https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i2p177-188

Construção do Conceito de Integral Dupla Usando o Software GeoGebra

GUSTAVO PEREIRA GOMES[1]

https://orcid.org/0009-0006-9367-1955

RESUMO

O avanço das tecnologias digitais e a intensificação do seu uso no ambiente educacional têm impulsionado novas formas de ensinar e aprender matemática, especialmente em contextos que exigem alto nível de abstração, como o Cálculo Diferencial e Integral. Neste cenário, o software GeoGebra se destaca como uma ferramenta eficaz por permitir a construção, visualização e manipulação de objetos matemáticos de forma dinâmica e interativa. Este artigo apresenta duas construções no GeoGebra voltadas à compreensão do conceito de integral dupla sobre regiões retangulares. As construções ilustram graficamente a definição formal da integral por meio da soma dupla de Riemann, proporcionando uma experiência visual e exploratória do volume de sólidos limitados por superfícies em três dimensões.

Palavras-chave: *GeoGebra; integral dupla; tecnologias digitais.*

Construction of the Concept of Double Integral Using GeoGebra Software

ABSTRACT

The advancement of digital technologies and the increasing use of these tools in educational settings have driven new ways of teaching and learning mathematics, especially in contexts that require a high level of abstraction, such as Differential and Integral Calculus. In this scenario, GeoGebra software stands out as an effective tool by enabling the construction, visualization, and manipulation of mathematical objects in a dynamic and interactive way. This article presents two constructions in GeoGebra aimed at supporting the understanding of the concept of the double integral over rectangular regions. The constructions graphically illustrate the formal definition of the integral through the double Riemann sum, providing a visual and exploratory experience of the volume of solids bounded by surfaces in three dimensions.

Keywords: *GeoGebra; double integral; digital technologies.*

Introdução

Vivemos em uma sociedade profundamente marcada pela cultura digital, na qual a informação circula com velocidade e a tecnologia ocupa um papel central na vida cotidiana. Esses fatos impactam diretamente o processo educacional, exigindo novas abordagens didáticas e metodológicas, especialmente no ensino de disciplinas tradicionalmente desafiadoras como a Matemática. Nesse cenário, o uso

[1]Mestre em Matemática pela instituição Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Professor do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais (IFNMG), Januária, Minas Gerais, Brasil, E-mail: gustavo.gomes@ifnmg.edu.br

de tecnologias digitais nas salas de aula passou a ser não apenas desejável, mas necessário para promover uma aprendizagem mais interativa e alinhada à realidade dos estudantes.

> Acreditamos que, com a introdução de tecnologias digitais, como calculadoras gráficas, computadores e internet, a própria natureza da matemática pode ser alterada. Essa mudança ocorre porque os modos de representação e de comunicação da matemática se transformam, alterando, assim, não só a maneira como os conceitos são apresentados, mas também a forma como o conhecimento é construído, compartilhado e validado na sala de aula e fora dela. (Borba & Villarreal, 2005, p. 31)

Para Valente (1999), a utilização do computador na educação pode facilitar o processo de aprendizagem na construção do conhecimento nos diversos níveis de ensino. Diante dessas possibilidades, o educador tem a tarefa de examinar e adaptar este recurso nas práticas pedagógicas para proporcionar aulas dinâmicas e interativas. Segundo Moran (2006, p. 23),

> Um dos grandes desafios para o educador é ajudar a tornar a informação significativa, a escolher as informações verdadeiramente importantes entre tantas possibilidades, a compreendê-las de forma cada vez mais abrangente e profunda e a torná-las parte do nosso referencial.

Dentre os recursos tecnológicos disponíveis, o software GeoGebra tem se destacado como uma ferramenta poderosa no ensino de Matemática. O GeoGebra é um software gratuito e amplamente acessível a todas as idades que combina recursos de álgebra, geometria, cálculo e estatística em uma plataforma dinâmica que permite tanto a exploração individual quanto a mediação docente. Sua capacidade de gerar representações gráficas em duas e três dimensões favorece a visualização, a manipulação de parâmetros, o que o torna especialmente eficaz no ensino de tópicos como derivadas, integrais e equações diferenciais. Além disso, sua aplicação é compatível com metodologias ativas de ensino, promovendo maior autonomia, engajamento e participação dos estudantes.

No contexto específico do Cálculo Diferencial e Integral, a visualização concreta dos conceitos desempenha um papel fundamental para a construção do conhecimento. Muitos tópicos, como a definição de integral, o volume de sólidos e as somas de Riemann, envolvem abstrações complexas que se tornam mais compreensíveis quando representadas graficamente. A possibilidade de observar superfícies, regiões de integração e aproximações sucessivas por meio de construções digitais contribui significativamente para o desenvolvimento da intuição geométrica e para a compreensão dos significados envolvidos nos processos de integração.

> A compreensão do cálculo não deve ser construída exclusivamente sobre manipulações algébricas formais, mas apoiada em imagens mentais e representações visuais que permitam ao estudante estabelecer conexões significativas entre o conceito de integral e a ideia de área, acumulação ou volume. Tais imagens proporcionam um alicerce cognitivo que antecede e sustenta a formalização simbólica. (Tall, 1991, p. 9, [tradução nossa])

Entretanto, apesar de sua importância, o ensino do Cálculo nos cursos de graduação nas áreas de Exatas enfrenta desafios persistentes. Muitos estudantes apresentam dificuldades relacionadas à abstração dos conceitos, à transição do ensino médio para o universitário, à fragmentação entre teoria e prática e à ausência de conexões visuais e aplicadas, como salienta Tall (2013), ao destacar que a formalização precoce pode dificultar a construção de significados matemáticos mais profundos. Nesse contexto, a incorporação de recursos digitais, como o GeoGebra, atua como um elo entre o conteúdo teórico e sua aplicação concreta, facilitando o entendimento dos conceitos fundamentais do Cálculo.

O presente artigo tem como objetivo explorar construções interativas no ambiente GeoGebra para auxiliar no desenvolvimento do conceito de integral dupla em regiões retangulares. Por meio dessas construções, busca-se não apenas ilustrar geometricamente a definição formal da integral dupla e a soma dupla de Riemann, mas também oferecer aos estudantes e professores uma ferramenta que potencialize o aprendizado, promovendo um ambiente visual, investigativo e dinâmico para o estudo do Cálculo em duas variáveis.

Sendo assim, foram desenvolvidas duas construções interativas, ambas têm como objetivo ilustrar o processo de aproximação do volume de um sólido limitado superiormente por uma função de duas variáveis e inferiormente por um retângulo no plano *xy*, conforme descrito na definição formal da integral dupla. A primeira construção visa proporcionar uma compreensão intuitiva do volume por meio de prismas verticais, baseados nos valores da função $f(x,y)$ avaliados em pontos específicos da malha. A segunda construção segue mais fielmente a definição formal da integral dupla via soma dupla de Riemann, oferecendo uma visualização técnica e detalhada dos subretângulos e pontos amostrais presentes na definição, além de permitir maior aproximação com o valor exato da integral.

1. Definição da Integral Dupla

A definição formal de integral dupla sobre regiões retangulares, conforme apresentada por Stewart (2013, p. 874–877), parte da ideia de estimar o volume de um sólido delimitado superiormente pelo gráfico de uma função de duas variáveis e inferiormente por uma região retangular no plano *xy*. Dessa forma, considere uma função real f de duas variáveis reais definida sobre um retângulo fechado $R=[a,b]x[c,d]$ e suponha que $f(x,y)\geq 0$ para todo ponto (x,y) em R.

O objetivo é determinar o volume do sólido S compreendido entre o plano *xy*, a superfície definida pelo gráfico da função f e a região R. Para isso, divide-se o intervalo $[a,b]$ em m subintervalos de mesmo comprimento Δx e o intervalo $[c,d]$ em n subintervalos de mesmo comprimento Δy, formando, assim, uma malha que particiona R em mn subretângulos Rij, todos com área igual a $\Delta A= \Delta x\Delta y$.

Escolhe-se um ponto amostral Pij em cada subretângulos Rij e constrói-se, sobre cada um, um paralelepípedo cuja base coincide com Rij e cuja altura é dada por $f(Pij)$. O volume aproximado do sólido S pode, então, ser estimado pela soma dos volumes desses paralelepípedos:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\, \Delta A.$$

Esta soma é conhecida como soma dupla de Riemann. À medida que se aumenta os valores de m e n obtém-se uma melhor aproximação do volume verdadeiro do sólido. Quando m e n tendem ao infinito, essa soma converge, quando o limite existe, para o valor da integral dupla de f sobre R, definida por:

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij})\, \Delta A\,.$$

Mesmo quando $f(x,y)$ assume valores negativos em R, a definição da integral dupla permanece válida, interpretando-se geometricamente os volumes abaixo do plano xy como negativos. Esse processo de particionamento, amostragem e soma fornece o fundamento conceitual para a definição formal de integrais duplas em regiões retangulares e é essencial para a compreensão de diversas aplicações na física, engenharia e outras áreas das ciências exatas.

Embora essa definição seja fundamental para o Cálculo de várias variáveis, seu entendimento nem sempre é imediato para os estudantes. Como destaca Fernandes (2007), ao tratar das dificuldades na aprendizagem da integral definida:

> A maior parte dos alunos lida com a integral como uma fórmula a ser memorizada, sem compreender sua origem no processo de partição da área ou volume por meio das somas de Riemann" (p. 79).

Essa dificuldade conceitual pode se intensificar no caso das integrais duplas, devido ao aumento da complexidade e à necessidade de visualizar o volume em um espaço tridimensional. Por isso, o uso de representações visuais e recursos tecnológicos torna-se essencial para auxiliar na construção dos significados subjacentes à definição formal da integral.

2. O comando sequência no GeoGebra

O comando *sequência* do GeoGebra é uma ferramenta essencial para gerar conjuntos ordenados de objetos matemáticos, como pontos, segmentos, polígonos e prismas a partir de uma expressão recursiva ou parametrizada. Sua sintaxe básica permite a criação de listas com base em variáveis de controle, otimizando a construção de estruturas repetitivas e dinâmicas. Sua sintaxe básica é:

Sequência[expressão,variável,valor_inicial,valor_final,incremento(opcional)].

A *expressão* é o que será repetidamente gerado com base nos valores da variável de controle, a *variável* é o índice de repetição que assume valores de acordo com os limites estabelecidos (valor inicial e final) e o *incremento* define de quanto em quanto a variável irá variar a cada passo.

Nas construções apresentadas neste artigo, o comando *sequência* foi utilizado de maneira estratégica para subdividir a região retangular R em subretângulos menores, distribuir pontos amostrais e gerar, de forma automatizada, os paralelepípedos que representam a soma dupla de Riemann na definição da integral dupla. Por exemplo, a expressão

Sequência((a+i(b-a)/m,0),i,0,m)

gera uma lista de pontos igualmente espaçados no intervalo *[a,b]*, enquanto comando aninhados, como

Sequência(Sequência((x(Elemento(l1,i)),y(Elemento(l2,j))),i,1,m+1),j,1,n+1)

permitem formar uma malha bidimensional de pontos no plano *xy*, essencial para a construção dos subretângulos.

O uso desse tipo de comando permite ao GeoGebra construir representações visuais detalhadas, precisas e manipuláveis de processos matemáticos complexos, como a definição de integral dupla. Ao automatizar a geração de listas de pontos e retângulos, o comando possibilita a modelagem eficiente de estruturas repetitivas que seriam extremamente trabalhosas, ou impossíveis, de construir manualmente. Assim, o comando *sequência* se revela não apenas uma ferramenta técnica, mas também um recurso didático indispensável quando se pretende explorar ao máximo o caráter exploratório e investigativo do software.

3. Primeira Construção: Visualização Intuitiva do Volume

Inicialmente, definem-se controles deslizantes (com incremento 1) para os limites do retângulo *R*: *a* e *c* variando de -5 a 0, e *b* e *d* variando de *a+1* a 5 e de *c+1* a 5, respectivamente. Em seguida, adotou-se a função *f(x,y)=3−x^2-y^2*, pois seu domínio inclui o retângulo *R*, e criou-se dois controles deslizantes *m* e *n*, variando de 1 a 20 com incremento 1 representando o número de vezes que dividimos o intervalo *[a,b]* e *[c,d]*, respectivamente. Para visualizar a região *R*, construa as sequências *l1, l2* e *l3*, descritas abaixo, nesta ordem.

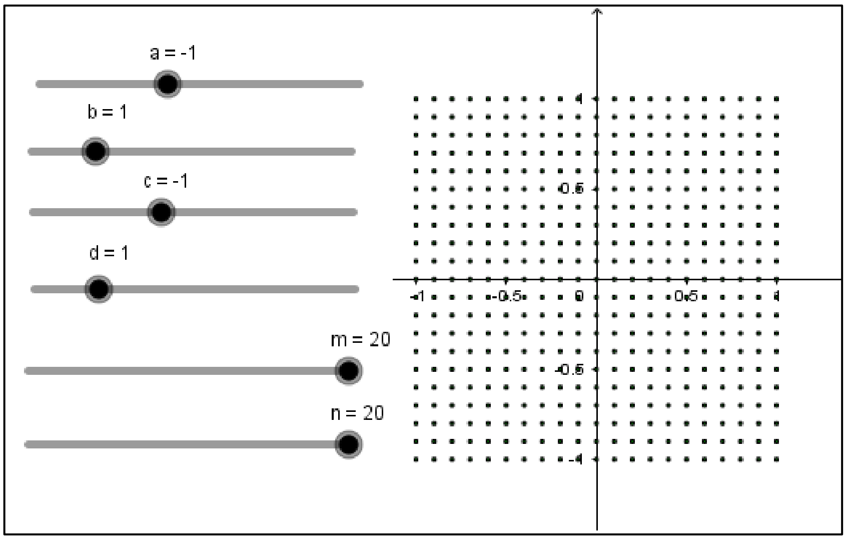
l1=Sequência((a+i(b-a)/m,0),i,0,m)*

l2=Sequência((0,c+i(d-c)/n),i,0,n)*

l3=Sequência(Sequência((x(Elemento(l1,i)),y(Elemento(l2,j))),i,1,m+1),j,1,n+1)

O comando *l1* gera os pontos que subdividem o eixo *x*, enquanto *l2* faz o mesmo no eixo *y*. Já o comando *l3* combina essas duas listas para formar uma matriz de pontos no plano, representando os vértices dos subretângulos da partição *mn* de *R*. Esses pontos servem de base para a construção gráfica dos prismas que ilustram a soma dupla de Riemann. Para prosseguir na construção, é aconselhável omitir os pontos das sequências *l1* e *l2*, pois essas sequências são construções auxiliares. Também, diminua o tamanho dos pontos de *l3* para 1.

Figura 1: Possível representação do retângulo *R*



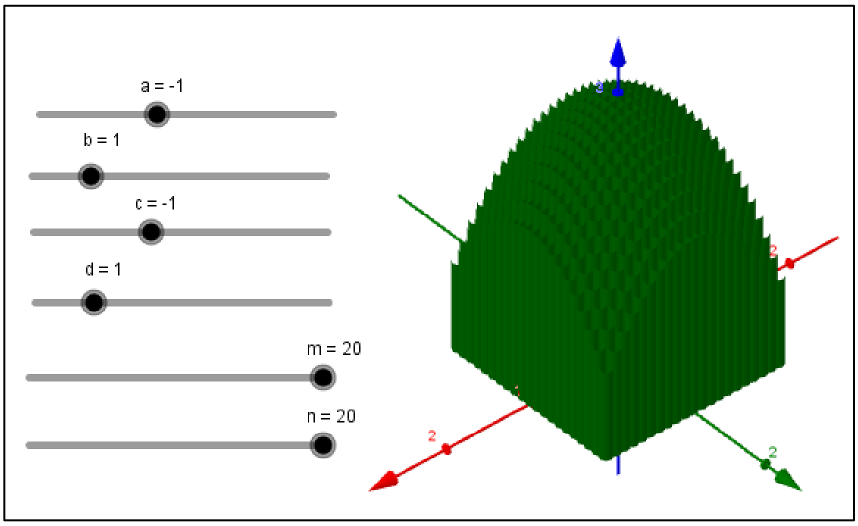
Fonte: Acervo da Pesquisa

Para construir um conjunto de segmentos no espaço que, quando se aumenta os valores de *m* e de *n* obtém-se uma aproximação do sólido *S*, informe a sequência abaixo.

l4=Sequência(Sequência(Segmento((x(Elemento(Elemento(l3,i),j)),y(Elemento(Elemento(l3,i),j)),0),(x(Elemento(Elemento(l3,i),j)),y(Elemento(Elemento(l3,i),j)),f(x(Elemento(Elemento(l3,i),j)),y(Elemento(Elemento(l3,i),j)))))),i,1,n+1),j,1,m+1)

Ao final do passo anterior, na aba opções, altere a espessura da linha dos segmentos da lista *l4* para 10 para uma melhor visualização do sólido *S*. Observe que quando altera-se os valores de *a,b,c* e *d*, é possível visualizar uma série de sólidos que representam a integral dupla de *f* sob o retângulo *R*.

Figura 2: Esboço de possível sólido *S*



Fonte: Acervo da Pesquisa

Finalmente, para obter o volume aproximado do sólido *S*, informe a sequência e a soma, respectivamente, descritas em seguida.

l5=l4((b-a)/m)*((d-c)/n)*

intapr=Soma(Soma(l5))

Nesse passo, vale ressaltar que *l5* é composta pelos volumes dos paralelepípedos de altura *f(x(Elemento(Elemento(l3,i),j)))* cuja base tem medidas *(b-a)/m* e *(d-c)/n*. Logo, o resultado obtido em *intapr* é uma aproximação do volume de *S*. Note que, dependendo das escolhar dos parâmetros contruídos e da função adotada, pode-se obter valores negativos em *l5* que representam volumes de paralelepípedos que estão localizados abaixo do plano *xy*. Além disso, quanto maior os valores de *m* e *n* e menor o retângulo *R*, o valor de *intapr* estará mais próximo do valor exato da integral dupla de *f* sobre a região *R*.

A primeira construção foi pensada como uma etapa inicial de familiarização dos estudantes com a ideia de volume sob uma superfície, proporcionando uma experiência de caráter intuitivo e acessível. Nessa fase, recomenda-se que o aluno assuma um papel ativo no processo de aprendizagem, tendo a oportunidade de construir e manipular os parâmetros da construção (como os limites de integração e o número de subdivisões) em tempo real.

Para garantir uma articulação adequada com a teoria, é fundamental que essa atividade não seja iniciada diretamente com a manipulação dos elementos no GeoGebra, mas sim antecedida por uma discussão conceitual. Essa discussão deve abordar o significado geométrico da integral dupla, contextualizando-a como um processo de aproximação de volumes sob superfícies em três dimensões, por meio da soma de volumes de paralelepípedos definidos sobre sub-regiões de uma partição retangular.

Durante a execução da atividade no GeoGebra, a mediação docente assume papel central, sendo orientada por perguntas investigativas e tarefas exploratórias que provoquem reflexão e promovam conexões conceituais, como: "O que acontece com a aparência do sólido quando aumentamos os valores de *m* e *n*?", "Como a forma dos prismas se relaciona com a função *f(x,y)* utilizada?" e "Se aumentarmos a subdivisão, o valor calculado da integral muda?". Essas perguntas incentivam a exploração ativa, o levantamento de hipóteses e a validação empírica.

O objetivo final é permitir que os alunos estabeleçam, de forma autônoma e progressiva, a conexão entre a representação visual gerada no software e a definição formal da integral dupla via soma de Riemann. Essa conexão dá sustentação à formalização simbólica, permitindo que a expressão matemática da integral não seja entendida como algo arbitrário ou desconectado, mas como uma generalização sistematizada de um processo empírico previamente compreendido.

4. Segunda Construção: Representação da Soma dupla de Riemann

A segunda construção foi planejada para apresentar, da forma mais fiel possível, a definição formal da integral dupla via soma dupla de Riemann. Para isso, construa dois controles deslizantes *m* e *n* variando de 1 a 6 com incremento 1 que possuirão as mesmas funções da construção anterior. Observe que o valor máximo é 6 e não 20 como definimos anteriormente. Além disso, como a construção segue fielmente a definição formal da integral dupla por meio da soma de Riemann, o volume do sólido *S* obtido é bastante próximo do valor exato, mesmo com um número reduzido de subdivisões da região retangular *R*.

O passo seguinte consiste em definir a função cujos valores serão utilizados para o cálculo do volume do sólido *S*, assegurando que o retângulo *R* esteja contido em seu domínio. Para fins de exemplificação, utiliza-se a mesma função adotada na construção anterior, porém agora com seu domínio limitado à região retangular *R*, por meio do seguinte comando inserido na caixa de entrada.

f=Função(3-x^2-y^2,x,0,1,y,0,1)

Agora, é necessário construir os paralelepípedos que compõem a soma dupla de Riemann, os quais representarão a aproximação do volume do sólido *S*. Para isso, o primeiro passo consiste em estabelecer os *mn* subretângulos que servirão de base para essas caixas tridimensionais. Essa malha de subdivisão é gerada por meio da sequência apresentada a seguir, o qual cria os polígonos que delimitam cada subregião da partição retangular no plano *xy*.

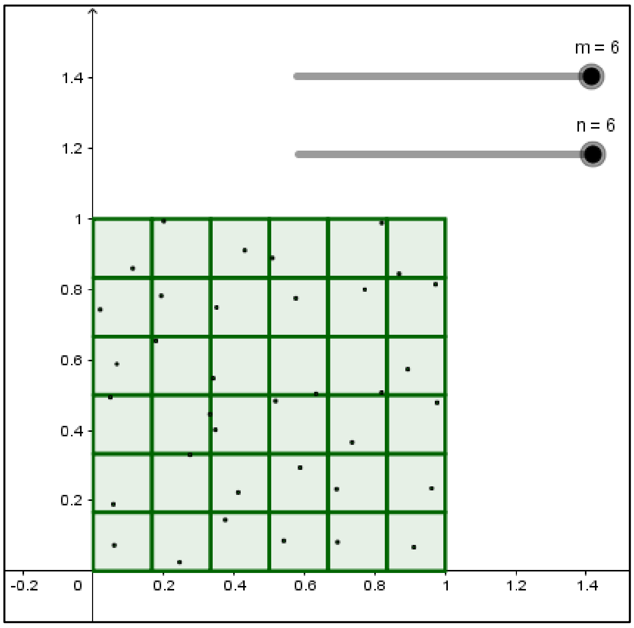
l1=Sequência(Sequência(Polígono((i/m,(j+1)/n),((i+1)/m,(j+1)/n),((i+1)/m,j/n),(i/m,j/n)),i,0,m-1),j,0,n-1)

Em seguida, informe a sequência seguinte para selecionar os pontos amostrais em cada um dos subretângulos construídos.

l2=Sequência(Sequência(PontoAleatórioEm(Elemento(Elemento(l1,i),j)),i,1,n),j,1,m)

Para facilitar a visualização dos objetos construídos no plano, recomenda-se ajustar o tamanho dos pontos da sequência *l2*. Para isso, clique com o botão direito sobre qualquer ponto da sequência, selecione *Propriedades*, vá até a aba *Estilo* e defina o tamanho como 1. Esse ajuste torna a visualização mais limpa e evita a sobreposição gráfica entre os elementos. É importante observar que, ao modificar os valores de *m* e *n*, os pontos amostrais são automaticamente redefinidos, uma vez que o comando *PontoAleatórioEm* considera que qualquer alteração nos parâmetros configura uma nova construção. Dessa forma, o software recalcula os pontos aleatórios, gerando diferentes amostras para cada nova configuração da malha, o que reforça o caráter dinâmico e exploratório da atividade.

Figura 3: Divisão de *R* em subretângulos para *m=n=6*

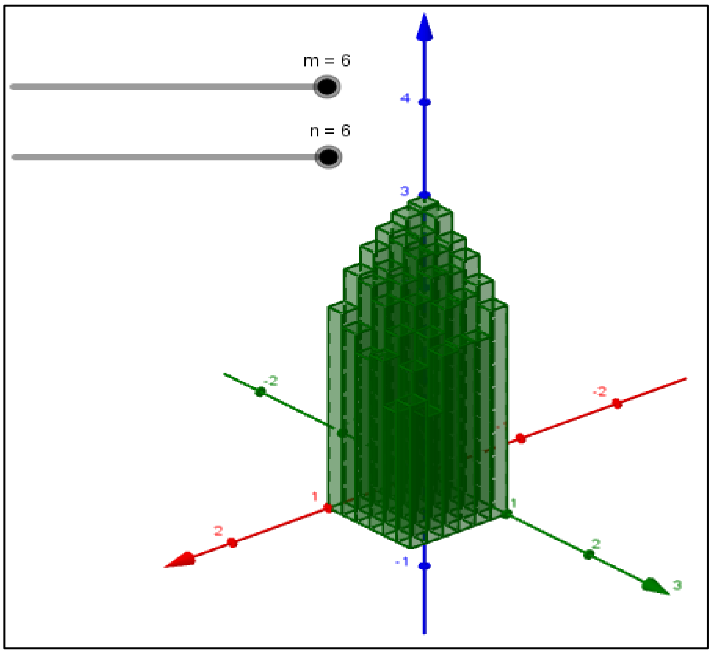


Fonte: Acervo da Pesquisa

Para gerar as *mn* caixas retangulares, informa-se a sequência abaixo. Além disso, altere a espessura das arestas dos prismas gerados clicando em *Propriedades*, *Estilo* e selecione a espessura da linha para 1.

l3=Sequência(Sequência(Prisma(Elemento(Elemento(l1,i),j),f(Elemento(Elemento(l2,j),i))),i,1,n),j,1,m)

Figura 4: Caixas retangulares para *m=n=6*



Fonte: Acervo da Pesquisa

Em seguida, insira o comando abaixo na caixa de entrada do GeoGebra. Esse comando calcula o valor aproximado do volume do sólido *S* por meio da soma dupla de Riemann, com base nas subdivisões e nos pontos amostrais definidos anteriormente. O resultado obtido representa uma boa estimativa da integral dupla nas condições estabelecidas.

int=Soma(Soma(Elemento(l3,i),i,1,m))

A segunda construção, de caráter mais formal, foi cuidadosamente elaborada com o propósito de aproximar o estudante da definição rigorosa da integral dupla por meio da soma dupla de Riemann, tal como apresentada nos livros de Cálculo Integral em várias variáveis. Ao contrário da primeira atividade, que enfatiza a intuição visual, esta demanda um envolvimento técnico mais aprofundado, exigindo que o aluno compreenda não apenas a ideia geométrica do volume, mas também os mecanismos formais de sua construção a partir de partições da região de integração.

Essa abordagem permite ao estudante vivenciar o processo de construção da integral desde suas bases conceituais, favorecendo a compreensão do papel desempenhado por cada elemento da soma de Riemann: a subdivisão do retângulo, a escolha dos pontos amostrais e a soma dos volumes parciais. O professor, por sua vez, atuará como mediador e organizador do ambiente de aprendizagem, estruturando sequências didáticas progressivas, que conduzam o aluno por meio de questionamentos, como: “Se usarmos o centro de cada subretângulo em vez de um ponto aleatório, o valor mudaria?” ou “Como a ideia de limite aparece implicitamente nessa construção?”, e orientações técnicas. É aconselhável que, ao final da atividade, os alunos sejam convidados a comparar os valores obtidos com o valor exato da integral.

Dessa forma, a construção assume um papel formativo essencial ao permitir que os estudantes transitem do concreto ao formal, conectando as manipulações visuais no GeoGebra à formulação matemática precisa do conceito. Ao fazer isso, promove-se a apropriação conceitual fundamentada não apenas na execução de procedimentos, mas na compreensão de seus significados subjacentes.

Considerações Finais

O uso de tecnologias digitais no ensino de Cálculo, como o GeoGebra, tem se mostrado uma estratégia eficaz para enfrentar os desafios associados à abstração dos conceitos matemáticos. As construções apresentadas neste trabalho evidenciam como a visualização dinâmica e a manipulação de elementos gráficos podem favorecer a compreensão da integral dupla, aproximando os estudantes dos significados geométricos e conceituais envolvidos no cálculo de volumes em três dimensões.

Ao integrar teoria e prática por meio de representações interativas, as abordagens apresentadas contribuem para uma aprendizagem mais efetiva, ao mesmo tempo em que ampliam as possibilidades de intervenção pedagógica por parte do docente. Conclui-se que a incorporação de recursos digitais como o GeoGebra não apenas moderniza as práticas pedagógicas, mas fortalece metodologias que valorizam a experimentação, a intuição visual e o protagonismo discente no ensino da matemática.

Referências

Alves, F. (2012). Engenharia didática para a construção de gráficos no cálculo: experiência num curso de Licenciatura em Matemática. In: **Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** (p. 1–21). Petrópolis, RJ.

Amorim, F. V., Sousa, G. C. de, & Salazar, J. V. (2011). Atividades com GeoGebra para o ensino de cálculo. In: **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática** (p. 1–12). Recife, PE. Disponível em https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1649/749. Acesso em 04/03/2025.

Borba, M. C. (1999). Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. In: M. A. V. Bicudo (Org.), **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas** (p. 285–295). São Paulo, SP: UNESP.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). **Tecnologias digitais e a reconfiguração do conhecimento: implicações para a educação matemática.** Campinas, SP: Papirus.

Fernandes, S. H. S. (2007). **O ensino da integral definida: uma abordagem por meio da visualização e da modelagem matemática** (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.

Gerhardt, T. E., & Silveira, D. T. (2009). **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre, RS: Editora da UFRGS.

Gravina, M. A., & Santarosa, L. M. (1998). A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: **Anais do IV Congresso RIBIE**. Brasília, DF.

Moran, J. M. (2006). Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In: J. M. Moran, M. T. Masetto & M. A. Behrens (Orgs.), **Novas tecnologias e mediação pedagógica** (10ª ed., p. 11–65). Campinas, SP: Papirus.

Sousa, G. C. de, Amorim, F. V., & Salazar, J. V. (2011). Atividades com GeoGebra para o ensino de cálculo. In: **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife, PE.

Stewart, J. (2013). **Cálculo: volume 2** (7. ed.). São Paulo, SP: Cengage Learning.

Tall, D. (Org.). (1991). **Advanced mathematical thinking**. New York: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2013). **How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics**. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Valente, J. A. (1999). **O computador na sociedade do conhecimento.** Campinas, SP: UNICAMP/NIED.

ENVIADO: 10/06/2025

ACEITO: 07/07/2025