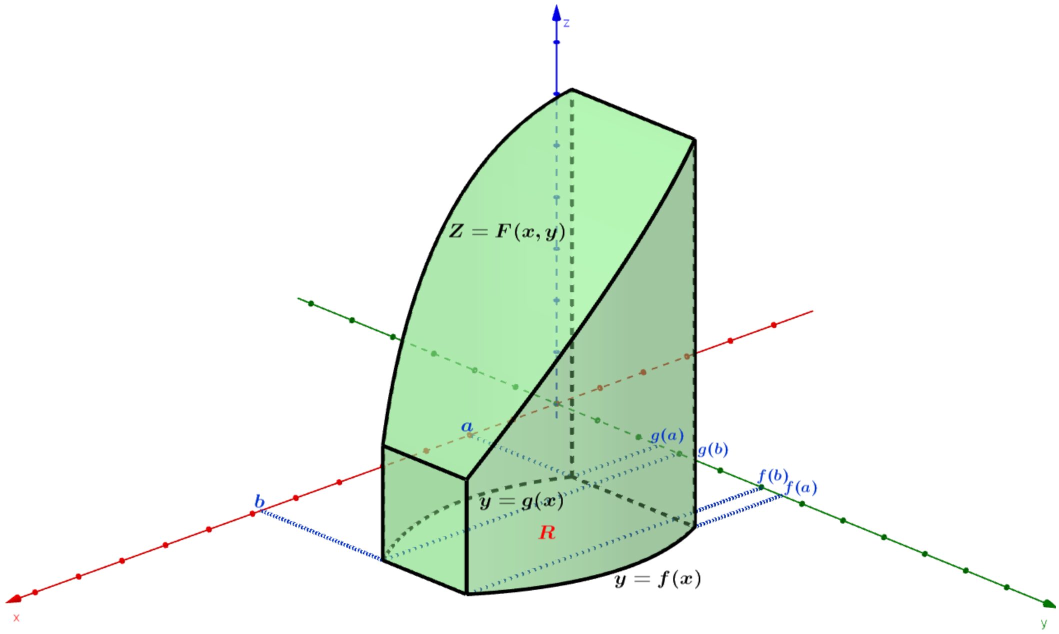
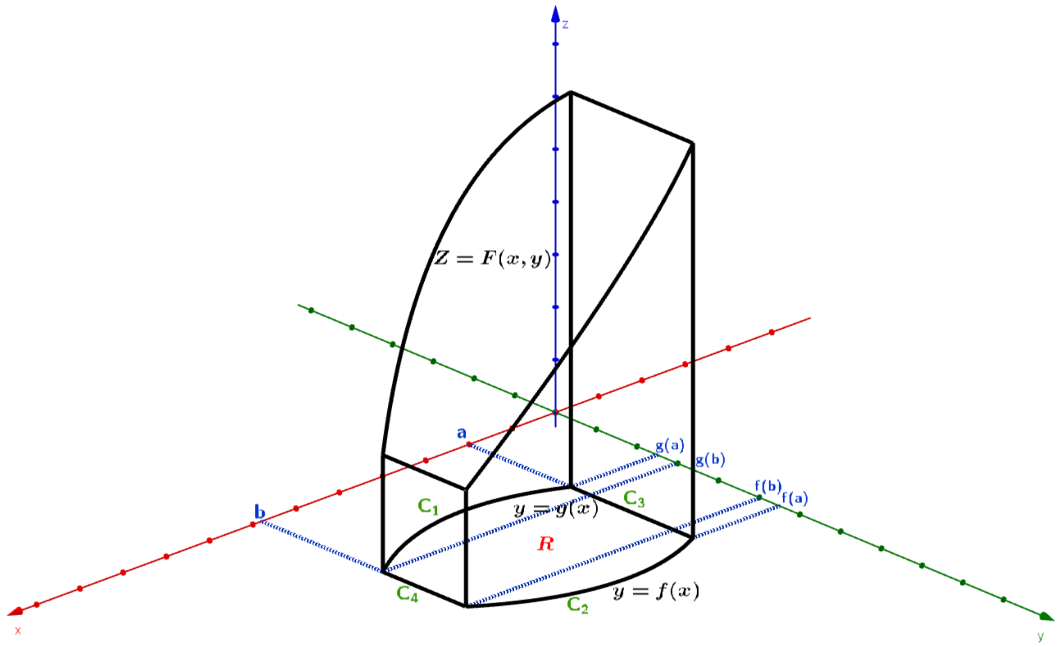


Figura 2: Representación gráfica de las curvas que delimitan a la superficie inferior



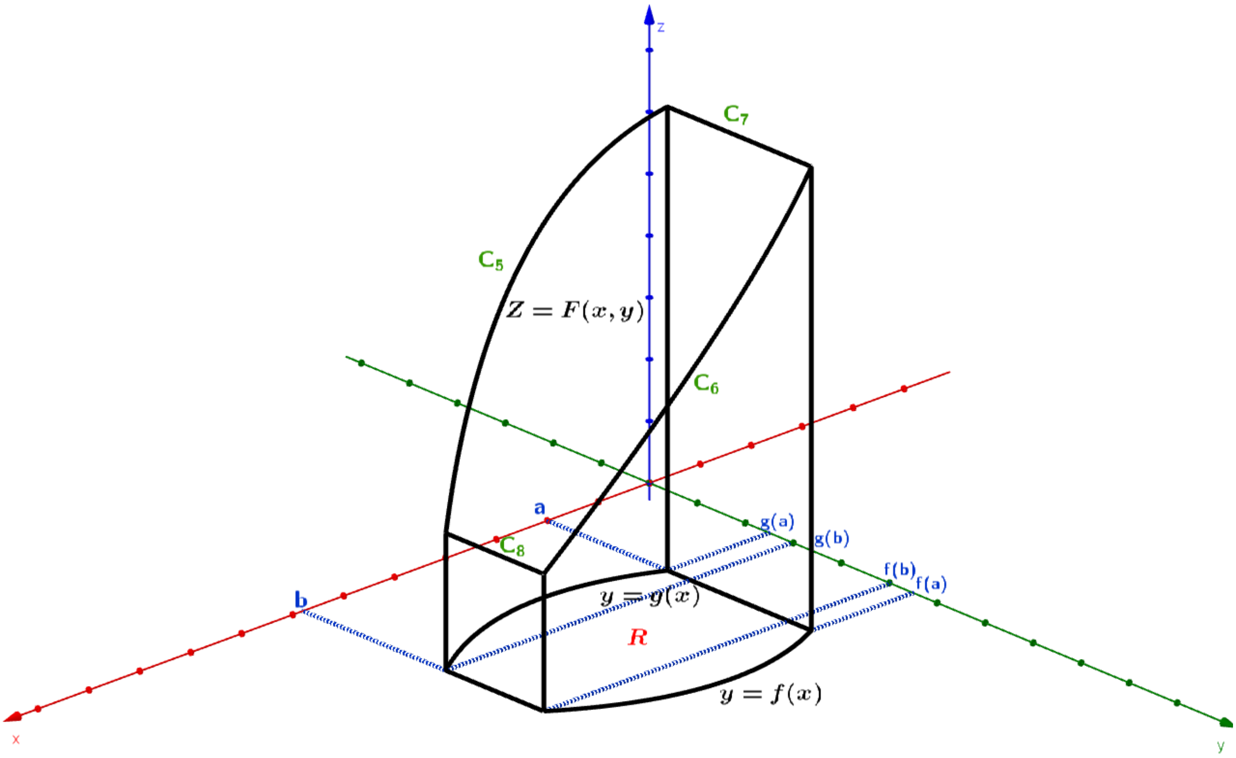
Esto permitió al estudiante, junto con el docente, hacer la transición del registro gráfico, representado por las curvas que delimitan la superficie inferior, al registro algebraico, como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1: Registro algebraico de las curvas que delimitan a la superficie inferior

Curvas que delimitan el sólido	**Representación algebraica**
Curva $\mathbf{C_1}$	$C_1 = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}, \quad a \le t \le b$
Curva $\mathbf{C_2}$	$C_2 = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}, \quad a \le t \le b$
Curva $\mathbf{C_3}$	$C_3 = \begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases}, \quad g(a) \le t \le f(a)$
Curva $\mathbf{C_4}$	$C_4 = \begin{cases} x(t) = b \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases}, \quad g(b) \le t \le f(b)$

Luego, se parametrizaron las curvas mostradas en la figura 3, que delimitan a la superficie superior.

Figura 3: Representación gráfica de las curvas que delimitan a la superficie superior



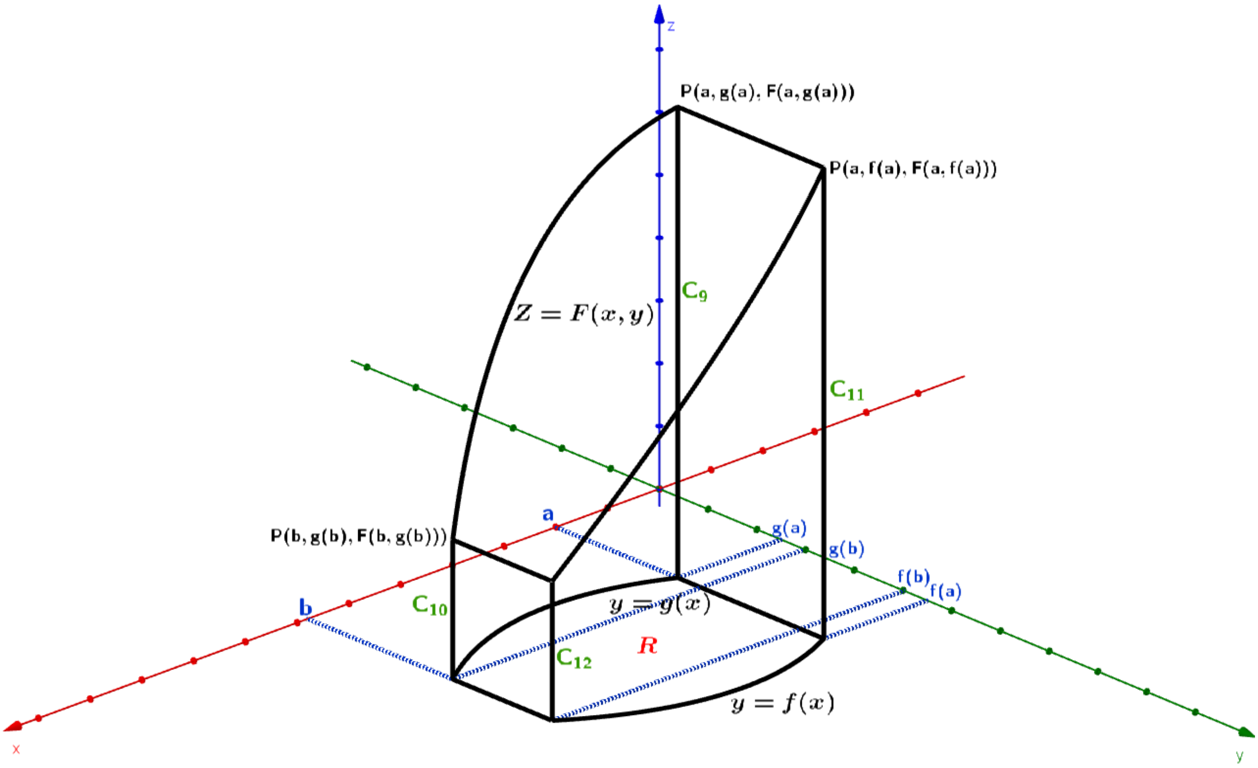
La representación algebraica de las curvas de la figura 3 se muestra en la tabla 2.

Tabla 2: Registro Algebraico de las curvas que delimitan a la superficie superior

Curvas que delimitan el sólido	**Representación algebraica**
Curva C_5	$C_5 = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = g(t) \\ z(t) = F(t, g(t)) \end{cases} \quad , \quad a \leq t \leq b$
Curva C_6	$C_6 = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \\ z(t) = F(t, f(t)) \end{cases} \quad , \quad a \leq t \leq b$
Curva C_7	$C_7 = \begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = t \\ z(t) = F(a, t) \end{cases} \quad , \quad g(a) \leq t \leq f(a)$
Curva C_8	$C_8 = \begin{cases} x(t) = b \\ y(t) = t \\ z(t) = F(b, t) \end{cases} \quad , \quad g(b) \leq t \leq f(b)$

Después, se parametrizaron las rectas verticales mostradas en la figura 4, que delimitan las paredes del sólido.

Figura 4: Representación gráfica de las rectas verticales



La representación algebraica de las curvas señaladas en la figura 4 se muestran en la tabla 3.

Tabla 3: Parametrizaciones de las rectas verticales

Curvas que delimitan el sólido	**Representación algebraica**

Curva $\boldsymbol{C_9}$	$\boldsymbol{C_9 = \begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = g(a) \ , \qquad 0 \le t \le F(a, g(a)) \\ z(t) = t \end{cases}}$
Curva $\boldsymbol{C_{10}}$	$\boldsymbol{C_{10} = \begin{cases} x(t) = b \\ y(t) = g(b) \ , \qquad 0 \le t \le F(b, g(b)) \\ z(t) = t \end{cases}}$
Curva $\boldsymbol{C_{11}}$	$\boldsymbol{C_{11} = \begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = f(a) \ , \qquad 0 \le t \le F(a, f(a)) \\ z(t) = t \end{cases}}$
Curva $\boldsymbol{C_{12}}$	$\boldsymbol{C_{11} = \begin{cases} x(t) = b \\ y(t) = f(b) \ , \qquad 0 \le t \le F(b, f(b)) \\ z(t) = t \end{cases}}$

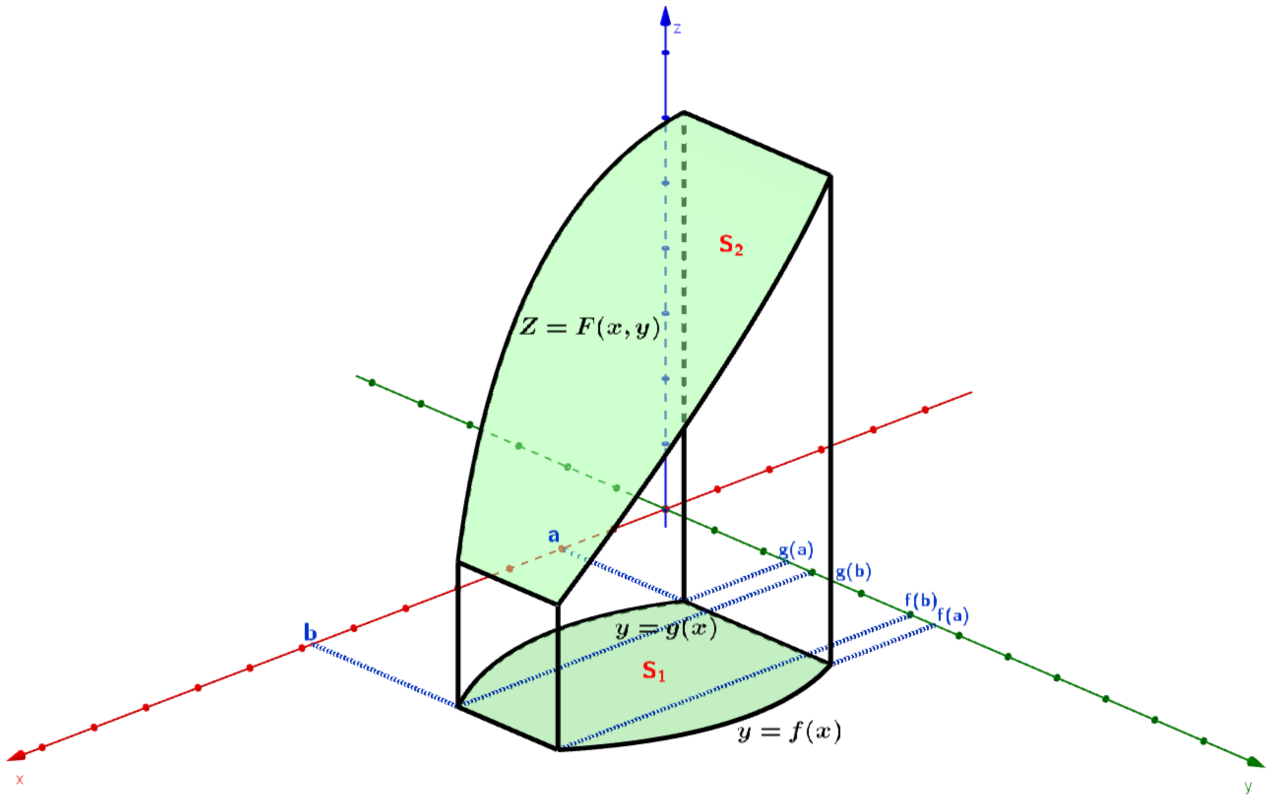
Para ingresar estas curvas en el *software* GeoGebra, se utilizó el comando:

Curve(<Expression>, <Expression>, <Expression>, <Parameter Variable>, <Start Value>, <End Value>).

Parametrización de las superficies de un sólido sobre una región tipo I

Luego, se procedió a parametrizar las superficies que forman el sólido. En la figura 5, se observan a las superficies S_1 y S_2, correspondientes a la parte inferior formada por la región tipo I: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \ \wedge g(x) \le y \le f(x)\}$ y a la parte superior definida por la función $z = F(x, y)$ en la región tipo I, respectivamente.

Figura 5: Representación gráfica de las Superficies S_1 y S_2



Las representaciones algebraicas de estas superficies se detallan en la tabla 4.

Tabla 4: Registro algebraico de las superficies S_1 y S_2 que componen al sólido

Superficies que delimitan el sólido	**Representación algebraica**
Superficie $\boldsymbol{S_1}$	$\boldsymbol{S_1} = \begin{cases} \boldsymbol{x(t,s) = t} \\ \boldsymbol{y(t,s) = g(t) + s(f(t) - g(t))} \\ \boldsymbol{z(t,s) = 0} \end{cases}, \quad \boldsymbol{a \le t \le b \wedge 0 \le s \le 1}$
Superficie $\boldsymbol{S_2}$	$\boldsymbol{S_2} = \begin{cases} \boldsymbol{x(t,s) = t} \\ \boldsymbol{y(t,s) = g(t) + s\big(f(t) - g(t)\big)} \\ \boldsymbol{z(t,s) = F(t, g(t) + s(f(t) - g(t)))} \end{cases}, \quad \boldsymbol{a \le t \le b \wedge 0 \le s \le 1}$

Después, se parametrizaron las superficies S_3 y S_4 mostradas en la figura 6. Estas curvas parametrizadas se muestran en la tabla 5.

Figura 6: Representación gráfica de las Superficies S_4 y S_5

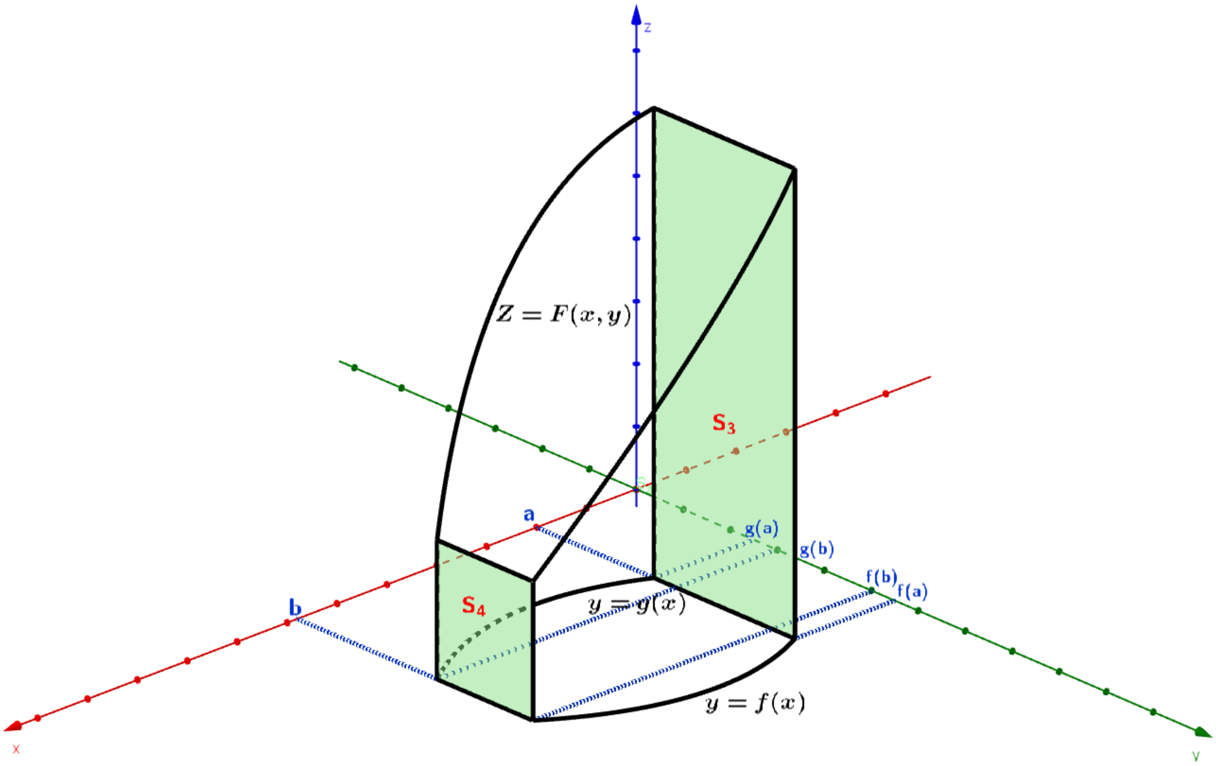


Tabla 5: Registro Algebraico de las superficies S_4 y S_5 que componen al sólido

Superficies que delimitan el sólido	**Representación algebraica**
Superficie $\boldsymbol{S_4}$	$\boldsymbol{S_4} = \begin{cases} \boldsymbol{x(t,s) = a} \\ \boldsymbol{y(t,s) = t} \\ \boldsymbol{z(t,s) = sF(a,t)} \end{cases}, \boldsymbol{g(a) \le t \le f(a) \wedge 0 \le s \le 1}$
Superficie $\boldsymbol{S_5}$	$\boldsymbol{S_5} = \begin{cases} \boldsymbol{x(t,s) = b} \\ \boldsymbol{y(t,s) = t} \\ \boldsymbol{z(t,s) = sF(b,t)} \end{cases}, \boldsymbol{g(b) \le t \le f(b) \wedge 0 \le s \le 1}$

Por último, se parametrizaron las superficies mostradas en la figura 7. La representación algebraica de estas superficies se muestra en la tabla 6.

Figura 7: Representación gráfica de las Superficies S_5 y S_6

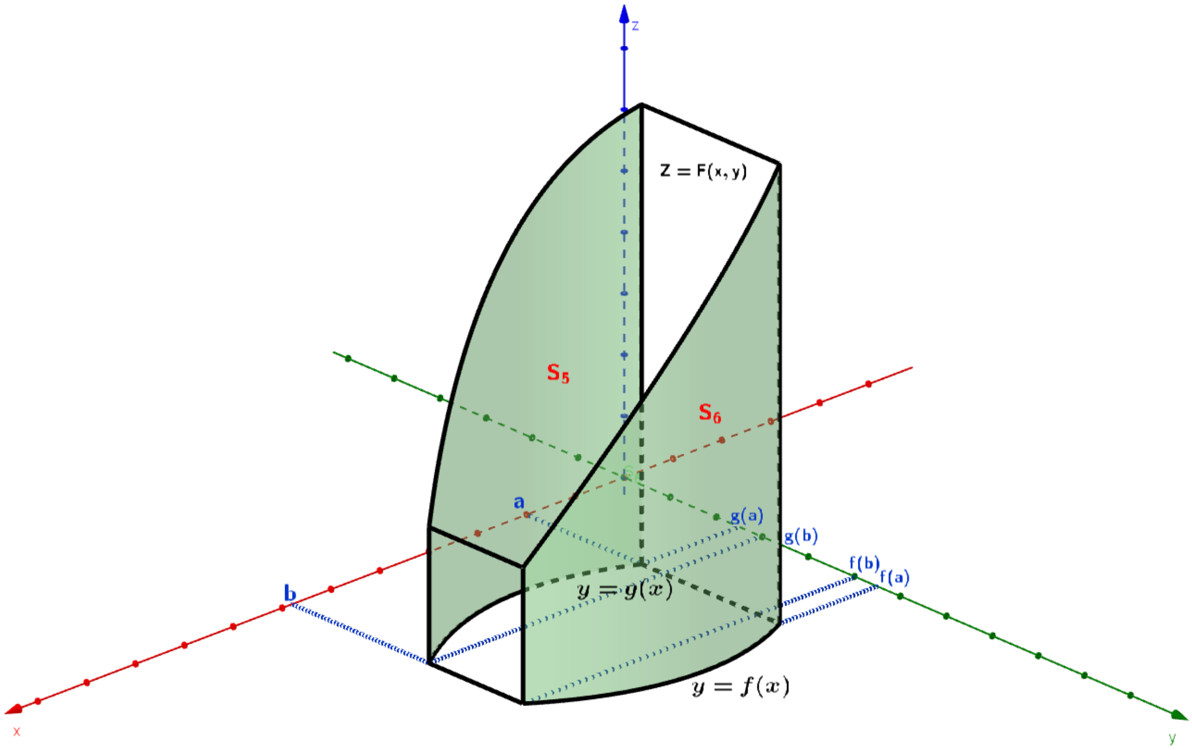


Tabla 6: Registro Algebraico de las superficies S_5 y S_6 que componen al sólido

Superficies que delimitan el sólido	Representación algebraica
Superficie S_5	$S_5 = \begin{cases} x(t,s) = t \\ y(t,s) = g(t) \\ z(t,s) = sF(t,g(t)) \end{cases}, a \le t \le b \wedge 0 \le s \le 1$
Superficie S_6	$S_6 = \begin{cases} x(t,s) = t \\ y(t,s) = f(t) \\ z(t,s) = sF(t,f(t)) \end{cases}, a \le t \le b \wedge 0 \le s \le 1$

Para ingresar las superficies al *software* GeoGebra, se utilizó el comando:

Surface(<Expression>,<Expression>,<Expression>,<Parameter Variable 1>, <Start Value>, <End Value>,<Parameter Variable 2>,<Start Value>,<End Value>)

Cálculo del volumen del sólido sobre una región tipo I a través de Integrales Dobles

Una vez parametrizado todo el sólido, se procedió a calcular su volumen a través de una integral doble. Para ello, se utilizó el siguiente comando desde la hoja de cálculo simbólico (CAS):

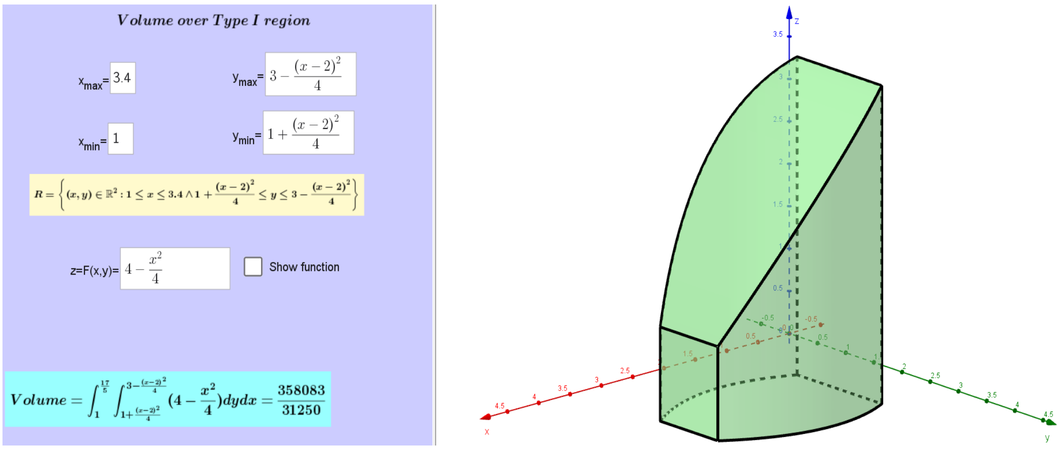
Integral(<Function>, <Variable>, <Start x-Value>, <End x-Value>)

Sin embargo, como se trata de una integral doble, se utilizó el mismo comando dos veces, como se muestra a continuación:

Integral(Integral(F(x,y),y,g,f), x,a,b)

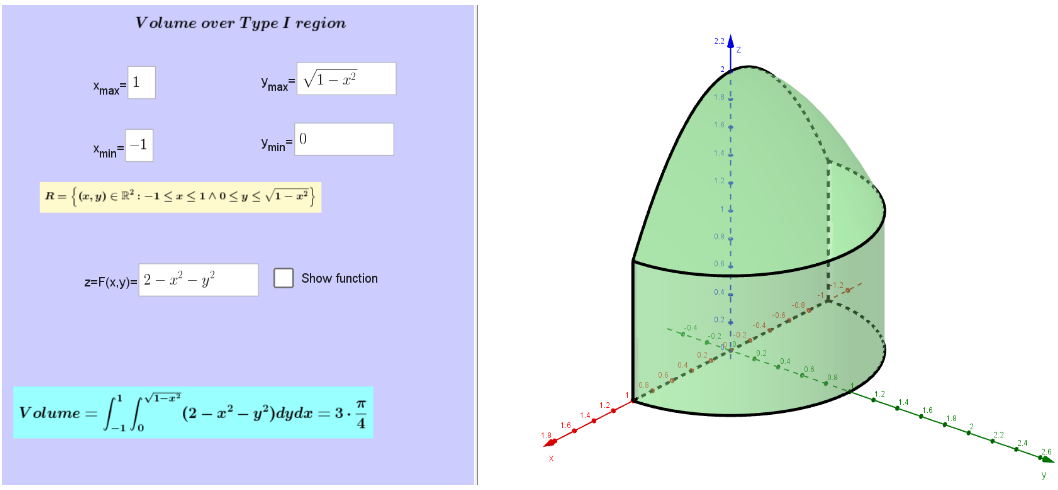
De esta manera, se construyó un applet en el que se puede ingresar la función de dos variables y la región sobre la que se quiere calcular su volumen. El applet desarrollado se muestra en la figura 8 y está disponible en el enlace: https://www.geogebra.org/m/bywhcqss

Figura 8: Applet elaborado en GeoGebra del sólido sobre una región tipo I



Por ejemplo, al calcular el volumen del sólido $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \wedge 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$, el estudiante una vez realizado el ejercicio en papel y lápiz, ingresa el valor de la función de dos variables y de la región tipo I en el applet. Esto da como resultado el valor de su volumen, así como la gráfica, que se observa en la figura 9.

Figura 9: Representación gráfica y algebraica de la integral doble en el applet del sólido tipo I

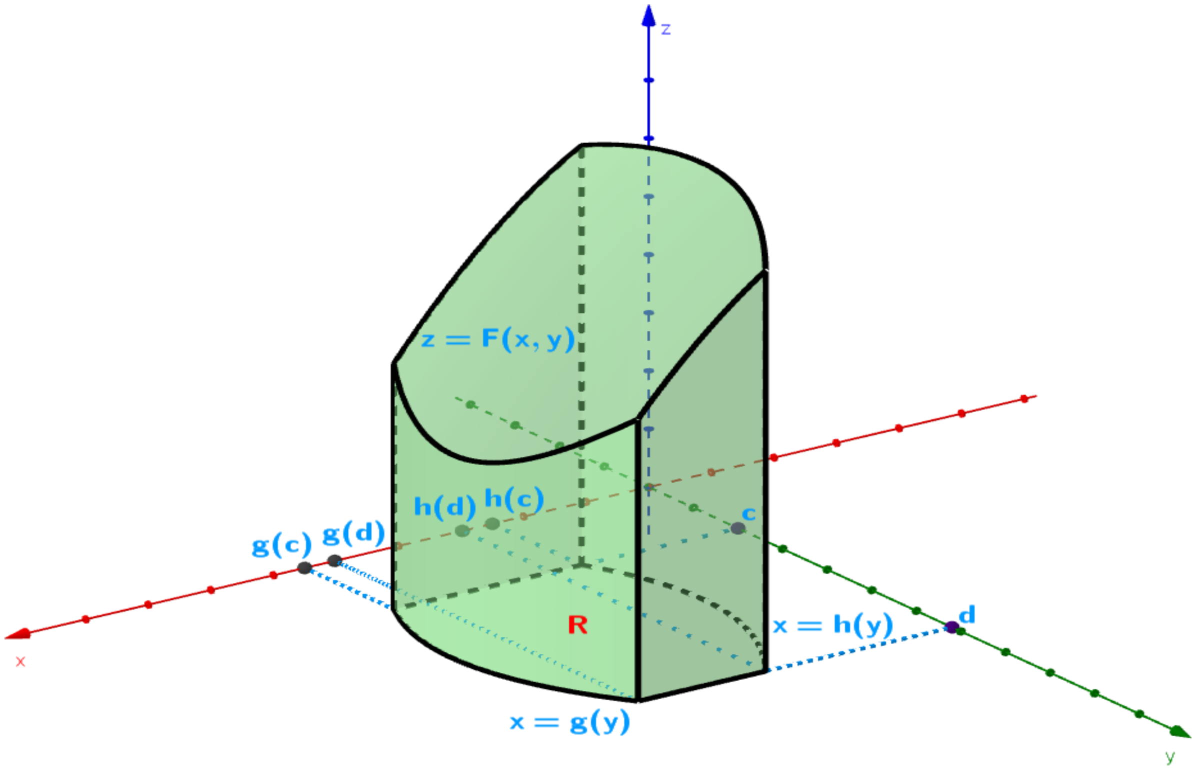


Parametrización de un sólido sobre una región tipo II

La parametrización de un sólido sobre una región de tipo II de la forma $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d \ \wedge h(y) \leq x \leq g(y) \wedge 0 \leq z \leq F(x, y)\}$, es similar a la de un sólido sobre una región tipo de I. La diferencia es que la región tipo II se define como $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \ \wedge h(y) \leq x \leq g(y)\}$, Este tipo de sólido se muestra en la figura 10 y el *applet* elaborado con los estudiantes se muestra en el siguiente enlace:

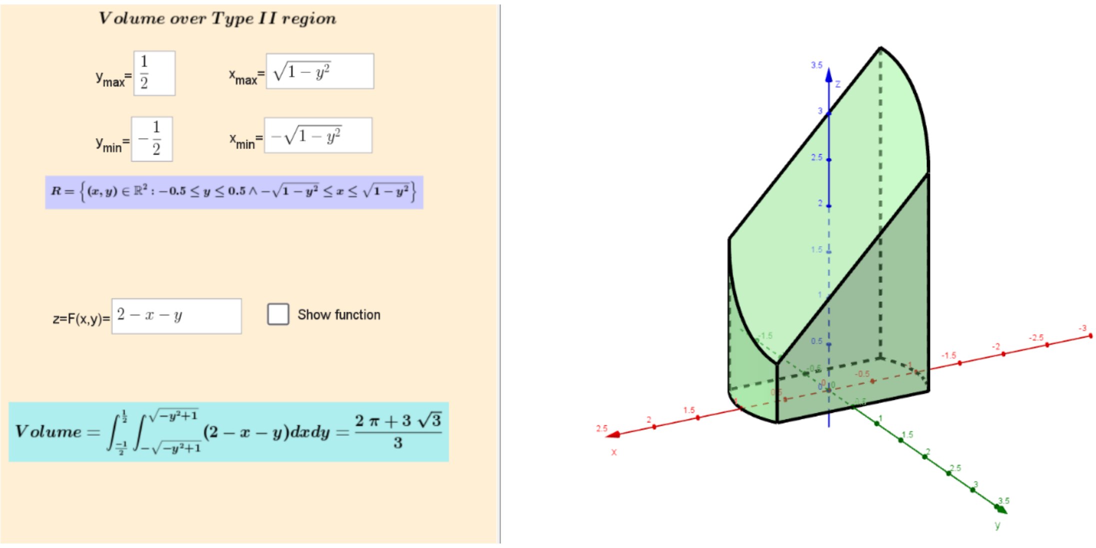
https://www.geogebra.org/m/ycpm2ytv

Figura 10: Sólido sobre una región tipo II



Por ejemplo, en el cálculo del volumen del sólido $Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \wedge -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \wedge 0 \leq z \leq 2 - x - y\right\}$, el estudiante una vez elaborado el ejercicio en papel y lápiz, introdujo en el *applet* el valor de la función de dos variables y de la región tipo II. Esto dio como resultado el valor de su volumen, así como la gráfica, que se observa en la figura 11.

Figura 11: Representación gráfica y algebraica de la integral doble en el applet del sólido tipo II



2.3. Post Test

El post test consistió en una pregunta valorada con 10 puntos, en la que los estudiantes debían representar gráficamente el sólido definido por la integral $\iint \left(3 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right) dA$ sobre la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge x^2 \leq y \leq 2x\}$. Además, dentro de la pregunta se les pedía parametrizar las curvas y superficies que componen el sólido, así como el cálculo del volumen. La evaluación estuvo diseñada para que el estudiante lo resolviera mediante un sólido sobre una región tipo I o tipo II.

Los resultados del pre test y post test se analizaron mediante estadística descriptiva. Para evaluar la incidencia del uso de GeoGebra, se aplicó estadística inferencial a los resultados del post test utilizando la prueba paramétrica de t de Student. Luego, se examinaron diversas reflexiones de los estudiantes sobre el uso de GeoGebra en sus clases.

En la siguiente sección se presentan los resultados obtenidos, así como los hallazgos encontrados de las pruebas y de las reflexiones de los estudiantes. Asimismo, se destaca la importancia de herramientas tecnológicas de visualización dinámica como GeoGebra en la comprensión y resolución de problemas relacionados con las integrales dobles.

3. Resultados

En este capítulo se presentarán los resultados del pre test y post test, los talleres realizados por los estudiantes y sus percepciones sobre el uso del *software* GeoGebra en el aprendizaje de parametrización de curvas, superficies y de las integrales dobles para el cálculo de volúmenes.

Tabla 7: Estadística descriptiva de los resultados de la evaluación

	Media	Mediana	Moda	Desv. Est.
Pre Test Grupo Control	**6,91**	**7,00**	**7,00**	**1,70**
Pre Test Grupo Experimental	**7,05**	**7,00**	**7,50**	**1,42**
Post Test Grupo Control	**7,65**	**7,89**	**8,08**	**1,36**
Post Test Grupo Experimental	**8,73**	**8,74**	**10,00**	**0,88**

Como se muestra en la tabla 7, las calificaciones obtenidas indican que la intervención aplicada al grupo experimental, en el que se aplicó el software GeoGebra, ha tenido un impacto positivo en el rendimiento académico de los estudiantes. En el pre test, el grupo experimental obtuvo una media más alta que el grupo de control y una distribución más baja de las calificaciones. Tras la intervención, el grupo experimental aumentó significativamente su media a 8,73, frente al 7,65 del grupo de control. Estos resultados indican que la intervención no solo mejoró el rendimiento promedio, sino que también redujo la variabilidad en las puntuaciones del grupo experimental.

3.1. Resultados del Pre Test

Tabla 8: Resultados del Pre Test

Pregunta	Puntos Totales	Grupo Control					Grupo Experimental				
		4,00	3,00	2,00	1,00	0,00	4,00	3,00	2,00	1,00	0,00
Reconocer, dibujar y parametrizar las curvas que delimitan la región ya de sea tipo I o II	**4**	**30,0%**	**50,0%**	**20,0%**	**0,0%**	**0,0%**	**25,0%**	**60,0%**	**15,0%**	**0,0%**	**0,0%**
Parametrizar la superficie de la región	**2**			**60,0%**	**40,0%**	**0,0%**			**87,5%**	**7,5%**	**5,0%**
Calcular el área de la región a través de integrales dobles	**4**	**7,5%**	**32,5%**	**42,5%**	**15,0%**	**2,5%**	**7,5%**	**35,0%**	**37,5%**	**15,0%**	**5,0%**

La tabla 8 muestra que el 30% de los estudiantes en el pre test del grupo de control fueron capaces de identificar y dibujar correctamente las curvas, cerca del 25% de los estudiantes del grupo experimental. La conversión de un registro grafico a uno algebraico se comprobó más a fondo en la pregunta número 2, donde tuvieron problemas algunos de los estudiantes, ya que el 60% de los estudiantes fueron capaces de escribir la región parametrizada de la gráfica en el grupo de control y en el experimental el 87,5% de los estudiantes respondieron esta pregunta de forma correcta. Esto indica que el 40% de los estudiantes tienen más dificultades en la conversión de un registro grafico a un algebraico en el grupo control, frente a un 12,5% del grupo experimental.

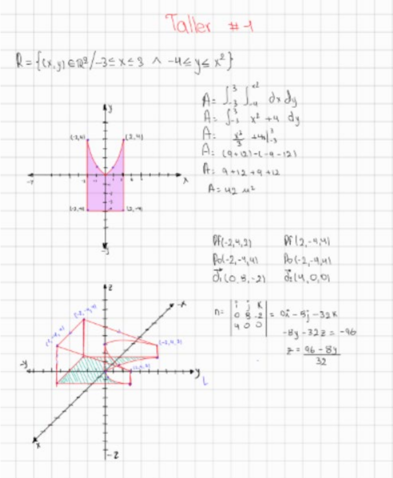
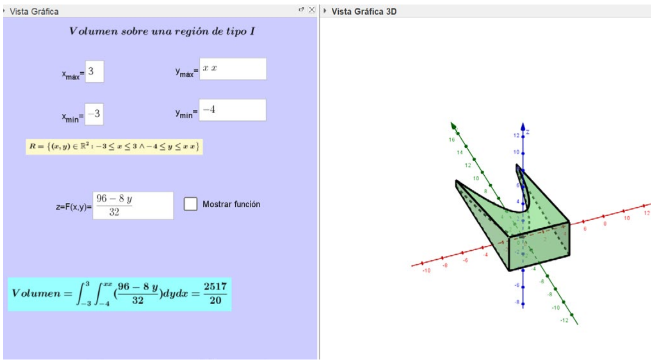
En la pregunta 3, que evalúa la capacidad de calcular el área de la región mediante integrales dobles, el 7,5% de los estudiantes del grupo de control y el 7,5% del grupo experimental, obtuvieron puntuaciones completas. Estos resultados indican que, aunque los estudiantes tienen una comprensión básica de las integrales dobles, aún enfrentan desafíos significativos en su aplicación práctica.

Los resultados del pre test muestran que los estudiantes tienen un buen desempeño en el reconocimiento de la región y en el dibujo de las curvas que la componen, sin embargo, presentan dificultades en la conversión del registro gráfico al algebraico de la parametrización de la superficie de la región y, por ende, en el planteo de la integral doble y su posterior resolución. Esto pone de manifiesto la necesidad de un enfoque educativo orientado al fortalecimiento de la conversión de registros para una mejor comprensión del objeto matemático.

3.2. Talleres de los estudiantes

A continuación, se presenta el uso de GeoGebra de uno de los estudiantes del grupo experimental que empleó este *software* en la mejora de sus destrezas en el dibujo de las parametrizaciones de las curvas y superficies que componen un sólido, así como el cálculo de su volumen con integrales dobles.

Tabla 9: Taller en GeoGebra

En el cuaderno	En GeoGebra
 	

La tabla 9 muestra un taller realizado por un estudiante de la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad Técnica Particular de Loja. Esta figura muestra la parametrización tanto de la región en 2D como del sólido en 3D, así como su dibujo a mano en una hoja y su comparación con GeoGebra. GeoGebra permite una manipulación dinámica del gráfico y sus proyecciones. Además, esta metodología permitió visualizar y comprender mejor las propiedades geométricas y espaciales del sólido estudiado, facilitando el análisis y la interpretación de los resultados obtenidos. Este enfoque no sólo mejora la habilidad de dibujar y manipular gráficos, sino que también fomenta una mayor interacción y experimentación con los conceptos matemáticos.

3.3. Reflexiones y actividades de los estudiantes

Tabla 10: Percepción de los estudiantes

Descripción	TD	ED	N	DA	TA
Utilizar GeoGebra mejoró tu capacidad para dibujar regiones 2D y solidos 3D	**0%**	**0%**	**15%**	**25%**	**60%**
Estás de acuerdo con que GeoGebra es útil para mejorar habilidades de visualización	**0%**	**0%**	**15%**	**25%**	**60%**
GeoGebra ayuda a identificar las curvas paramétricas	**0%**	**0%**	**23%**	**22%**	**55%**
GeoGebra facilita la comprensión de la región y límites de integración	**0%**	**0%**	**13%**	**25%**	**62%**
GeoGebra mejora la comprensión de integrales dobles	**0%**	**0%**	**5%**	**37%**	**58%**
Se aprendió a utilizar GeoGebra de manera efectiva	**0%**	**0%**	**6%**	**24%**	**70%**
GeoGebra permite la manipulación de gráficos	**0%**	**0%**	**13%**	**15%**	**72%**
GeoGebra facilita la conversión entre diferentes registros de representación	**0%**	**0%**	**12%**	**25%**	**63%**
Recomendación del uso de GeoGebra:	**0%**	**0%**	**0%**	**15%**	**85%**

Nota: TD: Totalmente en desacuerdo; ED: En desacuerdo; N: Neutro; DA: De acuerdo; TA: Totalmente en acuerdo

La tabla 10 presenta las reflexiones de los estudiantes sobre el uso de GeoGebra en el aprendizaje del cálculo de volúmenes por medio de integrales dobles, empleando la TRSR. En la cual, la mayoría de los estudiantes están de acuerdo o muy de acuerdo en que GeoGebra mejora significativamente sus habilidades en diversas áreas.

El 85% afirmó utilizar GeoGebra para mejorar la visualización y el dibujo de figuras 2D y 3D. Además, el 77% afirma que el *software* ayuda a identificar las curvas paramétricas que forman el objeto. Algunos estudiantes mencionaron que GeoGebra les facilitó la comprensión de las regiones de integración. Un porcentaje similar de estudiantes señaló que GeoGebra mejoró su comprensión general de las integrales dobles. Algunos estudiantes consideraron que GeoGebra facilitó la conversión entre diferentes registros de representación (gráfico, algebraico, numérico, etc.). Finalmente, el 100% de los encuestados recomendaría el uso de GeoGebra.

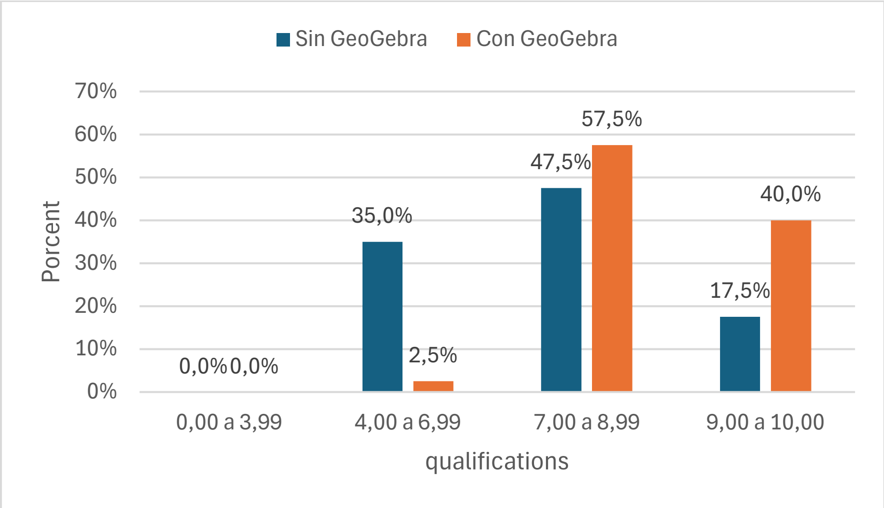
3.4. Resultados del Post Test

Tabla 11: Resultados de las pruebas posteriores

Preguntas	Puntos	Grupo control					Grupo experimental				
	Totales	4,00	3,00	2,00	1,00	0,00	4,00	3,00	2,00	1,00	0,00
Dibujo del sólido y sus proyecciones	3		**80%**	**15%**	**5%**	**0%**		**93%**	**8%**	**0%**	**0%**
Parametrización de las curvas y superficies	3		**53%**	**48%**	**0%**	**0%**		**85%**	**15%**	**0%**	**0%**
Cálculo del volumen del sólido	4	**10%**	**35%**	**45%**	**10%**	**0%**	**23%**	**50%**	**28%**	**0%**	**0%**

En la tabla 11 se observa que el uso de la herramienta GeoGebra ha tenido una influencia significativa en el grupo experimental en comparación con el grupo de control. El porcentaje de estudiantes que obtuvieron la máxima nota al dibujar sólidos aumentó del 80% en el grupo de control al 92.5% en el grupo experimental. Además, se observa que GeoGebra ayudó a mejorar la comprensión entre diferentes registros semióticos, como se muestra en la pregunta 2, donde el grupo de control obtuvo un 52,5% de la puntuación máxima, frente al 85% del grupo experimental. En la pregunta 3, GeoGebra también contribuye a una mejor comprensión de la integral doble para el cálculo de volúmenes, aumentando el porcentaje de puntuación máxima y logrando una distribución más equilibrada de las puntuaciones.

Figura 12: Diagrama de barras de las notas de los estudiantes del post test.



La figura 12 muestra que las calificaciones obtenidas por el grupo experimental son superiores a las del grupo de control. Sólo el 2,5% de los alumnos obtuvo notas inferiores a 7 en el grupo experimental, frente al 35% del grupo de control. Además, el grupo experimental tiene un mayor número de alumnos con calificaciones de 9 a 10, lo que representa el 40%, frente al 17,5% del grupo de control.

Para comprobar que el uso de GeoGebra tuvo un impacto positivo en el rendimiento académico en el grupo experimental con respecto al grupo de control, se realizó diferentes pruebas estadísticas como como se indica a continuación.

Tabla 12: Prueba de normalidad resultados post test

	Shapiro - Wilk		
	Estadístico	Estudiantes	Significancia (p)
Resultados sin GeoGebra (Grupo de control)	**0,953**	**40**	**0,095**
Resultados con GeoGebra (Grupo experimental)	**0,966**	**40**	**0,271**

En primer lugar, se realizó la prueba de normalidad mediante el criterio de Shapiro Wilk debido a la cantidad de datos es menor a 50. Se consideró un valor de significación de 0,05, que al compararlo con los valores de la tabla 12, se observó que los valores 0,095 en el grupo de control y 0,271 en el grupo experimental son superiores al valor de referencia. Por lo tanto, se determina que las puntuaciones de ambos grupos tienen una distribución normal.

Tabla 13: Prueba paramétrica t de Student para grupos independientes

		gl	Significancia (bilateral)
Calificación	Se asumen varianzas iguales	**78**	**0.00**
	No se asumen varianzas iguales	**66,752**	**0.00**

Dado que los datos superaron la prueba de normalidad y debido a que el tamaño de la muestra es mayor a 29, se utilizó la prueba paramétrica t de Student para determinar la influencia del *software* GeoGebra. La tabla 13 muestra un valor de significancia bilateral de 0, inferior a 0,05; por tanto, se determina estadísticamente que el uso de GeoGebra influye positivamente en la comprensión de las parametrizaciones y de las integrales dobles para el cálculo del volumen de sólidos.

4. Discusión

El uso de GeoGebra como recurso semiótico para la parametrización y el cálculo de volúmenes de sólidos ha demostrado no solo mejorar el rendimiento académico, sino también facilitar la transición entre registros algebraicos y gráficos. La evidencia recolectada en las evaluaciones pre y post test muestra que los estudiantes del grupo experimental, que emplearon esta herramienta, lograron superar a sus contrapartes que no la utilizaron. Esto se vincula con la TRSR, que subraya la importancia de manejar múltiples representaciones de un mismo concepto para profundizar la comprensión matemática. La interactividad y la visualización que ofrece GeoGebra potenciaron la capacidad de los estudiantes para comprender conceptos abstractos y aplicarlos en situaciones prácticas. Este hallazgo es consistente con estudios previos como el de Ayala Chauvin y Luna Romero (2024), los cuales indican que la interactividad y la visualización dinámica mejora la comprensión de los objetos matemáticos, en este caso de la integral doble, al permitir a los estudiantes experimentar con conceptos abstractos de manera tangible.

Además, muchos de los estudiantes expresaron una percepción positiva sobre la efectividad de GeoGebra en su aprendizaje. La incorporación de esta herramienta no solo mejoró la comprensión de integrales dobles, sino que también fomentó habilidades de visualización y manipulación gráfica que son críticas en los niveles avanzados de cálculo. Sin embargo, es fundamental reconocer que, a pesar de las mejoras observadas, aún existen desafíos en términos de la conversión entre registros, lo que sugiere que se debe seguir investigando y ajustando las metodologías didácticas asociadas al uso de herramientas tecnológicas.

Conclusiones

En conclusión, el estudio mostró que la implementación del *software* GeoGebra en la enseñanza de la parametrización de sólidos y el cálculo de volúmenes a través de integrales dobles ha tenido un impacto significativo en el rendimiento académico de los estudiantes de Ingeniería Civil en la Universidad Técnica Particular de Loja. Los resultados de las evaluaciones indican una mejora sustancial en la comprensión conceptual y en la habilidad para realizar conversiones entre diferentes representaciones matemáticas. Por lo tanto, se reafirma la relevancia de integrar tecnologías educativas en el aula como medio para abordar conceptos complejos y mejorar el aprendizaje en matemáticas.

Asimismo, se concluye que la preparación y capacitación de tanto educadores como estudiantes en el uso efectivo del *software* GeoGebra es crucial para maximizar su potencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto no solo permite la mejora del rendimiento académico, sino que también contribuye al desarrollo de habilidades críticas en el ámbito de la educación matemática, asegurando que los estudiantes adquieran competencias más profundas y adecuadas para enfrentar desafíos en su formación profesional

Recomendaciones

Se recomienda a las instituciones educativas que implementen el uso de GeoGebra en sus currículos de matemáticas, particularmente en cursos avanzados de cálculo y análisis matemático. La formación continua de los docentes en el uso de esta herramienta es esencial para facilitar su integración efectiva en las prácticas pedagógicas. Además, se sugiere la creación de materiales didácticos que acompañen el uso de GeoGebra y que incluyan actividades orientadas al desarrollo de habilidades en la conversión entre diferentes registros semióticos.

Finalmente, se sugiere que futuras investigaciones se enfoquen en el diseño de estrategias didácticas combinadas que integren GeoGebra con otras tecnologías educativas. Esto permitirá explorar de manera holística las interacciones entre diferentes plataformas y métodos de enseñanza, contribuyendo así a la creación de entornos de aprendizaje más dinámicos y efectivos en la educación matemática.

Observación

La redacción de este artículo se ha extendido debido a la inclusión de un sustento matemático que respalda el desarrollo del *applet*. Esto tiene como propósito brindar a los lectores un punto de partida sólido que les permita personalizar sus propios *applets* en GeoGebra.

Referencias

Aguerrea, M. y Solís, M. y Huincahue, J. (2022). Errores matemáticos persistentes al ingresar en la formación inicial de profesores de matemática: El caso de la linealidad. *Uniciencia*, *1*. https://doi.org/10.15359/RU.36-1.4

Andrade, C. (2021). The Limitations of Quasi-Experimental Studies, and Methods for Data Analysis When a Quasi-Experimental Research Design Is Unavoidable. *Indian Journal of Psychological Medicine*, *43*(5), 451–452. https://doi.org/10.1177/02537176211034707

Ayala Chauvin, M. A. y Luna Romero, R. L. (2024). Interpretación geométrica de la integral doble en el espacio utilizando GeoGebra. *Revista Iberoamericana De Tecnología En Educación Y Educación En Tecnología*, *39*, e13. https://doi.org/10.24215/18509959.39.e13

Barradas, U. (2021). Recursos digitales como apoyo en la enseñanza del cálculo. *RIDE. Revista Iberoamericana Para La Investigación y El Desarrollo Educativo*. https://doi.org/10.23913/RIDE.V12I23.1040

Barroga, E. y Matanguihan, G. J. y Furuta, A. y Arima, M. y Tsuchiya, S. y Kawahara, C. y Takamiya, Y. y Izumi, M. (2023). Conducting and Writing Quantitative and Qualitative Research. *J Korean Med Sci*, *38*(37), e291. https://doi.org/10.3346/jkms.2023.38.e291

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Fernández, J. (2024). Uso de herramientas digitales matem\'aticas en la Educaci\'on Secundaria. *Department of Mathematics, University of Extremadura*. https://arxiv.org/abs/2404.00001v1

González, I. (2020). *Dificultades en la construcción e interpretación de gráficas de funciones en estudiantes de nivel superior*. https://www.academia.edu/92075496/Dificultades_en_la_construcci%C3%B3n_e_interpretaci%C3%B3n_de_gr%C3%A1ficas_de_funciones_en_estudiantes_de_nivel_superior

Herrera, M. y Guzmán, J. (2021). *Desarrollando habilidades de visualización espacial a través de la realidad aumentada en el aprendizaje del cálculo en varias variables*. https://laccei.org/LACCEI2020-VirtualEdition/work_in_progress/WP79.pdf

Hoyos, E. y Acosta, C. y Aristizábal, J. y Mesa, M. y Trujillo, C. y Rincón, J. y Gutiérrez, Á. y Jaime, A. y Hoyos-Salcedo, E. A. y Acosta-Minoli, C. A. y Aristizábal-Zapata, J. H. y Mesa-Mazo, M. J. y Trujillo-Salazar, C. A. y Rincón-Penagos, J. A. y Gutiérrez-Rodríguez, Á. y Jaime-Pastor, A. (2021). Influencia de un software educativo en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*. https://doi.org/10.17227/TED.NUM49-9574

Khemane, T. y Padayachee, P. y Shaw, C. (2022). Students' understanding of double integrals - implications for the engineering curriculum. *SEFI 50th Annual Conference of The European Society for Engineering Education*, 391–401. https://doi.org/10.5821/conference-9788412322262.1155

Pandey, P. y Madhusudhan, M. y Singh, B. P. (2023). Quantitative Research Approach and its Applications in Library and Information Science Research. *Access: An International Journal of Nepal Library Association*, *2*(01), 77–90. https://doi.org/10.3126/access.v2i01.58895

Prieto, J. y Vásquez, I. (2024). Representaciones semióticas en el álgebra escolar: una revisión sistemática de la literatura entre 2013-2022. *Educación*. https://doi.org/10.18800/EDUCACION.202402.A004

Quezada, V. y Flores del Río, G. (2022). Resolución de tipos de problemas contextualizados y análisis de errores: un estudio de casos. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*. https://doi.org/10.4067/S0718-07052022000200009

Quintana, D. y Mejía, L. (2022). Strengthening mathematical representation and communication capacity through the use of semiotics representation registers. *Journal of Engineering Research*. https://doi.org/10.22533/AT.ED.3172142206077

Quintana, D. y Mejía, L. y Gallo, I. (2022). Influencia significativa del uso de registros semióticos aplicando una propuesta didáctica. *Horizontes. Revista de Investigación En Ciencias de La Educación*. https://doi.org/10.33996/REVISTAHORIZONTES.V6I23.358

Rahman, M. M. (2023). Sample Size Determination for Survey Research and Non-Probability Sampling Techniques: A Review and Set of Recommendations. *Journal of Entrepreneurship, Business and Economics*, *11*(1), 42–62.

Teófilo de Sousa, R. y Ferreira de Azevedo, I. y Régis, F. (2021). *El software GeoGebra como recurso para sólidos de revolución en geometría espacial*. https://core.ac.uk/download/pdf/478234058.pdf

Urrutia, A. y Merino, C. y Zuza, K. y Guisasola, J. (2024). Dificultades de estudiantes universitarios chilenos relacionadas con representaciones semióticas algebraicas en cinemática con aceleración no constante. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0280

Zamora, J. y Jiménez, J. y Delgado, F. (2020). Uso de herramientas tecnológicas y su impacto en el rendimiento en el curso de cálculo II de la universidad nacional. *Eco Matemático*, *1*. https://doi.org/10.22463/17948231.2952

ENVIADO: 14/05/2025

ACEITO: 07/08/2025