https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i2p145-152

Curva de Perseguição: apresentando o problema clássico utilizando o GeoGebra[1]

VICTOR COELHO[2]

https://orcid.org/0009-0001-2929-874X1

JOSÉ ANTÔNIO PIRES FERREIRA MARÃO[3]

https://orcid.org/0000-0003-3169-96119

RAIBEL DE JESUS ARIAS CANTILLOT[4]

https://orcid.org/0000-0001-5052-83899

RESUMO

O problema da Curva de perseguição, geralmente apresentado, modelado e resolvido em cursos de Cálculo Diferencial e Integral será ilustrado no decorrer deste trabalho com o auxílio do software GeoGebra. Ao longo do texto, será considerado o problema que consiste em analisar a solução da equação obtida através da modelagem do seguinte problema: determinar a trajetória descrita por um cão, que inicialmente na posição (c,0), c>0 corre com velocidade b em direção a um gato que sai da origem com velocidade a na direção do eixo y positivo. Feita a modelagem e solução do Problema de Valor Inicial correspondente, será possível analisar o comportamento da curva para diferentes valores atribuídos para as velocidades do cão e do gato através do campo de entrada, função presente no software GeoGebra.

Palavras-chave: *GeoGebra; Curva de Perseguição; Equações Diferenciais Ordinárias.*

Pursuit Curve: Presenting the Classical Problem Using GeoGebra

ABSTRACT

The problem of the pursuit curve, commonly presented, modeled, and solved in Differential and Integral Calculus classroom, will be illustrated throughout this paper with the assistance of GeoGebra software. Throughout the text, we will consider the problem of analyzing the solution of the equation obtained by modeling the following problem: determine the trajectory described by a dog, which initially at position (c,0), c>0, runs at speed b toward a cat that leaves the origin at speed a in the direction of the positive y-axis. Once the modeling and solution of the corresponding Initial Value Problem have been completed, it will be possible to analyze the behavior of the curve for different values assigned to the speeds of the dog and cat through the input field, a function present in the GeoGebra software.

Keywords: *GeoGebra;Pursuit Curve; Ordinary Differential Equations.*

[1] Apoio: Universidade Federal do Maranhão
[2] Bacharel em Ciência e Tecnologia pela UFMA. São Luís, Maranhão, Brasil.E-mail: victor.coelho@discente.ufma.br.
[3] Doutor em Física pela Universidade de Brasília UnB. Professor da UFMA. São Luís, Maranhão, Brasil e Professor da Universidade Estadual do Maranhão - UEMA, São Luís, Maranhão, Brasil. E-mail: josemarao@cecen.uema.br.
[4] Doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo - USP. Professor da UFMA, Balsas, Maranhão, Brasil. E-mail: raibel.jac@ufma.br.

Introdução

A apresentação de problemas envolvendo curva de perseguição demonstra a versatilidade do Cálculo Diferencial e Integral para resolver problemas. Não obstante, o estudo em questão carece de interpretação geométrica mais profunda, com representação das diferentes formas com que a curva de perseguição se apresenta quando as velocidades do gato e do cão variarem. Ao contrário do que aconteceria se a análise fosse feita em qualquer outro *software* matemático, em que a visualização de cada caso só pode ser vista separadamente, o GeoGebra proporciona a análise de diferentes situações na mesma tela, de acordo com a necessidade de quem precisa analisar o problema.

A utilização de recursos computacionais como ferramentas para auxiliar na compreensão de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral foi proposta por Peter Lax, na década de 1980, ocasião que surgiu o texto, do mesmo autor, intitulado "Reforma do Cálculo". Lax propôs a utilização de calculadoras e programas de computador para auxiliar o ensino do Cálculo Diferencial e Integral (Bigotte de Almeida, Queiruga-Dios & Cáceres, 2021). Atualmente os programas podem ser divididos em dois grupos: o primeiro grupo é formado por programas que auxiliam a compreensão dos conteúdos, já o segundo grupo é constituído por programas que podem ser utilizados para implementação numérica, efetuação de cálculos e consequente utilização na vida profissional dos egressos. São exemplos de programas do segundo grupo: Maple, MathLab e Mathematica. Esses programas possuem bibliotecas que permitem ao usuário autonomia para a obtenção de resultados dos seus cálculos, sejam eles numéricos ou analíticos.

O GeoGebra e o CAR Metal, por exemplo, pertencem ao primeiro grupo de programas mencionados acima, pois através deles o docente pode gerar gráficos, construir figuras planas e espaciais de maneira única, valendo-se das funcionalidades do programa, que permitem variar as figuras geradas de acordo com a conveniência do professor, facilitando a compreensão dos assuntos apresentados.

A importância da apresentação das figuras e das interpretações geométricas para a compreensão de teorias abordadas na Matemática é ressaltada por (Zimmermann & Cunningham, 1991). Os autores mencionam que, segundo David Hilbert, há duas tendências em Matemática, a primeira é a Lógica e a segunda é a intuição. Os mesmos autores citam (Rival, 1987), e este último apresenta um fato relevante para a análise em tela *"*os diagramas são, obviamente, tão antigos quanto a própria matemática. A geometria sempre dependeu fortemente em imagens e, por um tempo, outros ramos da matemática também o fizeram." Convém aqui destacar a importância das interpretações geométricas bem como a importância de vislumbrar a possibilidade de experimentar através das variações de determinados valores que podem figurar em determinados problemas. Por ser um *software* de Geometria Dinâmica o GeoGebra possibilita tanto a representação gráfica quanto a apresentação dinâmica do problema, como será constatado ao longo do texto.

A apresentação de figuras, diagramas e gráficos é comprovadamente útil além de ser um recurso consolidado na Matemática. A evolução da Tecnologia, sobretudo aquela atinente a Computação Gráfica, teve início na década de 1980, com desenvolvimento do Cabri-Géomètre, iniciais oriundas da junção das palavras Cahier de Brouillon Informatique, cujo significado é Caderno de Rascunho Informático (Souza, 2001), marcando o início da utilização em larga escala de recursos que possibilitam poderosas interpretações geométricas.

Em suma, o objetivo deste trabalho é apresentar o problema clássico da curva de perseguição, aos moldes enunciados no resumo, por entender a importância da sua modelagem e da sua solução não só para a compreensão de temas específicos do Cálculo Diferencial e Integral, mas, principalmente pela possibilidade que os usuários do GeoGebra terão de obter diferentes curvas para o problema proposto, atribuindo valores diferentes para a velocidade do cão, para a velocidade do cão e para a posição de partida do gato. Para cumprir o objetivo apresentado, o trabalho foi dividido da seguinte forma: apresentação e modelagem da curva de perseguição; resolução do problema de valor inicial para a determinação da curva; algumas considerações importantes acerca do GeoGebra e finalmente a construção de um programa, em GeoGebra, que ficará disponível para os interessados no próprio site do GeoGebra, possibilitando manipulações dos valores indicados anteriormente.

1. Curva de Perseguição: Aspectos Históricos e Obtenção da Equação

1.1 A Origem das Curvas de Perseguição

A curva de perseguição, conforme definida pelo matemático George Boole, descreve o trajeto de um ponto enquanto ele se move em direção a outro ponto que também está em movimento, ambos com velocidade uniforme, ao longo de uma curva específica (Boole, 1877). Este conceito remonta ao século 5, quando o filósofo grego Zenon de Eléia propôs o paradoxo de Aquiles e a tartaruga. Nesse paradoxo, Aquiles, mesmo sendo muito mais rápido que a tartaruga, nunca consegue alcançá-la devido à vantagem inicial dada à tartaruga, resultando em um problema de perseguição intrigante que introduz o conceito de limite na Matemática. Apesar de ser um exemplo simples, sua solução permanece em aberto do ponto de vista filosófico (Jr, 2015).

Outro problema fascinante relacionado à curva de perseguição é o problema de Apolônio. Nele, dado o movimento de um navio em uma direção conhecida, busca-se determinar o curso que outro navio, em perseguição, deve seguir para interceptá-lo no menor tempo possível (Soldatelli, 2016). Conforme discutido em (Lopes & Tort, 2014), a solução para esse problema envolve encontrar os pontos simultaneamente acessíveis pelos dois navios, formando um circuito de Apolônio. Esse circuito oferece as possíveis posições no qual o navio perseguidor pode interceptar o navio perseguido, proporcionando uma estratégia eficiente para alcançar esse objetivo.

1.2 Modelo Matemático do Problema

O problema consiste em determinar a trajetória descrita por um cão, que inicialmente na posição $(c, 0)$ corre com velocidade b em direção a um gato que sai da origem com velocidade a na direção do eixo y positivo.

Sejam dois pontos distintos R e S no plano $\mathbb{R}^2$. Para colocar um contexto, suponhamos que esses pontos representam as posições de um gato (perseguido) e um cão (perseguidor), respectivamente. Nesta seção, será discutido o problema clássico, chamado de problema de perseguição no sentido de determinar a trajetória C (o rastro do cão) descrita por S quando ele persegue o gato.

Indiquemos por C' a curva descrita pelo gato quando este foge do cão. Para fixar ideias, é necessário supor as seguintes condições:

- O gato move-se ao longo do eixo y, partindo da origem, para cima. Mais precisamente

$$R = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\};$$

- No instante t=0, o cão está no ponto S=(c,0), com c>0, isto é, o cão está a uma distância de c unidades à direita do gato. O gato (perseguido) parte da origem $(0,0)$ e se move ao longo do eixo y com velocidade constante a. Portanto, em qualquer instante, sua posição é:

$$R = (0, at).$$

- Por outro lado, o cão (perseguidor) se move ao longo da curva C. Em um instante qualquer t sua posição S, em um ponto genérico da curva, é

$$S = (x, y).$$

Inicialmente, é necessário considerar que o cão sempre corre em direção ao gato e, em qualquer instante t, a reta tangente à trajetória do cão em S deve passar por R, onde o gato se encontra. Mais precisamente,

$$m_{tangente} = m_{SR},$$

em que

$$m_{tangente} = \frac{dy}{dx}$$

E m_{SR} é a inclinação da reta que passa pelos pontos $R = (0, at)$ e $S = (x, y)$, o que gera

$$m_{SR} = \frac{y - at}{x}.$$

Ainda é possível escrever:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y-at}{x};$

ou ainda,

$x\frac{dy}{dx} = y - at.$

Derivando esta última em relação a x, é imediato que:

$\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - a\frac{dt}{dx},$

que pode ser finalmente escrito da seguinte forma:

$x\frac{d^2y}{dx^2} = -a\frac{dt}{dx}.$

Utilizando a regra da cadeia, o termo $\frac{dt}{dx}$ é reescrito, introduzindo a variável s (comprimento de arco), da seguinte maneira:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx},$$

em que $\frac{ds}{dx} = -\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, é uma expressão oriunda do estudo do comprimento de arco de uma curva, uma vez que

$$s = -\int_c^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Ainda é possível identificar que $\frac{ds}{dt} = b$, conclusão obtida do fato de que a velocidade do cão é b.

A equação será finalmente escrita da seguinte maneira:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

com $k = \frac{a}{b}$.

A seguir será apresentado e resolvido o Problema de Valor Inicial cuja solução fornecerá a função, que será objeto da análise que este trabalho propõe. Convém destacar que os casos abaixo serão analisados ao longo deste trabalho:

Caso 1: $k < 1$ (O perseguidor é mais rápido)

Neste caso, $a < b$, isto é, a velocidade do cão é superior à velocidade do gato e o resultado inevitável é que o cão sempre intercepta o gato em um tempo finito.

- Caso 2: $k = 1$ (As velocidades são iguais)

A distância entre eles ser aproximará de um valor limite, mas nunca será nula.

- Caso 3: $k > 1$ (O perseguido é mais rápido)

A velocidade do gato é superior à velocidade do cão, que consegue escapar sem ser alcançado.

2. Resolução do Problema de Valor Inicial

A equação obtida na seção anterior vai compor o seguinte Problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} x\dfrac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} \\ y(c) = 0 \\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=c} = 0 \end{cases}.$$

As condições que figuram no Problema de Valor Inicial acima, pode ser justificada da seguinte forma:

(i) $y(0) = c$, *foi inserida uma vez que o cão encontra-se no ponto* $(c, 0)$*;*

(ii) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$, *vetor velocidade é horizontal, apontado para a origem.*

A resolução será obtida fazendo $\frac{dy}{dx} = q$, o que gera

$$x\frac{dq}{dx} = k\sqrt{1+q^2},$$

que é uma equação diferencial separável de primeira ordem, cuja solução é a seguinte:

$$\ln\left(q + \sqrt{1+q^2}\right) = ln\left(\frac{x}{D}\right)^k,$$

em que D é a constante de integração obtida.

Considerando a condição inicial do problema $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} = 0$, é possível concluir que $D = c$. Agora, dado que $q = \frac{dy}{dx}$, é possível obter

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^k - \left(\frac{x}{c}\right)^{-k}\right].$$

A integração da última expressão utilizando a condição inicial $y(c) = 0$ gera, finalmente, a seguinte solução:

$$y = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)\frac{1}{c^k} + \left(\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right)\frac{1}{c^{-k}}\right] + \frac{ck}{k^2-1}.$$

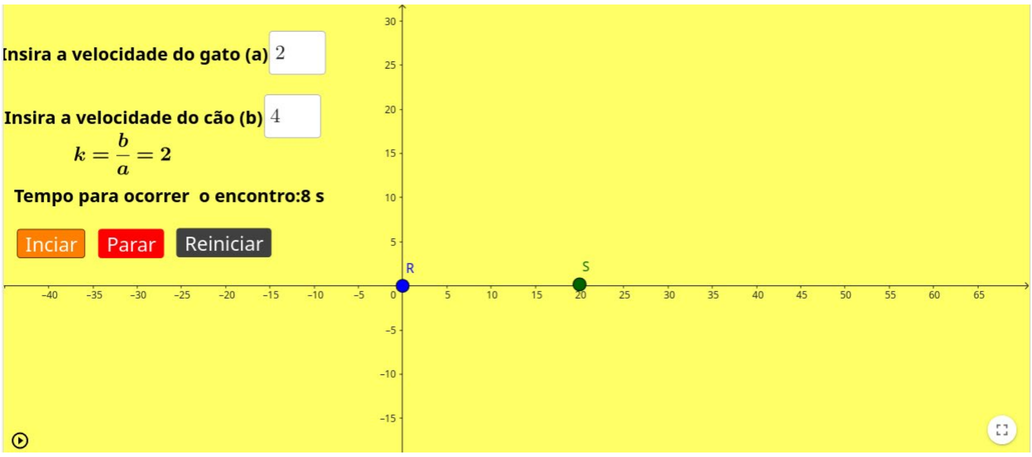
A solução acima merece uma análise para diferentes valores de c e, principalmente, de k, que é o quociente entre a velocidade do cão e a velocidade do homem, respectivamente.

3. Construção do Programa

A construção de um programa interativo, que ficará disponível para qualquer usuário na página do GeoGebra, foi realizada considerando que $k = \frac{a}{b}$ assumirá diferentes valores de acordo com a variações dadas a a e b. Assim, “ganharão vida” a velocidade do gato e a velocidade do cão, permitindo ao usuário do programa a obtenção de diferentes curvas para diferentes valores atribuídos às respectivas velocidades.

Inicialmente serão criados dois controles deslizantes, o primeiro vai apresentar a variação da velocidade do cão, aqui denotada por a. Já o segundo, b, representará a velocidade do cão. É necessário impor que nenhuma das velocidades acima deverá ser nula.

Figura 1: Tela do programa que está disponível para os usuários com visualização dos campos de entrada



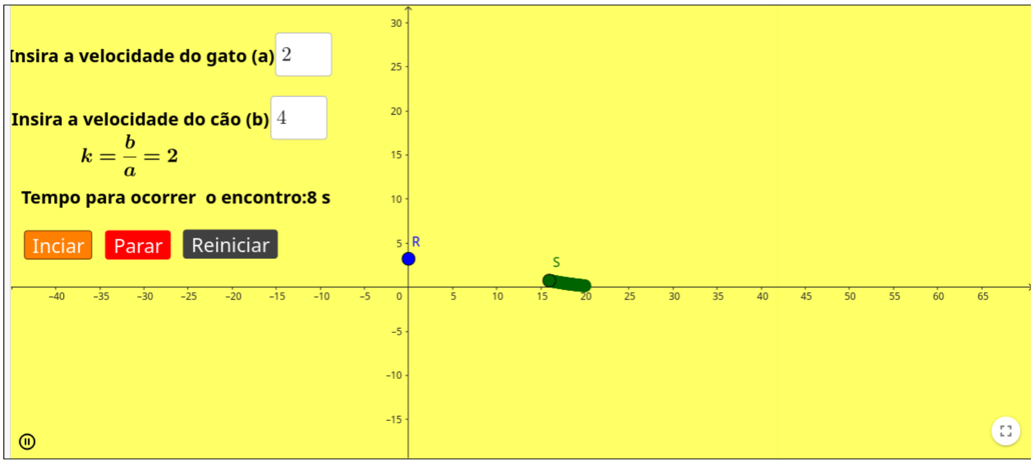
Fonte: Acervo da pesquisa

Na imagem acima, o cão está no ponto S, enquanto o homem se encontra no ponto R. O fundo, que inicialmente era uma malha, foi substituído por um fundo amarelo. Além disso, foram elaborados campos de entradas e botões, conforme já indicado anteriormente. Agora, no campo que fica à esquerda da janela 2D, e que na imagem acima foi omitido, foi inserida a expressão já determinada para o movimento, ou seja,

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{c}{\frac{1}{k}+1}\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{k}+1} - \frac{c}{1-\frac{1}{k}}\left(\frac{x}{c}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right] + \frac{ck}{k^2-1}.$$

Antes disso, foi introduzido $k = \frac{b}{a}$, conforme indicado no campo à direita.

Figura 2: Representação da trajetória do cão e do gato quando suas velocidades são 2 e 4, respectivamente.



Fonte: Acervo da pesquisa

A próxima figura, mostra como o usuário visualizará o início do movimento. No entanto, conforme já mencionado, o usuário terá a oportunidade de modificar os valores e assim determinar as curvas para diferentes valores de a e b através do seguinte endereço: https://www.geogebra.org/m/zu2zdzgu.

O endereço mencionado acima levará o usuário para a página do GeoGebra, onde estão os programas elaborados de acordo com as indicações indicadas apresentadas nesta seção. Duas telas serão apresentadas, a primeira consiste no caso em que a<b e a segunda o caso em que a>b, formando as possibilidades de abordagem do problema para diferentes velocidades do cão e do gato e possibilitando ao usuário interpretar as curvas assim obtidas.

Considerações Finais

O programa construído e devidamente disponibilizado permite ao usuário determinar diferentes trajetórias para o problema utilizando diferentes valores para as velocidades que figuram no enunciado de modo dinâmico, verificando a trajetória descrita pelo cão e a trajetória descrita pelo homem. Os passos apresentados ao longo do trabalho permitirão aos leitores conhecer e, quando necessário, aplicar o controle deslizante, botão e campo de entrada, em suas programações utilizando o GeoGebra, além de refazer o modelo apresentado ao longo deste trabalho ou até mesmo adaptar outros problemas que necessitem de campo de entrada e botões para sua elaboração.

Conforme já mencionado, o programa, além de permitir ao usuário visualizar a trajetória para diferentes valores de a e b, também leva o usuário a tirar conclusões sobre o modelo, conferindo uma compreensão abrangente acerca do problema e permitindo também a verificação independente, através de cálculos simples, dos motivos pelos quais o cão e o gato se encontram ou não se encontram. Assim, caso o cão e o gato não se encontrem em determinado caso, o usuário poderá fazer as contas para constatar a veracidade dos resultados visualizados na tela do programa.

Todas as possibilidades de modificações mencionadas acima confirmam a versatilidade do GeoGebra para a elaboração de programas que permitem interpretar problemas de Cálculo, o que certamente estimulará professores e alunos a utilizarem o programa para interpretar outros problemas de Matemática Superior.

Por fim, a utilização do programa para interpretar o problema da curva de perseguição permite conciliar as ideias de Peter Lax e de David Hilbert. O uso de computadores e calculadoras para o ensino de Cálculo é contemplado à medida que o aluno pode fazer testes e visualizar os resultados como se estivesse utilizando uma calculadora, só que neste caso a calculadora oferece gráficos de modo dinâmico, conforme preconizado por Lax na Reforma do Cálculo. A intuição, mencionada por Hilbert, é contemplada à medida que o programa possibilita a visualização das situações determinadas pelos usuários.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Federal do Maranhão pelo apoio.

Declaração de Uso de IA

Neste trabalho não foram utilizadas ferramentas de Inteligência Artificial. Os autores assumem total responsabilidade pelo conteúdo apresentado.

Referências

Boole, G. (1877). *A treatise on differential equations*. vol v. 1. Macmillan and Company.

Bigotte de Almeida, M. E.; Queiruga-Dios, A., Cáceres, M. J. (2021). *Differential and Integral Calculus in First-Year Engineering Students: A Diagnosis to Understand the Failure.*, Mathematics, v. 9. https://doi.org/10.3390/math9010061

Jr, R. L. d. O. (2015). Introduzindo problemas e curvas de perseguição no ensino médio e universitário. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, *37*, 4502–1.

Lopes, R.; Tort, A. (2014). The airplane carrier, the torpedo, and the apolllonius circle. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, *36*, 3502.

Rival, I. (1987), Picture Puzzling: Mathematicians are Rediscovering the Power of Pictorial Reasoning, *The Sciences* 27, 41-46.

Soldatelli, A. (2016). Matemática do pega-pega. *Scientia cum Industria*, *4*(4), 232–236.

Souza, M. J. A.. (2001). *Informática Educativa na Educação Matemática Estudo de Geometria no ambiente do software Cabri-Géomètre*. 2001. 179f. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) - Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira da Universidade Federal do Ceará, Ceará, CE.

Zimmermann, W., Cunningham S. (1991). Visualization in Teaching and Learning Mathematics. *Eds. MAA Notes*. N° 19.

ENVIADO: 27/09/2025

ACEITO: 28/10/2025