https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i2p054-063

A interpretação geométrica da derivada com auxílio do GeoGebra aplicado a um problema no universo *Star Wars*

ALEX SANDRO GOMES LEÃO[1]
https://orcid.org/0000-0001-9833-4946
ALISSON DARÓS [2]
https://orcid.org/0000-0002-2082-6999
PATRICIA YUKARI SATO RAMPAZO[3]
https://orcid.org/0000-0001-9831-4929
RONALDO SILVA DE OLIVEIRA[4]
https://orcid.org/0000-0003-2559-1081

RESUMO

Este artigo tem como objetivo apresentar uma situação-problema que possibilite desenvolver a interpretação geométrica do conceito de Derivada presente em componentes de Cálculo Diferencial e Integral, utilizando conceitos de logaritmo natural, equação da reta e limites, com o auxílio do software GeoGebra. Além disso, busca refletir sobre a relevância e as contribuições da Resolução de Problemas no ensino de conteúdos matemáticos por meio da manipulação e exploração oferecidas pelo GeoGebra.

Palavras-chave: *Resolução de Problemas; GeoGebra; Ensino de Derivada.*

The geometric interpretation of the derivative with the use of GeoGebra applied to a problem in the *Star Wars* universe

ABSTRACT

This article presents a proposal for a problem situation focusing on teaching Derivatives from the perspective of Differential and Integral Calculus, using concepts of natural logarithm, equation of a straight line and limits, with the support of software GeoGebra. Furthermore, it seeks to reflect on the relevance and contributions of Problem Solving in the teaching of mathematical content through the manipulation and exploration enabled by GeoGebra.

Keywords: *Problem Solving; GeoGebra; Teaching Derivatives.*

[1] Doutor em pela UNIPAMPA. Professor do Magistério Superior na UNIPAMPA, Itaqui, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: alexleao@unipampa.edu.br.

[2] Doutor em Matemática pela UFSCar. Professor do Magistério Superior na UNIPAMPA, Itaqui, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: alissondaros@unipampa.edu.br.

[3] Doutora em Matemática pela UFSCar. Professora do Magistério Superior na UFF, Santo Antônio de Pádua, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: prampazo@id.uff.br.

[4] Licenciado em Matemática pela UNIPAMPA. E-mail: ronaldos12@gmail.com.

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) desempenha um papel de destaque nos cursos de Matemática, sendo em muitos casos pré-requisito para outras componentes de ensino. No entanto, estudos apontam problemas de ensino e aprendizagem desta componente no Ensino Superior Brasileiro (Baruffi (1999), Rezende (2003), Torres e Giraffa (2009), Trevisan e Mendes (2018) e Pinheiro (2022). Pinheiro e Boscarioli (2022), após uma investigação apontam que o maior problema para o ensino de CDI é "a falta de compreensão de seus conceitos".

Por outro lado, novos trabalhos vêm sendo produzidos de modo a trazer propostas inovadoras para o ensino de CDI, assim diferentes abordagens são propostas trazendo diferentes metodologias de ensino com propósito de desenvolver tais conceitos para uma melhor compreensão do conteúdo.

Este trabalho propõe a Resolução de Problemas como abordagem metodológica para o ensino de CDI, articulada ao uso de recursos computacionais que exploram as potencialidades de simulação do *software* GeoGebra. Tal integração configura uma prática pedagógica dinâmica e reflexiva, cujo objetivo é apresentar uma proposta capaz de analisar os conceitos de derivada mobilizados pelos estudantes diante da resolução de uma situação-problema mediada pelas funcionalidades interativas do GeoGebra.

1. O Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas

Quando se pensa em Resolução de Problemas podemos encontrar diferentes definições na literatura. Uma delas é dada por Proença (2018, p. 17) que entende que

> [...] uma situação de Matemática se torna um problema quando a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar a uma resposta. Não se trata, assim, do uso direto de uma fórmula ou regra conhecidas – quando isso ocorre, a situação tende a se configurar como um exercício.

Para complementar tal definição, Echeverría (1998) diferencia exercícios de problemas, oferecendo a seguinte explicação: os exercícios possuem uma função específica no ensino, voltada à repetição e à memorização, com o objetivo de consolidar procedimentos algorítmicos, técnicas e habilidades já estabelecidas. Dessa forma, seu uso não envolve a tomada de decisões, e dificilmente contribui para a aprendizagem e a compreensão de conceitos. Por outro lado, os problemas devem provocar um impasse intelectual, indo além de uma simples dificuldade de cálculo.

Sendo assim, resolver problemas implica a mobilização cognitiva dos conhecimentos do sujeito na busca por uma solução, correspondendo, segundo Brito (2010), a quatro etapas do pensamento: representação, planejamento, execução e monitoramento. Proença (2018) descreve detalhadamente cada uma dessas etapas:

Representação: A etapa de representação refere-se à compreensão que o estudante constrói sobre o problema, estando diretamente relacionada à sua capacidade de formar uma representação mental do contexto envolvido. Esse processo depende da mobilização de conhecimentos linguísticos, relacionados à língua materna, e de conhecimentos semânticos, específicos da linguagem matemática.

Para o autor, caso o estudante realize uma representação adequada do problema a ser resolvido, terá condições de identificar a sua estrutura formal. Tendo assim, condições de "[...] perceber se faltam informações no problema (informações incompletas) ou mesmo se há dados que não ajudam ou não precisam ser levados em consideração na busca da solução (informações supérfluas" (Proença, 2018, p. 28).

Planejamento: Nessa etapa, o estudante deve elaborar uma estratégia, ou seja, definir um percurso que o auxilie na busca por uma solução. A escolha dessa estratégia está diretamente relacionada à forma como o problema foi representado cognitivamente, além de refletir suas preferências pessoais por determinados métodos ou abordagens. Em outras palavras, trata-se do momento em que o aluno planeja o caminho que

> [...] segue o uso de conhecimentos lógico-verbais, viso-pictóricos (desenhos, figuras, diagramas) ou ambos. Assim, essa etapa ajuda a evidenciar as habilidades da pessoa para, por exemplo, pensar com símbolos matemáticos, generalizar de forma rápida e abreviar o processo de raciocínio matemático" (PROENÇA, 2018, p. 28).

Execução: Proença (2018, p. 28) entende que o estudante necessita "[...] executar a estratégia proposta. Implica executar os cálculos matemáticos necessários, bem como desenhar os elementos viso-pictóricos".

Monitoramento: esta etapa implica em dois aspectos importantes: a) verificar a racionalidade da resposta encontrada em termos do contexto envolvido; b) rever o processo de resolução seguido, o que pode ocorrer não apenas quando se obtém a resposta, mas em qualquer momento do processo de resolução (Proença, 2018).

Visto isso, podemos perceber que um problema não é inerente de uma tarefa qualquer de Matemática (Schoenfeld, 1985), e envolve a mobilização de estruturas cognitivas, ou seja, "[...] combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princípios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos que são necessários para encontrar a solução com uma nova situação que demanda uma reorganização conceitual cognitiva" (Brito, 2010, p. 19).

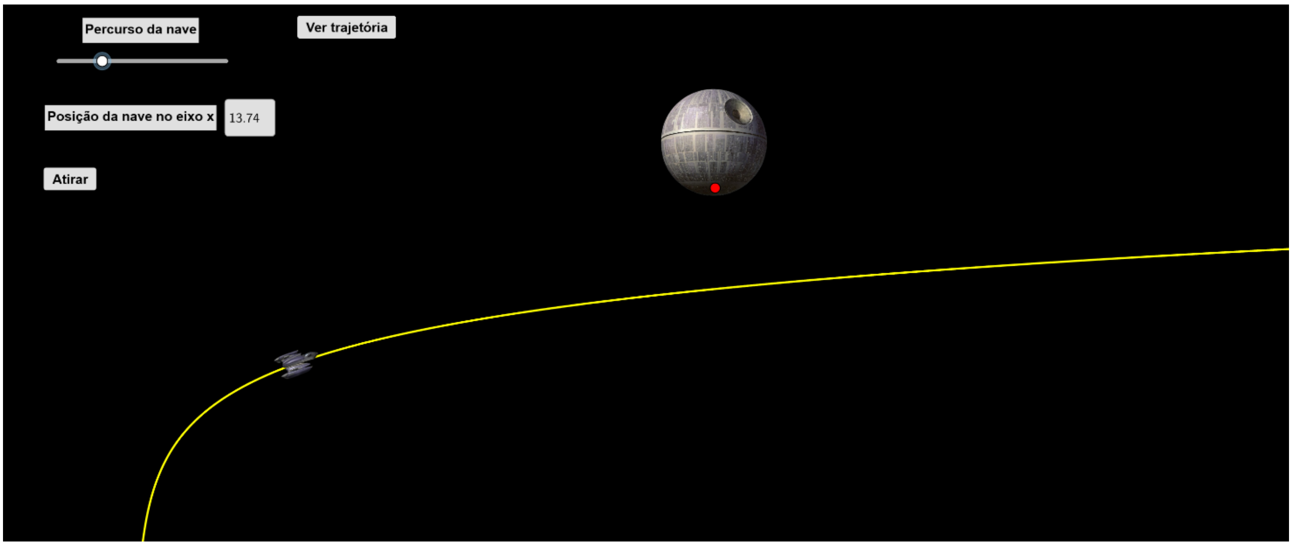
Neste contexto de Resolução de Problemas, o GeoGebra apresenta-se como uma ferramenta relevante no planejamento e na execução da atividade, possibilitando ao estudante criar estratégias capazes de resolver o problema proposto a partir da análise e manipulação o problema no *software*.

2. O Problema

A situação proposta tem como objetivo transportar o estudante para o universo fictício baseado no filme *Star Wars*, inserindo-o em um contexto de fantasia no qual ele se percebe como parte integrante do processo. Ao se engajar nessa atividade, o aluno é instigado a refletir, mobilizar conhecimentos e elaborar estratégias que o auxiliem na resolução do problema apresentado.

Problema: Foi identificado que uma nova Estrela da Morte está em fase avançada de construção pelos vilões do Império e espiões da resistência descobriram uma falha estrutural crítica: um ponto fraco localizado em sua parte inferior. O plano de ataque está sendo traçado por meio de uma simulação bidimensional e a missão ficará a cargo de uma nave Belbullab-22 projetada para ataques pesados e precisos. A nave rebelde encarregada da missão seguirá uma trajetória abaixo da Estrela da Morte, descrita pela curva $f(x) = 5\ln(x)$. Para garantir o elemento surpresa, será possível realizar apenas um único disparo, que seguirá a direção da reta tangente à trajetória da curva $f(x)$ no instante $x = x_0$. O disparo deve atingir diretamente o ponto fraco da Estrela da Morte, localizado no ponto $(60, 32.42)$, coordenadas $x = 60$ e $y = 32{,}42$. Foram detectadas três posições onde existem falhas nos radares de segurança da Estrela da Morte, nos quais seria possível realizar o disparo: $x_0 = 6$, $x_0 = 12$ e $x_0 = 18$. Em qual das posições x_0 é possível efetuar o disparo de modo a atingir o ponto fraco da Estrela da Morte e acabar com essa ameaça?

Figura 1: Problema star wars representado no GeoGebra[5]



Fonte: Autores (2025)

Provável solução e conhecimentos prévios: Diante deste problema, é possível pensar em diferentes abordagens para se obter uma solução. Em uma perspectiva, com termos como reta tangente, é factível remeter a resoluções envolvendo o uso do Cálculo Diferencial através do uso do conceito de derivada de uma função a valores reais. Ao estudar este problema em um contexto mais computacional poderia se pensar em uma abordagem via métodos numéricos e aproximações polinomiais sucessivas para $f(x)$. Em um contexto mais inicial, podemos dar um tratamento envolvendo Geometria Analítica e Trigonometria através dos conceitos de retas no plano cartesiano e ângulos.

É neste último universo da Matemática que trabalharemos este problema, para assim dar uma abordagem geométrica e iterativa através do uso do *software* GeoGebra. Para tanto, com os dados apresentados, podemos destacar primeiramente o objeto matemático logaritmo. Na educação básica, é apresentado por meio de uma relação inversa à potenciação com a notação $log_a b$. Conforme Dante (2013), dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de b na base a, que simbolicamente podemos visualizar pela relação $log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$. Por consequência das regras de potenciação, o logaritmo também apresenta propriedades especiais, como por exemplo:

$$\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)\,,$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c) \quad (para\ c \neq 0)\,, \tag{1}$$

$$c.\log_a(b) = \log_a(b^c)\,, \tag{2}$$

[5] Disponível em https://www.geogebra.org/m/jeauqcuc para manipulação e iteração.

$$\log_{a^c}(b) = \frac{1}{c}\log_a(b) \quad (para\ c \neq 0).$$

A partir dessa noção matemática é possível pensar em uma definição mais geral, de função logarítmica. Iezzi *et al.* (2004a) traz para um número real a positivo e diferente de 1, a definição da função logarítmica de base a como sendo a função $f: R_+^* \to R$, dada pela lei $f(x) = log_a x$. Nesta definição, R_+^* denota o conjunto dos números reais positivos, assim, a função logarítmica associa a cada número real positivo, um número real que corresponde ao seu logaritmo de base a.

O logaritmo natural $f(x) = \ln(x)$ é um caso especial da função logarítmica no qual considera-se a base a igual a constante matemática de Euler. Também conhecido como número de Napier, este número é representado pela letra e, que é um número irracional e transcendente que tem valor aproximado 2,71828. Apesar de ter sido referenciada pela primeira vez em 1618, em um dos apêndices da segunda edição da tradução da obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de John Napier (1150-1617) e, posteriormente, apadrinhada por Euler no século XVIII, a constante e em si teve sua primeira aparição em 1690, em uma carta escrita por Leibniz (1646-1716). Ainda no século XVII, mais precisamente em 1683, Jacob Bernoulli (1654-1705) também fez referência a este número ao resolver problemas de juros compostos. Em sua solução, a constante e ocorre como o limite da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ em que *n* representa o número de intervalos em um ano em que o juro composto é calculado (Maor (1994)). Ou seja,

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{3}$$

É possível obter a função logarítmica natural de outras maneiras, em Lima (2010), a função é construída por um meio mais formal, para cada $x > 0$, através do uso da integral

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

e a partir daí são verificadas as suas propriedades e sua relação inversa com a função exponencial conforme tratada na educação básica.

Retornando ao problema proposto, outro dado a se observar é o fato da nave rebelde, ao percorrer sua trajetória e efetuar disparos, tem seu projétil percorrendo uma reta tangente à curva $f(x) = 5\ln(x)$. Neste aspecto, é importante destacar que uma reta t tangente à curva dada pelo gráfico de uma função f, é uma reta que toca a curva em apenas um ponto e deve ter a mesma inclinação da curva no ponto tocado, sendo esse o chamado ponto de tangência.

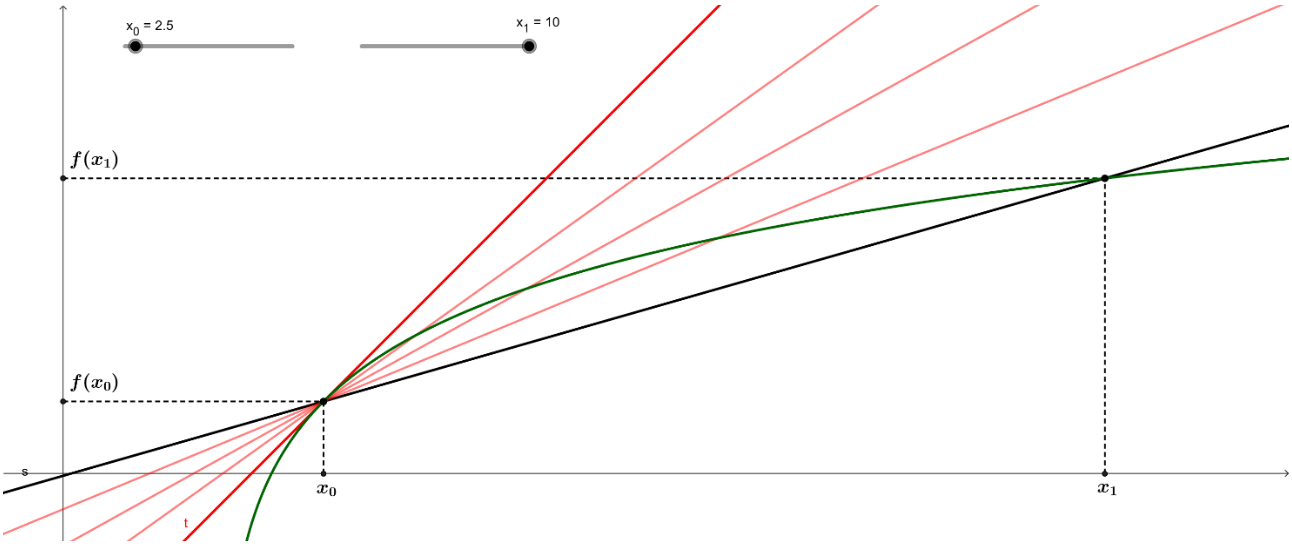
Por fim, para a resolução do problema proposto, devemos ter claro, como em todo problema, a tese a se obter, isto é, o questionamento que está sendo realizado, que neste caso trata sobre o valor de x_0 para que o disparo da nave rebelde atinja exatamente o ponto $(60, 32.42)$.

Sendo assim, como podemos obter a equação da reta tangente à curva $f(x) = \ln(x)$ em um determinado ponto $(x_0, f(x_0))$? Historicamente, sabemos que a equação de uma reta é dada a partir de dois pontos, mas, neste caso, em se tratando de uma reta tangente t, é sabido da Geometria Analítica que a equação desta reta é obtida a partir do ponto $(x_0, f(x_0))$ e o coeficiente angular m_t da reta, pela equação

$$y - f(x_0) = m_t(x - x_0). \tag{4}$$

Para transpor o obstáculo de obtenção do coeficiente angular da reta tangente t, lembramos da definição de reta secante à uma curva dada, que segundo Camargo e Boulos (2005) é uma reta que intercepta a curva em dois ou mais pontos distintos, ou seja, a reta passa por dois pontos distintos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, e observamos na Figura 2[6], com o uso do recurso controle deslizante do *software* GeoGebra, que a reta tangente é obtida geometricamente a partir da reta secante via processo de aproximação, em que se fixa um dos pontos, digamos $\left(x_0, f(x_0)\right)$ e se faz x_1 suficientemente próximo à x_0.

Figura 2: Aproximação da reta tangente t via reta secante s



Fonte: Autores (2025)

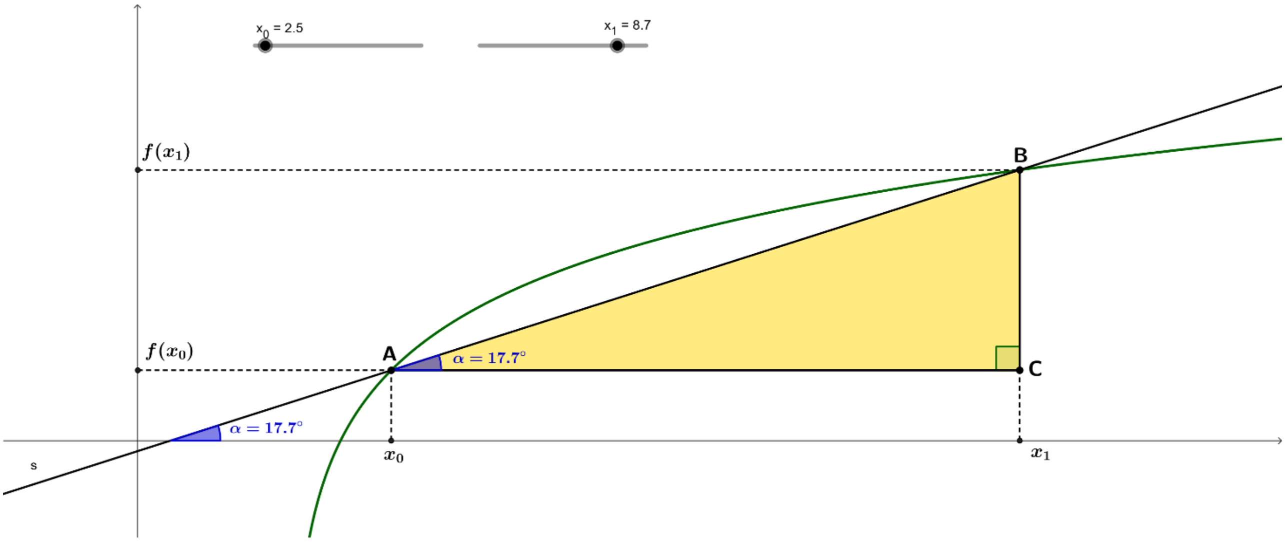
Uma abordagem usual para determinar a equação da reta secante a uma curva, leva em consideração uma análise do triângulo retângulo e o uso da trigonometria, Figura 3[7]. Nesta, consideramos uma reta s que passa pelos pontos $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ e $B\left(x_1, f(x_1)\right)$, e α denota o número responsável pela declividade da reta s em relação ao eixo das abscissas. Seja também $C\left(x_1, f(x_0)\right)$, então no triângulo ABC, em que $\hat{C}$ é um ângulo reto, temos que o chamado coeficiente angular da reta s, que denotaremos por m_s, é dado pela tangente do ângulo α com o quociente

$$m_s = \tan\alpha = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \qquad (5)$$

Figura 3: Construção do coeficiente angular m_s a partir da trigonometria

[6] Disponível em https://www.geogebra.org/m/yk3skcbp para manipulação e visualização da aproximação da reta tangente a partir da reta secante à curva.

[7] Disponível em https://www.geogebra.org/m/ytgcv5qq para manipulação obtenção do coeficiente angular da reta secante a partir da trigonometria no triângulo retângulo.



Fonte: Autores (2025)

Dessa forma, conforme Iezzi *et al.* (2004b), é suficiente determinar o coeficiente angular da reta secante s que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ e calcular o limite desta expressão quando x_1 tende ao valor x_0 para obter o coeficiente angular da reta tangente ao ponto $(x_0, f(x_0))$. Assim, substituindo $f(x) = \ln(x)$ em (5) e fazendo a mudança de variável $h = x_1 - x_0$, podemos escrever a expressão para o coeficiente angular m_s como sendo

$$m_s = \frac{5\ln(x_1) - 5\ln(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{5\ln(x_0 + h) - 5\ln(x_0)}{h} = \frac{5}{h}[\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)].$$

Portanto, fazendo $x_1 \to x_0$, o que equivale a fazer $h \to 0$, obtemos que $m_s \to m_t$ pois $s \to t$, ou seja,

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{5}{h}[\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)]. \tag{6}$$

Com base nos resultados destacados até este momento, estabelecemos uma organização de pensamento e os conhecimentos matemáticos necessários para a resolução do problema proposto, além de, com o auxílio do GeoGebra, propiciar a construção, visualização e manipulação geométrica através do uso do recurso controle deslizante.

Por conseguinte, procederemos a resolução do problema, obtendo inicialmente o coeficiente angular m_t da reta tangente t a partir da equação (6) e da propriedade (1) do logaritmo,

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{h \to 0}\left[\frac{5}{h}[\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)]\right] = 5\lim_{h \to 0}\left[\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right)\right] \\ &= 5\lim_{h \to 0}\left[\frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Agora, denotando $v = \frac{x_0}{h}$, temos que $v \to \infty$ quando $h \to 0$, e podemos escrever $\frac{1}{h} = \frac{v}{x_0}$ e $\frac{h}{x_0} = \frac{1}{v}$. Então, aplicando esta mudança de variável na equação (7) e a propriedade (2) do logaritmo, obtemos

$$m_t = 5\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right] = 5\lim_{v\to\infty}\left[\frac{v}{x_0}\ln\left(1+\frac{1}{v}\right)\right] = \frac{5}{x_0}\lim_{v\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{v}\right)^v.$$

Lembrando que a função logarítmica é uma função contínua em seu domínio, podemos fazer a passagem do limite para as variáveis da função,

$$m_t = \frac{5}{x_0}\lim_{v\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{v}\right)^v = \frac{5}{x_0}\ln\left(\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v\right).$$

Então, retomando o limite fundamental em (3) e substituindo na equação acima, podemos concluir que

$$m_t = \frac{5}{x_0}\ln\left(\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v\right) = \frac{5}{x_0}\ln(e) = \frac{5}{x_0}, \tag{8}$$

pois $\ln(e) = 1$. Dessa forma, aplicando na expressão (8) os valores $x_0 = 6$, $x_0 = 12$ e $x_0 = 18$, obtemos, respectivamente, $m_t = \frac{5}{6}$, $m_t = \frac{5}{12}$ e $m_t = \frac{5}{18}$, referente ao coeficiente angular da reta tangente a curva $f(x) = 5\ln(x)$ em cada x_0.

Na sequência, fazendo uso da equação (4), passamos a determinar a equação da reta tangente à curva $f(x)$ com ponto de tangência $(6, f(6))$, $(12, f(12))$ e $(18, f(18))$.

$$y - f(x_0) = m_t(x - x_0) \Rightarrow \begin{cases} y - f(6) = \frac{5}{6}(x-6) \Rightarrow y = \frac{5}{6}x + 3{,}95 \\ y - f(12) = \frac{5}{12}(x-12) \Rightarrow y = \frac{5}{12}x + 7{,}42 \\ y - f(18) = \frac{5}{18}(x-18) \Rightarrow y = \frac{5}{18}x + 9{,}45 \end{cases}$$

Por fim, para verificar em qual posição x_0 o disparo da nave rebelde Belbullab-22 irá atingir diretamente o ponto fraco da Estrela da Morte, localizado nas coordenadas $x = 60$ e $y = 32{,}42$, é suficiente verificar quais das retas tangentes obtidas acima, contém este ponto.

$$x = 60 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{6}\times 60 + 3{,}95 = 53{,}95 \\ y = \frac{5}{12}\times 60 + 7{,}42 = 32{,}42 \\ y = \frac{5}{18}\times 60 + 9{,}45 = 26{,}11 \end{cases}$$

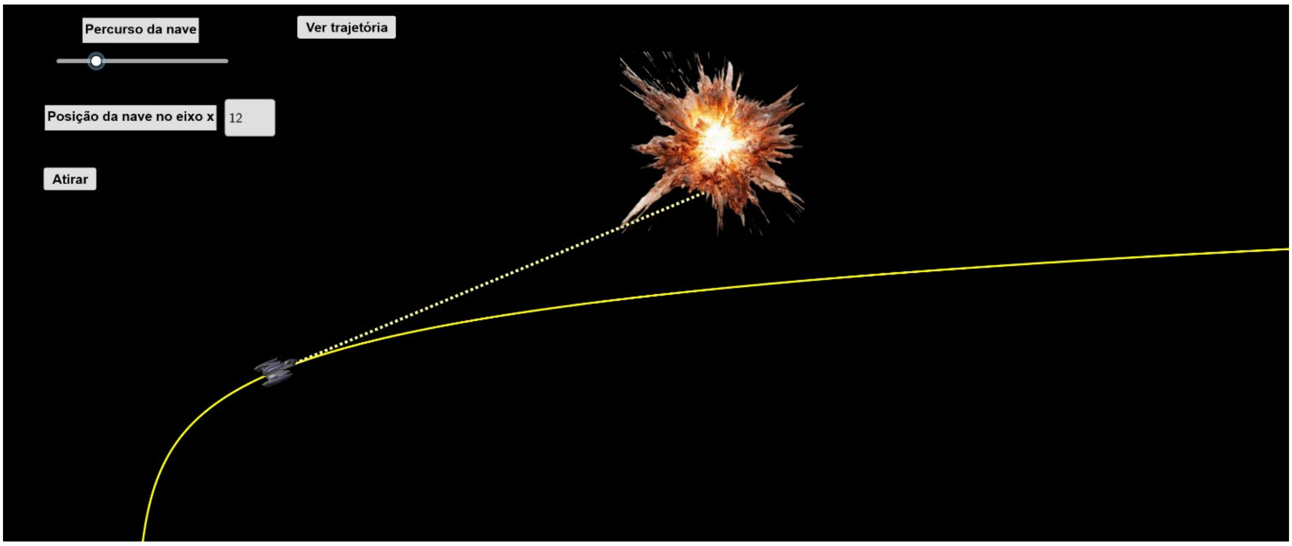
Concluímos então, que a reta tangente t que contém o ponto $(60, 32.42)$ é dada pela equação

$$y = \frac{5}{12}x + 7{,}42,$$

gerada pelo ponto de tangência $x_0 = 12$ e coeficiente angular $m_t = \frac{5}{12}$. Portanto, a posição exata para a nave rebelde disparar o projétil e acertar o ponto fraco da Estrela da Morte é $x_0 = 12$.

O leitor fica convidado a acessar o link https://www.geogebra.org/m/jeauqcuc, inserir a resposta obtida para posicionar a nave rebelde Belbullab-22 na posição correta de disparo do projétil e clicar no botão “Atirar” para verificar a destruição da Estrela da Morte, conforme Figura 4.

Figura 4: Resolução do problema star wars representado no GeoGebra[7]



Fonte: Autores (2025)

Considerações Finais

Este trabalho teve como principal objetivo apresentar uma situação-problema que possibilite desenvolver a interpretação geométrica do conceito de Derivada presente em componentes de Cálculo Diferencial e Integral, utilizando as potencialidades do *software* GeoGebra. Comumente este conteúdo é abordado de forma mecânica ou mesmo sem o foco geométrico que está por trás da sua definição, o que pode trazer falta de motivação aos discentes ou compreensão de preceitos fundamentais.

Como parte motivacional apresentamos uma abordagem que envolve um problema inspirado na premiada saga *Star Wars* e que faz parte da cultura *Geek* – comunidade de pessoas apaixonadas por filmes, séries, jogos, quadrinhos, animes, tecnologia e outros temas relacionados – o que traz um apelo tecnológico e pode ser um instrumento motivacional para o estudo da Matemática. Neste meio, o *software* GeoGebra usado em paralelo a formalização matemática é um auxilio capaz de possibilitar a iteração com o aluno. Através do "jogo" criado na forma de um problema *Star Wars* e de conceitos que antecedem o conteúdo de Derivada, esta proposta visa desafiar o aluno a gerar uma solução matemática para a posição correta de disparo de um projétil e posteriormente verificar, via implementação desta informação no GeoGebra, a destruição da nova Estrela da Morte. Dessa forma, entende-se que os conteúdos de função logarítmica, função exponencial, retas secante e tangente, aproximação sucessiva e limites, ficam fundamentados e mostram-se aplicáveis em contextos que podem surpreender, além de trazerem toda a interpretação e raciocínio matemático que será utilizado na definição formal de Derivada de uma forma mais dinâmica e visual.

Referências

Ávila, G. (2001). *Análise matemática para a Licenciatura*. São Paulo: Edgard Blucher.

[7] Disponível em https://www.geogebra.org/m/jeauqcuc para manipulação e iteração.

Brito, M. R. F. (2010). Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In: M. R. F. Brito (Org). *Solução de problemas e a matemática escolar*. (2. Ed., pp. 13-53). Campinas: Alínea.

Camargo, I. O. & Boulos, P. (2005). Geometria analítica: um tratamento vetorial. (3. ed.). São Paulo, SP: Prentice Hall.

Dante, L. R. (2013). *Matemática: contexto e aplicações.* (v. 2). São Paulo, SP: Ática.

Echeverría, M. P. P. & Pozo, J. I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: J. I. Pozo (Org). *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*, (pp. 13-42). Porto Alegre: Artes Médicas.

Iezzi, G. & Dolce, O. & Murakami, C. (2004a). *Fundamentos de Matemática Elementar: Logaritmos*. (v. 2, 9. ed.). São Paulo: Atual.

Iezzi, G. & Murakami, C. & Machado, N. J. (2004b). *Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas e noções de Integral*. (v. 8, 9. ed.). São Paulo: Atual.

Lima, E. L. (2010). *Análise Real: Funções de Uma Variável*. (v. 1, 10. ed.). Rio de Janeiro: IMPA.

Maor, E. (1994). *e: The Story of a Number*. New Jersey: Princenton University Press.

Pinheiro, G. D. (2022). *Sala de aula invertida no ensino de cálculo diferencial e integral I em cursos de engenharia: Uma proposta experienciada.* 119f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, PR.

Pinheiro, G. D., Boscarioli, C. (2022). *Metodologias ativas e o ensino de cálculo diferencial e Integral I em cursos de engenharia – Uma revisão de literatura*. Revista de Ensino de Engenharia, 41, 140-153. http://revista.educacao.ws/revista/index.php/abenge/article/view/

Proença, M. C. (2018). *Resolução de Problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula*. Maringá: UEM.

Rezende, W. M. (2003). *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. 468f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP. https://doi.org/10.11606/T.48.2003.tde-27022014121106

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Torres, T. I. M. & Giraffa, L. M. M. (2009). *O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE*. Revista eletrônica de Eduação Matemática, 4(1), 18-25. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2009v4n1p18

Trevisan, A. L. & Mendes, M. T. (2018). *Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta*. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 11(1), 209-227. https://doi.org/10.3895/rbect.v11n1.5702

ENVIADO: 02/06/2025

ACEITO: 22/08/2025