https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i2p087-103

Apropriação Inventiva do GeoGebra: O Fazer Matemático na Interação entre Professores e Ambiente Dinâmico

TIAGO VENCATO MARTINS[1]
https://orcid.org/0009-0005-3099-6480
BRUNO TUMELERO FETTER[2]
https://orcid.org/0000-0003-2751-5314
ROBSON DA SILVA HESSLER[3]
https://orcid.org/0009-0000-9221-0635
MÁRCIA RODRIGUES NOTARE[4]
https://orcid.org/0000-0002-2897-8348
MARCUS VINICIUS DE AZEVEDO BASSO[5]
https://orcid.org/0000-0002-2312-9056

RESUMO

Este artigo investiga de que modo o uso inventivo do GeoGebra pode alterar o fazer matemático a partir da análise da resolução de um problema geométrico da 19ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, por professores de Matemática. A pesquisa, de natureza qualitativa, foi orientada pelas lentes da Gênese Instrumental e das potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica. A metodologia qualitativa adotada envolveu a gravação em áudio e vídeo e a análise das interações dos participantes com o GeoGebra. O estudo evidenciou momentos de instrumentalização de ferramentas, reorganizações cognitivas, construção e reconstrução de novos conhecimentos matemáticos. A atividade proposta promoveu a construção de uma figura geométrica dinâmica, a exploração de relações entre área e função afim e culminou na construção de uma função por partes via regressão linear. Os resultados apontam que propostas alinhadas ao uso criativo do GeoGebra podem gerar um ambiente epistêmico de aprendizagem, no qual os participantes desenvolvem estratégias próprias e transformam conceitos matemáticos.

Palavras-chave: *ambiente de geometria dinâmica; regressão linear; gênese instrumental.*

Inventive appropriation of GeoGebra: mathematical activity in the interaction between teachers and a dynamic environment

ABSTRACT

[1] Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSUL), Camaquã, RS, Brasil. E-mail: tiagovencatomartins@gmail.com.
[2] Mestre e doutorando pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor de Matemática da Rede Municipal de Ensino de Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: brunofetter26@gmail.com.
[3] Mestrando em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). E-mail: robsonhessler@gmail.com.
[4] Doutora em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGIE/UFRGS). Docente do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS, do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE/UFRGS) e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMAT/UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: marcia.notare@ufrgs.br.
[5] Doutor em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professor Titular do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: mbasso@ufrgs.br

This article investigates how the inventive use of GeoGebra can alter mathematical activity, based on the analysis of the resolution of a geometric problem from the 19th Brazilian Public School Mathematics Olympiad (OBMEP) by mathematics teachers. The qualitative research was guided by the lenses of Instrumental Genesis and the potentialities of dynamic geometry environments. The adopted methodology involved audio and video recording and analysis of participants' interactions with GeoGebra. The study revealed moments of tool instrumentalization, cognitive reorganizations, and both reconstruction and construction of new mathematical knowledge. The proposed activity promoted the construction of a dynamic geometric figure, the exploration of relationships between area and linear function, and culminated in the construction of a piecewise function via linear regression. The results indicate that proposals aligned with the creative use of GeoGebra can foster an epistemic learning environment in which participants develop their own strategies and transform mathematical concepts.

Keywords: *dynamic geometry environment; linear regression; instrumental genesis.*

Introdução

O papel das tecnologias digitais no processo de produção de conhecimento vem sendo discutido desde o último século. Papert discutiu a introdução dos computadores pessoais propondo compreender "como eles podem afetar a maneira das pessoas pensarem e aprenderem" (Papert, 1985, p. 15).

Para o ensino e a aprendizagem de Geometria, cabe destacar os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), que permitem a construção de figuras geométricas com propriedades invariantes. Isso possibilita ao sujeito explorar, conjecturar e testar suas hipóteses, modificando o fazer matemático. A interação entre o GeoGebra e o sujeito é mediada por suas ferramentas e pela possibilidade de arrastar (Sinclair & Robutti, 2013).

Neste artigo, propõe-se discutir as implicações do emprego dessa tecnologia, analisando as mudanças que podem causar na forma de os estudantes e os professores pensarem matematicamente. Assim, a pergunta de pesquisa que o guia é a seguinte: de que modo o uso inventivo do GeoGebra pode alterar o fazer matemático em termos de produção de pensamento e construção de conhecimentos matemáticos?

Por uso inventivo entende-se aquele emprego do GeoGebra que busca explorar suas possibilidades enquanto transformador do processo de ensino e de aprendizagem: um uso ativo, que permita a mudança do papel do professor, do processo de investigação do estudante e dos problemas explorados em sala de aula; enfim, um uso que não limite as possibilidades do AGD, permitindo-lhe desenrolar suas implicações pedagógicas. Neste caso, o uso do AGD não se resume à mera inserção em uma rotina pré-definida. Também se entende como inventivo aquele emprego do AGD que não se limita à aplicação de rotinas, como tutoriais ou sequências de atividades rígidas ou "passo a passo". Além disso, o uso inventivo implica utilizar o AGD para realizar explorações e produzir raciocínios de modos distintos daqueles feitos sem ele.

Para responder à pergunta de pesquisa, investigou-se um problema de geometria retirado da prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) de 2024. A investigação foi feita com professores de Matemática, desafiados a abordar o problema no GeoGebra. A análise, de cunho qualitativo, baseou-se principalmente nas contribuições de Sinclair e Robutti (2013) sobre as potencialidades dos AGD e na Teoria da Gênese Instrumental (Rabardel, 1995).

Identificou-se, mediante essa análise, que a resolução de problemas em AGD não se resume à aplicação de procedimentos. O uso do AGD possibilita simultaneamente reorganizar os processos mentais dos participantes, possibilitando a resolução do problema, (re)construir conhecimentos matemáticos e apropriar-se das ferramentas do ambiente GeoGebra por meio de uma interação mútua. Os participantes agem sobre o ambiente e ele oferece *feedback* instantâneo às suas ações, moldando o processo de exploração.

Nas próximas seções, as lentes teóricas dessa pesquisa são apresentadas com mais profundidade. Na seção 3, dedicada à metodologia, caracterizam-se a pesquisa, a coleta de dados e os participantes da pesquisa. Na seção 4, o problema explorado pelos participantes é enunciado, apresentam-se as ferramentas do GeoGebra que foram empregadas. Na seção 5, dividida de acordo com os momentos da produção de dados, a resolução do problema é analisada a partir das lentes teóricas da pesquisa, acompanhada de uma discussão sobre os resultados. Por fim, apresenta-se a conclusão na última seção.

1. AGDs como ambientes de aprendizagem

O uso de tecnologias para o ensino e a aprendizagem de Matemática vem sendo amplamente discutido, tanto na literatura quanto no debate público em Educação. O uso da calculadora, de computadores e de celulares gerou e ainda gera inquietações. Contudo "o uso de ferramentas sempre foi inseparável do expressar e fazer Matemática" (Roberts et al., 2013, p. 526, tradução nossa). O emprego de tecnologias como a escrita e desenho em blocos de argila para a resolução de problemas de Geometria é observado desde a Antiguidade, em povos como os babilônios (Roberts et al., 2013).

Os autores classificam as tecnologias não digitais de acordo com seu uso: de armazenamento, como o livro; de exposição, como o quadro-negro; de ilustração, como régua, compasso e transferidor; de cálculo, como o ábaco, a régua logarítmica e, mais recentemente, a calculadora. Assim, essas tecnologias são classificadas pelo seu uso, não sendo rara a utilização simultânea de mais de uma delas. As tecnologias computacionais, por sua vez, permitem a unificação desses usos em um único dispositivo.

Ambientes de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, não apenas reúnem potencialidades e utilidades de ferramentas não digitais: os AGD possibilitam um processo de produção de pensamento qualitativamente distinto, tendo impactos epistemológicos. Sinclair e Robutti (2013) evidenciam isso ao pontuar as razões para o uso do termo ambiente para se referir aos AGD, pelo fato de eles permitirem criar e explorar, por exemplo, construções estáveis sob ação do movimento.

Nessas construções, o sujeito pode realizar explorações, produzir conjecturas e testar suas hipóteses. Os autores destacam que essa possibilidade de exploração faz os AGD diferirem "radicalmente dos ambientes papel-e-lápis" (Sinclair & Robutti, 2013, p. 574), afetando a produção de raciocínios e argumentos.

Esse processo de exploração, produção de hipóteses e testes se dá diversas vezes durante a investigação do sujeito. Esses testes ocorrem por meio das ferramentas específicas de cada AGD, pelas medições que podem ser obtidas e pela possibilidade de arrastar. Com elas, é possível arrastar pontos livres e semilivres de modo que as propriedades inerentes à construção não se alterem. Nesse processo, o sujeito não se desvencilha, em nenhum momento, da representação visual do ente geométrico fornecida pelo AGD no seu processo de raciocínio ou argumentação. O AGD proporciona uma "continuidade – apesar da descontinuidade epistemológica – entre uma conjectura (afirmação hipotética) e a prova correspondente (sequência lógico-dedutiva de afirmações)" (Sinclair & Robutti, 2013, p. 575, tradução nossa).

Cabe destacar aqui o papel importante do recurso de arrastar nesse processo de passagem do aspecto figural – características específicas da figura como cor, formato e posição – para o aspecto conceitual, propriedades invariantes da construção. No processo de arrastar, o sujeito experiencia continuamente uma variedade de exemplos específicos de uma mesma construção. Assim, ao construir um quadrado em um AGD e arrastá-lo, o sujeito pode perceber mudanças na posição do quadrado. Nesse processo, "não é que se pode ver invariância no arrastar, mas que não se pode evitar percebê-la" (Battista, 2007, p. 152, tradução nossa). Logo, o arrastar "muda o modo como as formas são percebidas, passando de uma apreensão visual estática para uma atenção temporal àquilo que permanece invariante" (Sinclair & Robutti, 2013, p. 577, tradução nossa).

Além de seu aspecto cognitivo e epistemológico, o arrastar possui uma implicação metodológica: "ele pode revelar o processo cognitivo dos estudantes conforme eles trabalham nas tarefas" (Sinclair & Robutti, 2013, p. 579). Cabe destacar a classificação de Arzarello et al. (2002) para as modalidades do recurso arrastar de acordo com sua função cognitiva. Algumas das modalidades desse recurso são: o arrastar sem rumo, o arrastar limitado, o arrastar guiado, o arrastar em lugar geométrico (ou *locus) e* o arrastar teste.

No caso do arrastar sem rumo, o sujeito arrasta algum ponto da figura sem nenhuma intenção específica, explorando regularidades ou configurações possivelmente interessantes. No arrastar limitado, o processo é similar; contudo, o ponto é semilivre, estando limitado em seu movimento. No arrastar guiado, o sujeito arrasta um ponto da figura de modo a dar-lhe alguma forma particular.

Já no arrastar em *locus*, ele busca preservar alguma propriedade específica da figura. Nesse momento, o ponto movido perpassa um lugar geométrico definido, ainda que não percebido pelo sujeito. No arrastar alinhado, por sua vez, o local geométrico torna-se consciente - esse é um momento crucial para o delineamento de hipóteses. No arrastar teste, o sujeito move o ponto a fim de verificar se a construção mantém as propriedades conjecturadas.

2. Transformando o artefato GeoGebra em instrumento

Para compreender como o GeoGebra pode modificar o fazer matemático, é necessária uma lente teórica que permita tal análise. Uma das principais abordagens nas pesquisas envolvendo AGD é a Gênese Instrumental, tendo Rabardel (1995) como referência central (Sinclair & Robutti, 2013).

A Teoria da Gênese Instrumental centra-se na ideia de que os instrumentos não são uma entidade externa aos sujeitos, com propósito e forma de utilização previamente definidos. Os instrumentos são construções psicológicas, pessoais – um forno pode se tornar um secador, já um secador de cabelo, um descongelador de freezer.

Para além de empregos pouco usuais de ferramentas, Rabardel (1995) também destaca a existência de nuances na forma como diferentes sujeitos usam o mesmo artefato com o mesmo propósito, a depender de sua experiência. Ele menciona o uso de artefatos para a realização de exames de ultrassom. Enquanto médicos iniciantes baseiam sua utilização em um "esquema rígido focado em identificar órgãos", médicos experientes buscam "diagnosticar a patologia. É mais específico e seletivo, apoiando-se em uma comparação entre o órgão a ser explorado e órgãos de referência, que podem ser anatomicamente distintos" (Rabardel, 1995, p. 107).

Assim, um instrumento não é algo dado, com uso pré-definido e com propósito previamente estabelecido. Ele é uma construção pessoal. Assim, Rabardel (1995) denomina o objeto, por si só, como artefato. O instrumento é uma entidade dupla, formada pelo artefato e pelos esquemas de uso desenvolvidos pelo sujeito, que são pessoais. O conceito de esquema é central para a Gênese Instrumental. Rabardel toma Piaget por referência, partindo do seu conceito de esquema. Assim, ele entende "esquema" como a estrutura psicológica que surge assim como o comportamento dá origem a esforços repetitivos. Mas o conceito de esquema vai além de uma resposta a estímulos. O esquema fornece ao sujeito um modo de assimilar situações e objetos novos, de acordo com similaridade de aparência ou situação. Nesse processo, o sujeito atribui sentido aos objetos, permitindo a "extensão desses sentidos e a formação de novas redes de significação" (Rabardel, 1995, p. 70).

No processo de assimilação de situações e objetos, o esquema lhes dá propósito, expandindo o entendimento do sujeito e adaptando os próprios esquemas, caso essa assimilação não seja bem-sucedida. Cabe citar aqui um exemplo dado por Rabardel, obtido a partir de observações de Piaget. Nele, são observadas a assimilação e a adaptação de um esquema previamente desenvolvido, a saber: bater em objetos com um bastão. Uma criança tenta, inicialmente, pegar uma jarra que não estava ao seu alcance. Como o "esquema pegar objeto" não foi capaz de assimilar a situação, outro esquema é evocado, por analogia – "pegar bastão" e "bater em objeto com o bastão". Após tais batidas, o esquema se adapta, dando ao bastão um novo propósito de trazer objetos distantes para mais perto, ampliando a rede de significação de bastões, jarras distantes e esforço para alcançar objetos. Mais adiante, a criança busca assimilar outro objeto com esse mesmo esquema, tentando usar um livro para trazer objetos para perto.

A partir do conceito piagetiano de esquema, o autor cunha o que ele denomina "esquema de utilização" (Rabardel, 1995, p. 82) como aqueles esquemas associados a algum artefato. Tais esquemas são padrões de utilização que incluem a antecipação de objetivos, invariantes operacionais, regras de ação do tipo se...então, e inferências a partir dos invariantes e das informações disponíveis.

Os esquemas de utilização podem ser de dois tipos, a depender do objetivo que o sujeito busca cumprir. "Esquemas de uso" são aqueles associados a tarefas secundárias, isto é, ao manuseio do artefato. "Esquemas de ação instrumentada" são aqueles associados a tarefas primárias, ao objetivo principal do sujeito. Rabardel (1995, p. 83, tradução nossa) fornece um exemplo que elucida esses dois conceitos – o ato de realizar uma ultrapassagem possui invariantes operacionais – "análise da situação (...); indicação da intenção de ultrapassar; troca de marcha, se necessário; alteração da trajetória do veículo". Os esquemas de uso referem-se ao manuseio de cada elemento do veículo, como esquema de troca de marcha e de esquema de manuseio do volante. O esquema de ação instrumentada refere-se à concatenação de todos esses esquemas de uso para cumprir o objetivo primário – esquema de ultrapassagem.

A união do artefato com os esquemas de utilização desenvolvidos pelo sujeito é o que Rabardel (1995) denomina de instrumento. Logo, o instrumento é uma construção psicológica e pessoal. O desenvolvimento de esquemas de utilização implica na própria gênese do instrumento. Além disso, dois processos estão associados a essa gênese. A instrumentação constitui o processo de mudança do sujeito durante o desenvolvimento de seus esquemas, como produção de sentidos associada à situação ou a alteração de outros esquemas, não necessariamente associados à situação. A instrumentalização se dá pela emergência das características do próprio artefato, ou seja, pela identificação progressiva de suas possibilidades e limitações. Assim, a instrumentação afeta o sujeito e a instrumentalização impacta o artefato.

Com isso, a Teoria da Gênese Instrumental de Rabardel (1995) fornece lentes para investigar as mudanças causadas no sujeito ao utilizar um artefato como, por exemplo, o GeoGebra. Assim, as mudanças no entendimento do sujeito sobre uma situação matemática e no sentido dado por ele a conceitos e ferramentas do GeoGebra podem ser analisadas a partir deste referencial.

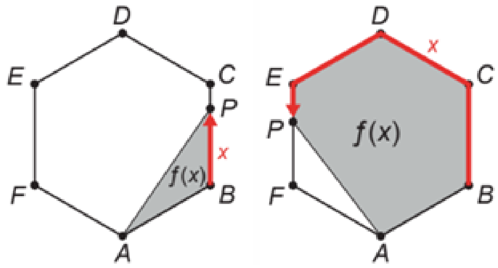
3. Metodologia

O processo de investigação se deu a partir do convite aos participantes da pesquisa para que resolvessem um problema da OBMEP com base em sua representação em um AGD, especificamente o disponibilizado pela plataforma GeoGebra. Eles utilizaram a versão GeoGebra Classic 5.0, instalada em um computador.

Os participantes foram dois professores (A e B) de Matemática, de escolas públicas, fato ao qual se associa a existência de esquemas de utilização prévios em relação ao uso do GeoGebra e de suas ferramentas enquanto instrumentos de aprendizagem. O estudo foi realizado de forma presencial em sala de aula, durante a disciplina Interfaces Digitais em Educação Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Informática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. A solução do problema ocorreu por meio da cooperação entre os professores participantes do estudo. A tela do computador e as falas foram registradas em vídeo, documentando a interação dos participantes com o GeoGebra.

O problema apresentado aos participantes está descrito no Quadro 1.

Um hexágono regular ABCDEF tem lados de medida 1. Um ponto P desloca-se na borda do hexágono, a partir do vértice B, passando pelos vértices C, D e E até chegar ao vértice F. Seja x a distância percorrida pelo ponto P e seja $f(x)$ a área da região com vértices em P, A e outros vértices do hexágono pelos quais P já passou. A figura mostra algumas dessas regiões.



a) Calcule $f(1)$. **b)** Determine a expressão de $f(x)$ quando P se desloca no lado DE. **c)** Esboce abaixo o gráfico de f.

Quadro 1. O problema – https://www.geogebra.org/m/vgkhzs98

Fonte: Instituto de Matemática Pura e Aplicada [IMPA] (2025)

A partir da modelagem do problema em ambiente dinâmico, buscou-se compreender de que forma os conhecimentos matemáticos foram mobilizados na construção das representações e, ao mesmo tempo, verificar possíveis aprendizagens matemáticas que decorreram da interação com o ambiente, buscando analisar os detalhes e as consequências de tal interação.

Para isso, a resolução do problema foi decomposta em três etapas, idealizadas pelos participantes a partir da estrutura do enunciado do problema. No primeiro momento, construiu-se a representação geométrica da figura de acordo com as propriedades determinadas; em seguida, construiu-se um gráfico com o objetivo de representar visualmente a relação entre a área e o caminho poligonal percorrido; e, por fim, buscaram-se métodos para a representação da expressão algébrica que daria origem à função representada pelo gráfico.

Tais etapas constituíram os momentos de produção de dados que serão analisados neste artigo. Esses dados compreendem as gravações de áudio e vídeo das interações dos participantes com o GeoGebra e dos diálogos entre eles, além das anotações físicas que realizaram ao longo da atividade.

A seção a seguir descreve mais detalhadamente as ferramentas utilizadas na resolução do problema. Elas apresentam-se como potencialidades para a utilização de regressão linear por meio de listas no GeoGebra, mobilizando conhecimentos básicos de programação no próprio ambiente.

4. Problema e recursos técnicos

Esta seção detalha os recursos do GeoGebra empregados pelos professores no desenvolvimento da solução computacional. A justificativa para a escolha desse problema reside em sua natureza intrigante e não óbvia, que explora a conexão entre as áreas de figuras planas e a linearidade. A literatura oferece diversos exemplos de concepções errôneas sobre o comportamento de magnitudes em uma, duas e três dimensões. O caso mais conhecido está no diálogo *Mênon* de Platão, em que um escravizado, ao ser indagado por Sócrates, mestre de Platão, ao desenhar um quadrado com o dobro da área de um quadrado conhecido, sugere, a princípio, dobrar o lado original (De Bock et al., 1996).

A ilusão da linearidade é um obstáculo persistente no raciocínio matemático de muitos estudantes, que tendem a aplicar modelos lineares a situações em que tal relação não é válida, como nos problemas que envolvem áreas de figuras planas. Para esses autores, os alunos frequentemente acreditam que, se as dimensões lineares de uma figura aumentam em determinado fator, sua área também crescerá proporcionalmente a esse fator, quando na verdade o crescimento da área ocorre de forma quadrática (De Bock et al., 1996).

No entanto, é possível observar também o fenômeno oposto: há situações em que os estudantes deixam de perceber que a linearidade pode e deve ser aplicada, especialmente em contextos que envolvem o cálculo de áreas. Isso ocorre, por exemplo, em problemas em que a variação de uma medida linear (como o comprimento de um lado de um retângulo, mantendo o outro fixo) gera uma variação proporcional da área, representada por uma função linear. Nesse caso, diferentemente da ilusão apontada por De Bock et al. (1996), o desafio está na dificuldade dos próprios estudantes em reconhecer que certas relações envolvendo área podem ser modeladas linearmente, desde que uma das dimensões permaneça constante e a outra varie.

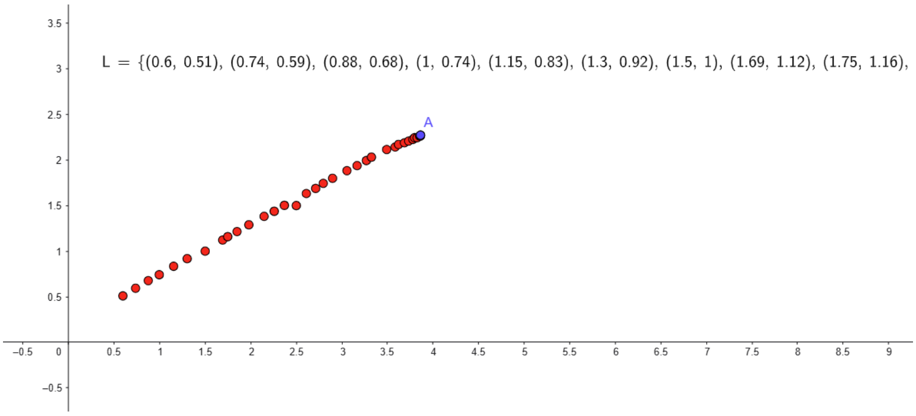
Neste contexto, alguns trabalhos exploram a associação entre a área de figuras planas e representações gráficas em AGDs, como exemplificado pelo trabalho de Salin (2014), que busca expressar a variação da área em função de uma das dimensões da figura, como, por exemplo, o comprimento de um lado. Uma estratégia frequentemente utilizada para esse propósito faz uso do recurso "Rastro" do ambiente GeoGebra.

A ideia consiste em construir um ponto cuja abscissa representa uma das medidas da figura, como o lado ou a altura, e cuja ordenada corresponde à área do polígono formado. Ao ativar o recurso "Rastro" desse ponto e variar dinamicamente essa medida, o rastro do ponto gera um esboço do gráfico que representa a relação funcional entre a medida linear e a área.

Embora essa abordagem seja utilizada em diferentes propostas didáticas, este artigo propõe uma nova estratégia de construção dessa representação gráfica, oferecendo uma alternativa metodológica que amplia as possibilidades de exploração ao propor o trabalho com regressão linear, quadrática, exponencial ou outras regressões disponíveis no GeoGebra.

A abordagem inventiva proposta neste trabalho envolve a coleta dinâmica das coordenadas de um ponto, seja ele ponto livre ou ponto representativo da área de um polígono – enquanto se move, e seu armazenamento em uma lista. A figura 1 ilustra o ponto A, com movimento livre, e a correspondente lista de pontos **L**, que contém as coordenadas iniciais percorridas pelo ponto A.

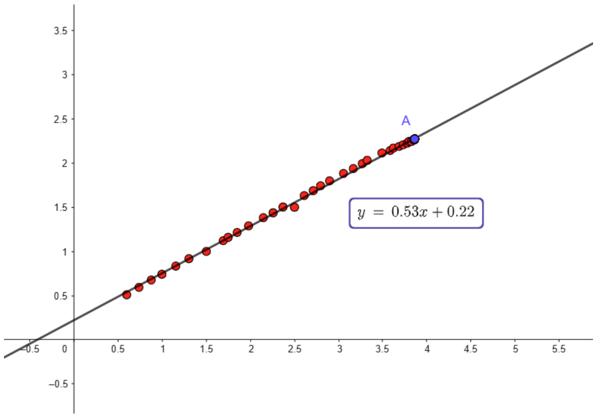
Figura 1: Lista L contendo as coordenadas iniciais do ponto A



Fonte: Acervo da pesquisa – https://www.geogebra.org/m/yxdr5z8e

Destaca-se que a lista de pontos **L** se comporta de maneira similar ao rastro do ponto **A**, que pode ser visualizado com o comando "Exibir Rastro". No entanto, a lista oferece novas possibilidades para o manuseio dos pontos em comparação ao recurso rastro. Por exemplo, a lista de pontos **L** pode ser facilmente mostrada ou ocultada, o que não é possível mediante a utilização do recurso rastro. É possível também, a partir dessa abordagem, utilizar as coordenadas dos pontos coletados como um conjunto de dados para a análise de algum tipo de regressão. A figura 2 apresenta a regressão linear gerada a partir da lista **L**, utilizando o comando "RegressãoLinear(L)".

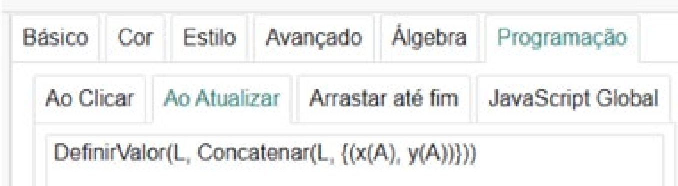
Figura 2: Regressão linear a partir da lista L



Fonte: Acervo da pesquisa – https://www.geogebra.org/m/e3vvzvfe

Por meio da programação do ponto **A**, é computacionalmente possível coletar as coordenadas por onde o ponto passa. Isto é feito por meio de um conjunto de comandos aninhados. À medida que o ponto **A** é atualizado, a lista **L** define seu valor pela concatenação das coordenadas de **A**. O comando utilizado para isso foi “DefinirValor(L, Concatenar(L, {(x(A), y(A))}))” acessando as propriedades do ponto **A**, na aba Programação/Ao Atualizar, como mostrado na figura 3.

Figura 3 – Comando que coleta as coordenadas do ponto A na lista L



Fonte: Acervo da pesquisa

A presente ideia, fundamentada na utilização estratégica e instrumentalizada (Rabardel, 1995) das ferramentas do GeoGebra, apresenta potencial para o desenvolvimento de trabalhos com modelagem em AGDs. Dessa forma, tanto professores quanto estudantes podem ser incentivados a explorar sua criatividade na busca por soluções para problemas mais complexos. Na seção seguinte, será apresentada a análise da conduta cognitiva dos participantes durante a resolução do problema proposto. Tal resolução se deu por meio do emprego da coleta das coordenadas dos pontos e será analisada sob a perspectiva da Gênese Instrumental proposta por Rabardel (1995).

5. A emergência de conhecimentos matemáticos na Gênese do Instrumento

Esta seção apresenta a análise dos dados produzidos dividida de acordo com os momentos da resolução do problema, a saber: elaboração da representação geométrica da figura conforme as propriedades previamente estabelecidas; construção de um gráfico destinado a ilustrar visualmente a relação entre a área e o percurso poligonal realizado; e, por fim, investigação dos métodos para expressar a formulação algébrica responsável pela geração da função apresentada no gráfico.

A seguir, apresentam-se recortes de indícios de instrumentalização ao longo da construção da representação geométrica da figura descrita pelo problema.

5.1 Representação e exploração inicial no GeoGebra

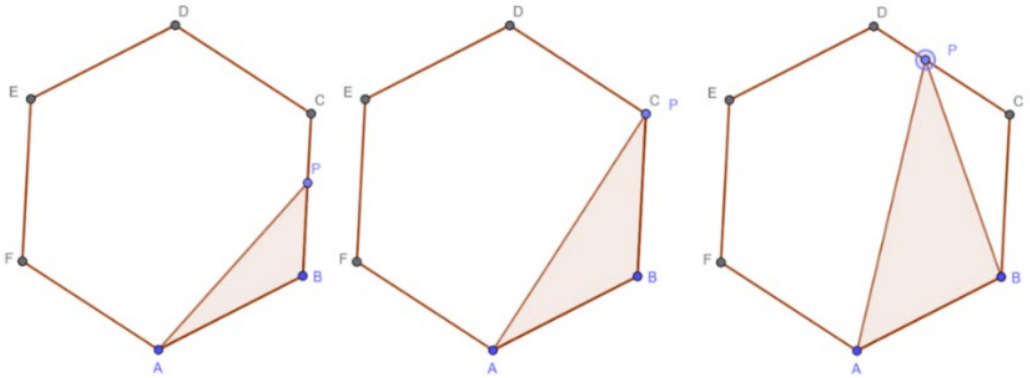
Os participantes foram desafiados a modelar o problema utilizando o AGD e, para isso, mobilizaram conhecimentos matemáticos prévios, relacionando-os às ferramentas disponíveis no GeoGebra.

O processo de exploração dos participantes iniciou-se pela construção do hexágono com a ferramenta Polígono Regular, seguido pela demarcação dos pontos e pela definição de um novo polígono definindo a área descrita pelo problema, a qual constituiria o objeto de investigação. Como o objetivo de pesquisa não estava necessariamente relacionado à resolução do problema da OBMEP, tal qual solicitado pelo enunciado apresentado no quadro 1, inicialmente não se destacou a necessidade de utilizar a distância

x percorrida pelo ponto **P** no hexágono, deixando aberta a possibilidade de os participantes construírem suas próprias estratégias de modelagem da área.

Neste momento, houve um desequilíbrio em que os participantes construíram um polígono inscrito no hexágono, mas que não atingia o objetivo esperado – o de acrescentar vértices à medida em que o ponto **P** coincidia com os pontos **C**, **D**, **E** e **F**, ilustrados na figura 4.

Figura 4: Fato que causou desequilíbrio cognitivo nos participantes



Fonte: Acervo da pesquisa – https://www.geogebra.org/m/gnze3qpc

Ao longo dos diálogos que se seguem, os participantes identificaram a necessidade de encontrar uma forma para que, ao arrastar o ponto **P**, os vértices do hexágono fossem inseridos na definição do polígono cuja área deveria ser analisada. Verbalmente, já surgiram indícios de que os participantes procuravam uma forma de construir uma relação de condicionalidade. Este fato pode ser constatado na fala do Professor A:

"... é que tem que ter uma relação que assim...se o ponto, o teu ponto P, ali, se ele estivesse para a frente do C, o C tem que entrar no vértice do polígono... Isso não existe, talvez isso precise usar o lance das relações de SE, que eu não sei como faz no GeoGebra".

(Fala do Professor A, 2025)

Na sequência o Professor B fala:

"...a gente tem que fazer em termos de ângulo, porque o ângulo só aumenta, o ângulo nunca diminui. Agora a gente precisa estabelecer em termos de ângulo"

(Fala do Professor B, 2025)

A escolha do objeto utilizado como condição para a inserção desses vértices na construção se deu a partir do momento em que um dos participantes analisou as ferramentas disponíveis no AGD uma a uma e, após um período de reflexão, tentou utilizar a ferramenta Ângulo para definir quais vértices seriam utilizados a partir da posição do ponto **P** e do ângulo **BÂP**, a partir de agora denominado α.

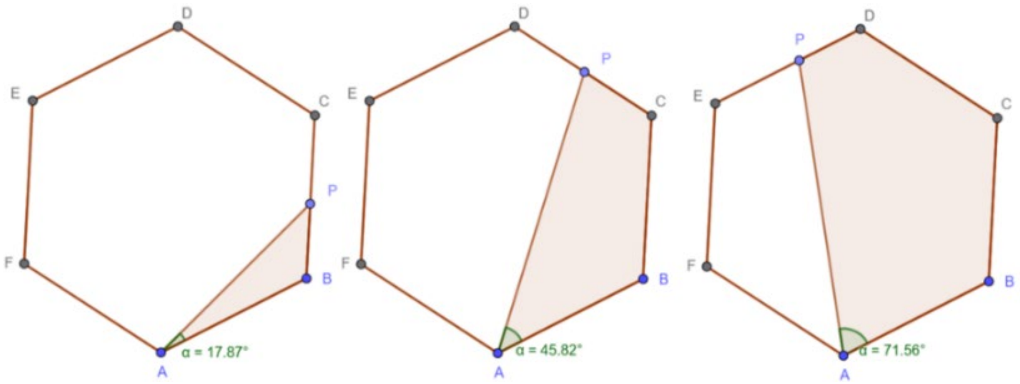
A partir disso, os participantes construíram o polígono inscrito no hexágono utilizando o comando Se com condicionantes relacionados à medida do ângulo α. A seguinte fala do professor traz indício de uma apropriação inventiva de uma ferramenta que, originalmente, foi criada para uma outra finalidade:

"...mas eu preciso colocar outros SE dentro desse mesmo comando".

(Fala do Professor B, 2025)

Com esse comando, cada intervalo de medidas definidas de acordo com características do hexágono introduz o vértice necessário correspondente, permitindo a dinamicidade adequada. A partir do código: Se (0° ≤ α ≤ 30°, Polígono (A, B, P), Se (30° < α ≤ 60°, Polígono (A, B, C, P), Se (60° < α ≤ 90°, Polígono (A, B, C, D, P), Se (90° < α ≤ 120°, Polígono(A, B, C, D, E, P))))), foi definido o polígono inscrito, representado na Figura 5, cuja área é o objeto de estudo do problema.

Figura 5: Instrumentalização da ferramenta ângulo



Fonte: Acervo da pesquisa – https://www.geogebra.org/m/ekjmdzqe

Dessa forma, entende-se que os participantes construíram uma nova função para a ferramenta Ângulo, a partir da qual foi possível atingir um objetivo que anteriormente não era associado a esse objeto matemático. Houve um processo de instrumentação, no qual o desenvolvimento de um novo esquema deu origem a um novo conhecimento matemático.

Destaca-se que os esquemas utilizados pelos participantes da pesquisa surpreenderam os pesquisadores por utilizarem objetos matemáticos diferentes dos esperados. Neste momento, esperava-se, por exemplo, que seria necessária a introdução do comando Lista, disponível no AGD, porém tal recurso não foi empregado, revelando as diferentes possibilidades criativas que o AGD põe à disposição do sujeito na construção autônoma de seus processos cognitivos.

5.2 Investigando o comportamento da área inscrita no hexágono

O próximo passo referido pelo problema envolve a análise da área do polígono inscrito no hexágono e sua relação com o caminho percorrido pelo ponto, no caso da construção feita pelos participantes da pesquisa, denominado ponto **P**. Neste momento, os participantes começaram a procurar estratégias para fixar a trajetória do ponto **P**, pois perceberam que ele não poderia percorrer todo o hexágono quando se tem o objetivo de demarcar a área inscrita de acordo com o problema. Além disso, conforme já observado na seção de descrição do problema, há uma discussão no campo da Matemática acerca da linearidade da área, visto que é comum que estudantes de Matemática confundam, em um primeiro momento, o crescimento de áreas quadráticas como proporcionalmente lineares.

Neste estudo, no entanto, a produção de dados se deu com professores de Matemática, que já carregam pressupostos e conhecimentos matemáticos prévios, advindos de suas trajetórias acadêmicas e profissionais. Nesse sentido, percebeu-se pelo diálogo entre os participantes que, ao relacionarem o conceito de área com suas duas dimensões (vertical e horizontal), traziam a expectativa de que o crescimento da área fosse modelado a partir de uma função quadrática, com comportamento parabólico.

Para verificar tal hipótese, os participantes foram incentivados a explorar os recursos do GeoGebra, de forma a definir uma representação visual gráfica inicial do comportamento da área do polígono construído. Para isso, um novo ponto **I** (figura 6) foi construído e teve suas coordenadas definidas a partir das estratégias descritas abaixo. Com a intenção de definir a abscissa do ponto **I**, foi necessária a criação de dois caminhos poligonais. O caminho poligonal **BCDEF**, de comprimento fixo, mantém o ponto **P** de acordo com a trajetória proposta no problema. Esse caminho foi necessário pois, conforme o enunciado do problema, o ponto **P** não poderia percorrer as arestas **AB** e **AF**.

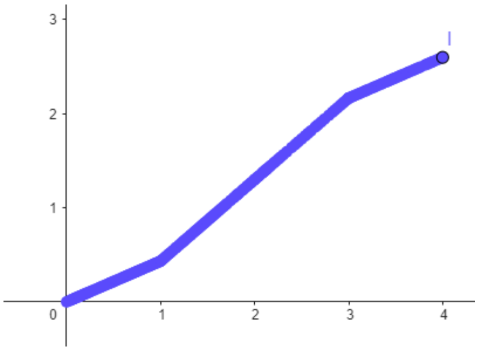
Em seguida, foi definido um segundo caminho poligonal de acordo com a trajetória do ponto **P**, cujo comprimento variável dá a medida x indicada no problema. Para isso, utilizou-se novamente a ferramenta CaminhoPoligonal associada a um novo encadeamento de condições do comando **Se**. O código que define o segundo caminho poligonal encontra-se a seguir: Se(0° ≤ α ≤ 30°, CaminhoPoligonal(B, P), Se(30° < α ≤ 60°, CaminhoPoligonal(B, C, P), Se(60° < α ≤ 90°, CaminhoPoligonal(B, C, D, P), Se(90° < α ≤ 120°, CaminhoPoligonal(B, C, D, E, P))))).

A seguinte fala do Professor A traz indícios da instrumentalização da ferramenta Ângulo, do GeoGebra, para a criação de um novo caminho poligonal que dá a medida x do problema:

> *"...a gente vai ter que criar um caminho poligonal novo em função desse ângulo, o mesmo que a gente fez ali. Se o ângulo for menor do que tal, o caminho, o caminho poligonal vai ser de B até P. Se ele passar de 60º, vai ser B, C e P. Se ele passar de 90º, vai ser B, C, D e G... deixa que eu vou fazer, deixa comigo."*
>
> (Fala do Professor A, 2025).

Para definição da ordenada, foi utilizado o valor da área do polígono inscrito, obtida pela ferramenta Área. A partir das coordenadas mencionadas, definido o ponto **I** e habilitado seu rastro, obteve-se a representação gráfica do comportamento de crescimento da área disponível na figura 6.

Figura 6: Esboço do gráfico através do rastro do Ponto I



Fonte: Acervo da pesquisa

Neste momento, percebe-se que a área, mesmo se tratando de uma relação que geralmente envolve duas grandezas relacionadas a duas dimensões distintas, neste caso, é representada por uma função por partes, cujas partes são funções polinomiais de primeiro grau. Essa percepção passa a ser examinada pelos participantes, que debatem sobre a linearidade e chegam à conclusão de que ela se dá devido ao fato de que há variação de apenas uma das dimensões dos triângulos que compõe o polígono, mantendo-se a base ou a altura sempre constante. Dessa forma, fica compreensível o fato de que a função da área apresenta comportamento linear.

Entende-se, a partir das reflexões dos participantes, a ocorrência de um reflexionamento, em que o conceito de área e seu comportamento foram elevados a um novo patamar cognitivo.

> [...] a abstração reflexionante comporta, sempre, dois aspectos inseparáveis: de um lado, "reflexionamento" (réfléchissement), ou seja, a projeção (como através de um refletor) sobre um patamar superior daquilo que foi tirado do patamar inferior (por ex., da ação à representação) e, de outro lado, uma "reflexão" (réflexion), entendida esta como ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do interior (Piaget, 1995, p. 274).

Os participantes conseguiram identificar, a partir da quantidade de elementos que estavam variando na construção, se o crescimento da área apresentava comportamento linear ou quadrático. Nesse sentido, compreende-se que um conhecimento matemático já construído pelos participantes – o fato de que a área geralmente é modelada a partir de uma função quadrática devido às duas dimensões envolvidas – foi desequilibrado a partir da ação de arrastar e da visualização simultânea do rastro que revela o comportamento da área. A partir disso, surge um conhecimento enriquecido, mais apropriado matematicamente, relacionando o comportamento da área com a variação dos elementos que, de fato, a definem.

Além disso, os participantes da pesquisa debateram sobre as mudanças de inclinação da representação gráfica esboçada, que delimitam as partes da função da área. Nesse aspecto, percebe-se que os participantes validaram uma hipótese já constituída previamente, de que seria necessária a divisão do problema devido à diferença entre os triângulos que compunham a área delimitada.

Por fim, com a figura construída e com a visualização da representação gráfica da área, passa-se ao último momento de exploração no AGD, em que os participantes são desafiados a encontrar a expressão algébrica que origina o gráfico. Os dados deste momento serão analisados na próxima seção.

5.3 Definição da expressão algébrica via métodos computacionais

Os professores participantes da pesquisa já haviam explorado o comportamento da função da área a partir da construção da figura e da representação gráfica constituída a partir do recurso Rastro. Portanto, já expressavam verbalmente, por exemplo, o fato de que essa função deveria ser definida por partes e que cada uma delas seria definida a partir de uma expressão afim própria.

Ao serem desafiados a definir a expressão algébrica da função via métodos computacionais, ou seja, utilizando os recursos do próprio AGD, questionaram a necessidade de alguma ferramenta que desse suporte ou substituísse a realização das manipulações algébricas necessárias.

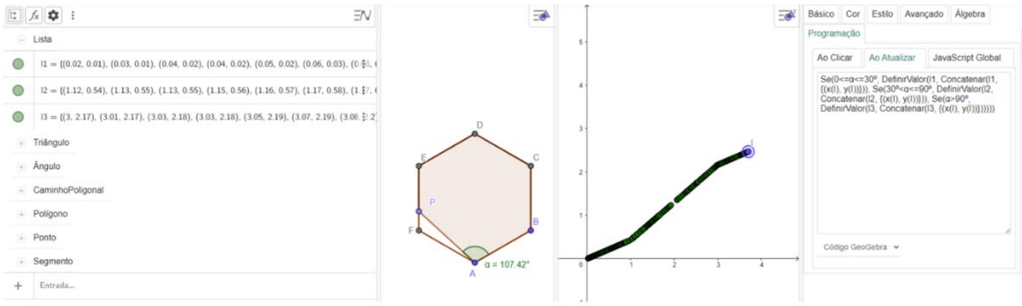
Frente à questão trazida pelos participantes, foi necessária a apresentação, por parte dos pesquisadores, de comandos disponíveis no AGD que não eram conhecidos por eles. Entre esses comandos, destacam-se Lista, Concatenar e RegressãoLinear, que ao serem utilizados de forma associada, conforme exemplificado na seção 4, tornaram possível a coleta dos pares ordenados que formam o trajeto percorrido pelo ponto I. O uso associado desses comandos permitiu armazenar estes elementos em listas que posteriormente puderam ser utilizadas junto ao comando RegressãoLinear para a obtenção das expressões algébricas que constituem a função por partes.

Os participantes adaptaram o uso dos comandos exemplificados ao seu próprio objetivo. Dessa forma, constituíram três listas que armazenavam os pares ordenados percorridos pelo ponto **I,** de acordo com a variação das coordenadas deste mesmo ponto. Entre elas, destacam-se: a lista **l1**, associada à primeira parte da função, que armazena os pares ordenados percorridos pelo ponto **I** ao representar a área determinada pelos pontos **A**, **B** e **P**, com **P** entre os pontos **B** e **C**; a lista **l2**, associada à segunda parte da função, que armazena os pares ordenados associados à área determinada pelos pontos **A**, **B**, **C** e **P** com **P** entre **C** e **D** e, em seguida, pelos pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **P**, com **P** entre **D** e **E**; e, por fim, a lista **l3**, associada à terceira parte da função, que armazena os pares associados à área delimitada pelo polígono formado pelos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **P**, com **P** entre **E** e **F**.

As listas foram preenchidas com as coordenadas do ponto **I**, por meio do comando a seguir, que continua utilizando a variação do ângulo α como condicionante: Se(0<=α<=30º, DefinirValor(l1, Concatenar(l1, {(x(I), y(I))})), Se(30º<α<=90º, DefinirValor(l2, Concatenar(l2, {(x(I), y(I))})), Se(α>90º, DefinirValor(l3, Concatenar(l3, {(x(I), y(I))}))))).

Na figura 7, é possível verificar o comando determinado nas propriedades do ponto **I**, na aba Programação/Ao Atualizar, de forma a possibilitar o armazenamento dos pares ordenados, equivalentes aos utilizados pelo recurso Rastro do AGD.

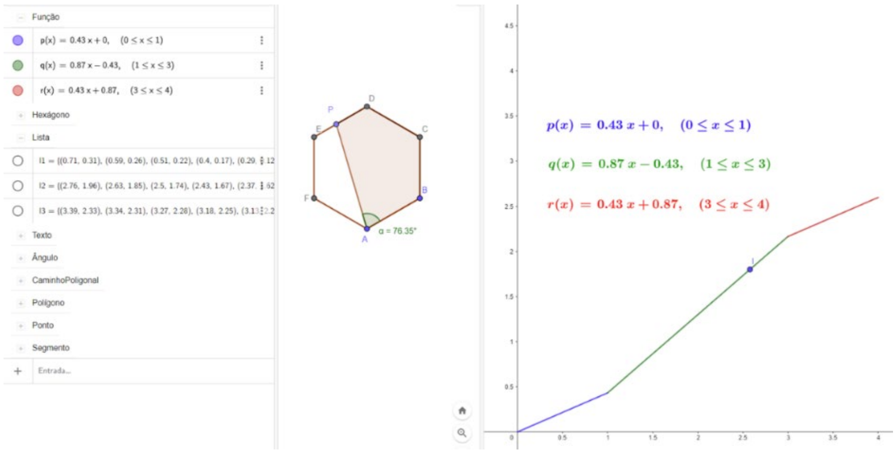
Figura 7: Listas preenchida com pares ordenados pelos quais passou o Ponto I



Fonte: Acervo da pesquisa

Com o armazenamento dos pares ordenados nas listas **l1**, **l2** e **l3**, foi possível determinar as expressões algébricas que constituem as partes da função da área, por meio dos comandos Função (RegressãoLinear(l1),0,1), Função (RegressãoLinear(l2),1,3) e Função (RegressãoLinear(l3),3,4), encontrando-as de forma computacional, de acordo com o exibido na figura 8 abaixo.

Figura 8: Regressão linear a partir das listas l1, l2 e l3



Fonte: Acervo da pesquisa

A partir do aninhamento de comandos construídos pelos participantes da pesquisa e apresentados nesta seção, foi possível verificar indícios de aprendizagem matemática e de programação no GeoGebra a partir da instrumentalização de objetos matemáticos e computacionais antes desconhecidos pelos participantes, como por exemplo, o uso de listas e da regressão linear. Além disso, foi possível verificar que tais objetos foram utilizados de forma associada a objetos já conhecidos, como o ângulo, para atingir objetivos específicos.

Importante destacar que as ferramentas e os comandos apresentados pelos pesquisadores não foram utilizados pelos participantes exatamente da forma exemplificada, havendo uma adaptação para o contexto que os próprios participantes construíram no AGD. Tal aspecto se materializa, por exemplo, na decisão e no desafio autoimposto pelos participantes em não abandonar o uso do ângulo nas condicionantes necessárias, persistindo em uma construção autoral. Nesse processo de exploração dos comandos de regressão, também se percebeu que os participantes dedicaram um tempo a observar como se comportavam as diferentes variações de regressão disponíveis no AGD, momento em que definiram pontos aleatórios e testaram o comportamento da regressão ao mover estes pontos. Essa exploração também permitiu comparar o comportamento de diferentes regressões, como linear, polinomial e exponencial.

Tal aspecto, associado aos conhecimentos prévios disponíveis e ao objetivo em questão, proporcionou a construção de estratégias de resolução do problema e validação das hipóteses constituídas. Isso evidencia a forma como a interação entre sujeito e AGD, pautado pela coordenação de ações e a reflexão sobre os retornos do instrumento, propicia um ambiente rico para a construção de novos conhecimentos matemáticos.

Conclusão

Esta pesquisa buscou responder à pergunta: de que modo o uso inventivo do GeoGebra pode alterar o fazer matemático em sala de aula, em termos de produção de pensamento e construção de conhecimentos matemáticos? A análise da atividade proposta, centrada na representação gráfica da área de um polígono, revelou que a interação criativa dos participantes com o AGD mobilizou processos cognitivos significativos, estruturando um percurso de construção ativa do conhecimento matemático. A resolução do problema proposto exemplificou como a aprendizagem pode emergir da dinâmica estabelecida entre o sujeito e a ferramenta digital, configurando o que Rabardel (1995) denomina de Gênese Instrumental, com forte apoio na visualização, experimentação e abstração.

O primeiro momento relevante foi a instrumentalização da ferramenta Ângulo, do AGD, ao qual os participantes atribuíram uma nova função no contexto da tarefa: não para medir, mas para controlar logicamente a construção do polígono, por meio do comando condicional **Se**. Essa apropriação inventiva de uma ferramenta originalmente criada para outro fim ilustra o uso inventivo da tecnologia, alinhado às ideias de Papert (1985), e demonstra um nível sofisticado de controle e adaptação, típico dos processos de instrumentalização descritos por Rabardel (1995).

Num segundo momento, os participantes pensaram sobre a relação entre a medida de um lado e a área do polígono, reconhecendo a linearidade presente nessa relação. A transição da geometria estática para a função matemática envolveu abstrações sucessivas que, conforme Piaget (1995), caracterizam processos de reflexão sobre a ação – uma forma de abstração reflexionante. Segundo o autor, a construção das estruturas operatórias exige uma interiorização das ações, sua coordenação e sua reversibilidade, elementos que se tornaram evidentes na reinterpretação da atividade pelos participantes, especialmente quando passaram a prever a forma do gráfico antes mesmo de gerar os dados.

No terceiro movimento, novos conhecimentos foram construídos por meio do uso de listas e da ferramenta de regressão, envolvendo tanto conceitos matemáticos quanto aspectos de programação no GeoGebra. A representação gráfica da função da área a partir dos dados coletados e o ajuste de uma função que modelasse esse comportamento mostraram a apropriação de recursos do GeoGebra, constituição de novos esquemas de utilização e construção de novos conhecimentos matemáticos, como por exemplo aqueles relativos a regressões, culminando na construção de um novo instrumento para esses professores de Matemática. Aqui se manifestou de forma nítida o que Sinclair e Robutti (2013) descrevem como uma das potências dos AGDs: a possibilidade de mobilização e visualização de diferentes representações dinâmicas, promovendo o desenvolvimento de ideias matemáticas de forma integrada.

O GeoGebra, nesse processo, operou como andaime cognitivo, permitindo o trânsito entre o concreto e o abstrato, entre o visual e o simbólico. Os professores não se comportaram como receptores passivos de instruções, ao contrário, dialogaram com o AGD, interpretando os *feedbacks* visuais e numéricos, ajustando seus comandos, refinando estratégias e reformulando hipóteses. Esse diálogo contínuo entre sujeito e artefato gerou um sistema cognitivo dinâmico, no qual o conhecimento foi construído pela interação entre sujeitos e objetos. A resolução da tarefa não foi, portanto, uma simples aplicação de conteúdos prévios nem um passo a passo algorítmico, mas a produção efetiva de conhecimento matemático a partir da exploração e da modelagem de um problema.

Os resultados apresentados neste estudo têm implicações pedagógicas. O uso do AGD, aliado à proposta de atividade, alterou o fazer matemático dos participantes não apenas por disponibilizar recursos computacionais potentes, mas sobretudo por possibilitar que esses recursos fossem apropriados de maneira inventiva e epistemologicamente ativa e produtiva.

A interação ativa com o GeoGebra favoreceu a formulação de hipóteses, a testagem de estratégias e a construção de novos significados, deslocando o foco de uma aplicação mecânica de fórmulas para um processo investigativo, reflexivo e construtivo. Esse tipo de uso da tecnologia digital, conforme propôs

Papert (1985), rompe com a lógica da simples reprodução de procedimentos e instaura um modo de fazer Matemática em que o estudante atua como autor de suas próprias construções cognitivas, apropriando-se das ferramentas digitais como instrumentos de pensamento e expressão matemática.

Referências

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *34*(3), 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Battista, M. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. Em *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 843–908).

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Puig, L., & Gutiérrez, A. (1996, janeiro 1). The illusion of linearity: A persistent obstacle in pupils' thinking about problems involving length and area of similar plane figures. Em *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2). Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Matemàtica; Valencia, Spain.

IMPA. (2025). *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. http://www.obmep.org.br/provas.htm

Papert, S. M. (1985). *Logo: Computadores e educação*. Brasiliense.

Piaget, J. (1995). *Abstração reflexionante: Relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais* (Fernando Becker & Petronilha Beatriz Gonçalves e Silva, Trads.). Artes Médicas.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. https://hal.science/hal-01017462

Roberts, D. L., Leung, A. Y. L., & Lins, A. F. (2013). From the Slate to the Web: Technology in the Mathematics Curriculum. Em M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Orgs.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (p. 525–547). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_17

Salin, E. B. (2014). *Matemática dinâmica: Uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas*. https://lume.ufrgs.br/handle/10183/108425

Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). Technology and the Role of Proof: The Case of Dynamic Geometry. Em M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Orgs.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (p. 571–596). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_19

ENVIADO: 17/07/2025

ACEITO: 09/10/2025