

La enseñanza de la matemática con GeoGebra¹

Ensino da matemática com GeoGebra

GRACIELA CARMEN LOMBARDO²

SILVIA CARONÍA³

ROXANA VERÓNICA OPERUK⁴

EDITH GRACIELA ABILDGAARD⁵

Resumen

La intención del presente artículo es reflexionar acerca del uso del GeoGebra como herramienta necesaria en la formación docente y construir un ámbito de intercambio de experiencias áulicas, en que el análisis de propuestas implementadas permita complementar las prácticas tradicionales. Se discurre acerca de cuestiones trabajadas a partir de las actividades realizadas en cursos dictados, como ser: alcance y limitaciones de las estrategias, anticipación de posibles procedimientos de solución de los alumnos, discusión acerca de las dificultades que se pueden presentar dependiendo de los comandos seleccionados, información que otorga el GeoGebra, sentidos y significados de los contenidos trabajados con el software y conocimientos matemáticos que subyacen en la situación presentada.

Palabras clave: enseñanza; Matemática; GeoGebra

Resumo

A intenção deste artigo é refletir sobre o uso do GeoGebra como uma ferramenta necessária na formação de professores e construir um campo de troca de experiências em sala de aula, na análise de propostas implementadas permitirá complementar as práticas tradicionais. É uma reflexão sobre os temas trabalhados a partir de atividades em cursos, tais como: alcance e limites das estratégias, a antecipação de processos possíveis para a resolução dos estudantes, a discussão sobre as dificuldades que podem surgir na seleção de comandos, informações fornecidas pelo GeoGebra, o significado do conteúdo trabalhado com o software e conhecimento matemático subjacente na situação apresentada.

Palavras chave: educação, Matemática, GeoGebra

¹ Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) - Facultad de Ciencias Económicas (FCE) – Universidad Nacional de Misiones (UNaM)

² FCEQyN - FCE – graciela.lombardo@gmail.com

³ FCEQyN – silvca2@gmail.com

⁴ FCEQyN – roxsoperuk@gmail.com

⁵ FCEQyN – edithabild@gmail.com

Introducción

En esta presentación se propone reflexionar acerca de las distintas cuestiones trabajadas, en los cursos, con modalidad aula-taller, ofrecidos a docentes del nivel medio y alumnos avanzados del Profesorado en Matemática⁶. Algunas de éstas son: diferentes propuestas de enseñanza, importancia que tiene la selección de contenidos, secuencia de presentación, adquisición de destreza en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

La reflexión y la discusión de un conocimiento más exhaustivo acerca del uso del software en las resoluciones de situaciones problemáticas, debería ser una cuestión explícitamente considerada en la formación de los docentes. En tal sentido la UNESCO (2004), sostiene que todos los docentes tendrían que estar preparados para cumplir con un conjunto de estándares e indicadores de desempeño⁷.

Cabe aclarar que los mencionados cursos se encuadraron en los Proyectos de Extensión “Fortalecimiento de las propuestas de enseñanza y los espacios de aprendizaje en Matemática a través del uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación”, “La Enseñanza de las Funciones Algebraicas con GeoGebra”, respectivamente, como así también forman parte del Proyecto de Investigación “Análisis de la implementación de herramienta computacionales aplicadas al proceso de evaluación en matemática”.

1. Génesis y Fundamentos

La experiencia docente en las carreras de grado y pre-grado, fue el puntapié inicial para comenzar a pensar en esta clase de cursos. Tanto a los alumnos avanzados de la Carrera del Profesorado en Matemática, próximos a recibirse como a docentes en ejercicio, se les brindaron la posibilidad de acercarse al conocimiento y utilización del uso del programa GeoGebra.

Nuestro equipo de investigación desarrolla su actividad docente tanto en materias del primero como del tercer año de la Carrera. Es por ello que contamos con la posibilidad

⁶ El Profesorado en Matemática es una de las Carreras de grado de la FCEQyN de la UNaM.

⁷ UNESCO. (2004) *Las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la formación docente. Guía de planificación*. Disponible en:

<http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001295/129533s.pdf> pp. 58 y 59

de observar la evolución cognitiva de los alumnos durante el cursado.

La experiencia docente nos permitió hacer algunas consideraciones respecto a la detección de dificultades que tienen, sobre todo los alumnos de primer año, en relación a:

- aprendizaje de la Matemática
- resolución de problemas
- decodificación del discurso del profesor
- lectura, escritura y expresión oral
- identificación de los objetos matemáticos con los que operan
- formulación de hipótesis, elaboración de argumentos y su validación

Teniendo en cuenta lo manifestado precedentemente se ofrecieron cursos a docentes, y alumnos avanzados a quienes se brindó un espacio de formación y actualización desde el Profesorado en Matemática. En los cursos ofrecidos se abordaron los siguientes aspectos:

- brecha tecnológica existente entre docente y alumnos
- roles de la escuela y del docente actual
- las NTICs: como puertas que permiten acceder al conocimiento
- las NTICs impactan en la escuela y también en diversos ambientes donde el aprendizaje tiene lugar: “aprendizaje ubicuo” (BURBULES, 2011)

En general, el docente de mediana edad, posee una formación básica en NTICs, de los cuales, una mayoría dispone de recursos informáticos y conectividad a Internet en sus respectivas instituciones.

El Programa Conectar Igualdad lanzado por el Ministerio de Educación de la Nación Argentina, tiene como iniciativa buscar la recuperación y valorización de la escuela pública con el fin de reducir las brechas digitales, educativas y sociales en toda la extensión de nuestro país. El origen de esta “distancia” tecnológica radica en el tipo de formación de los actores: el docente, en una era pre-computacional y los educandos, en una sociedad de la información regida por tecnologías multimediales y usuarios avanzados de redes sociales.

Existe una brecha entre quienes acceden a estas herramientas y quienes no, que se amplía si el Estado no interviene cambiando los patrones sociales de distribución del saber [...]. En esta tarea

de redistribución, de democratización y de justicia, la escuela y la educación tienen un papel fundamental. (SEIJAS, 2010, p. 28)

Entre los programas informáticos, incluidos en las Netbooks que el Ministerio de Educación de la Nación y algunos gobiernos provinciales están entregando, existen aplicaciones específicas para Matemática, en este caso, GeoGebra. Se sabe que un gran número de docentes no poseen conocimientos suficientes para su uso y aplicación disciplinar en el aula

Kozak, especialista en educación, argumenta acerca de la tecnología y los docentes que:

Es bien sabido: no hay recetas que resulten efectivas en todo contexto... la innovación en la escuela es pedagógica: hoy hablamos de netbooks, mañana de celulares... cualquiera sea la tecnología, para innovar en la enseñanza solo hace falta un buen proyecto didáctico... lo central radica en pensar la llegada de las computadoras a las aulas no como una “amenaza” sino como una oportunidad para el cambio. En este punto, los docentes juegan el papel decisivo. (KOZAK, 2010, p. 32)

Estos cursos se brindaron como una manera de acercar la Matemática involucrada, tanto en el Nivel Medio como en la Universidad, tal que, ante una mirada diferente de algunos contenidos matemáticos articulantes, los asistentes puedan completar y actualizar su formación.

La participación de docentes y alumnos encierra dos intenciones, la construcción de una actitud crítica con conciencia social que le permita observar y analizar su práctica, con el propósito de mejorarla a efectos de aportar a su capacitación profesional y a la construcción de una capacidad y responsabilidad multiplicadora que induzca a compartir experiencias, a aceptar la crítica de sus pares y mantener una actitud permanente de aporte al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Hasta la fecha se llevaron a cabo los siguientes cursos de capacitación en el marco de los Proyectos de Extensión:

- “Utilización de herramientas informáticas para la resolución de problemas matemáticos”, los cursos estuvieron destinados a alumnos:
 - “GeoGebra: una nueva mirada a la Geometría” (2010)
 - “GeoGebra: una nueva mirada a las funciones algebraicas” (2011)

- “Fortalecimiento de las propuestas de enseñanza y los espacios de aprendizaje en Matemática a través del uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación”, se dictaron los siguientes cursos destinados a docentes del nivel medio:
 - “La enseñanza de la Geometría desde GeoGebra” (2010)
 - “La enseñanza de funciones algebraicas con GeoGebra” (2011)

2. Nuestras experiencias

Los cursos implementados fueron trabajados bajo la metodología de aula-taller, en seis encuentros de cuatro horas reloj cada uno, teniendo en cuentas las siguientes acciones:

- Introducción sobre el manejo y uso de herramientas del software
- Trabajo didáctico:
 - Presentación de una situación problemática
 - Análisis de los posibles procedimientos
 - Discusión sobre las dificultades que se pueden presentar dependiendo de los comandos seleccionados y la información que otorga el software
 - Sentidos y significados de los conocimientos trabajados con la herramienta GeoGebra
 - Alcances y limitaciones de las estrategias propuestas
 - Los conocimientos matemáticos que subyacen en la situación presentada

Dadas las limitaciones de espacio para esta publicación se presenta una de las actividades desarrollada durante el dictado de uno de los cursos cuyos destinatarios fueron docentes del Nivel Medio.

Con el dictado de este curso se pretendió:

- Propiciar que los asistentes valoren, en las propuestas de enseñanza, la importancia que tienen la selección de contenidos a trabajar, la secuencia de presentación de los mismos y la adquisición de destreza en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Trabajar actividades que impliquen plantear cuestiones problemáticas y anticipar posibles estrategias de solución. Identificar los alcances de diversas

presentaciones y reconocer los obstáculos existentes en el aprendizaje de los mismos.

- Construir un ámbito de intercambio de experiencias áulicas en que el análisis de propuestas implementadas permita complementar las prácticas tradicionales.

3. A modo de ejemplo

Situación Problemática

“Juan está dudando sobre cuál debería ser la longitud del segmento “x”, para que el área de la región dentro del triángulo que no contiene al rectángulo, sea mínima. ¿Podrías ayudarlo a determinarlo?” (FIGURA 1)

A partir de la situación problemática presentada, se cumplieron los siguientes momentos:

Primer momento: Se dejó un tiempo de análisis, discusión y elaboración grupal por parte de los participantes.

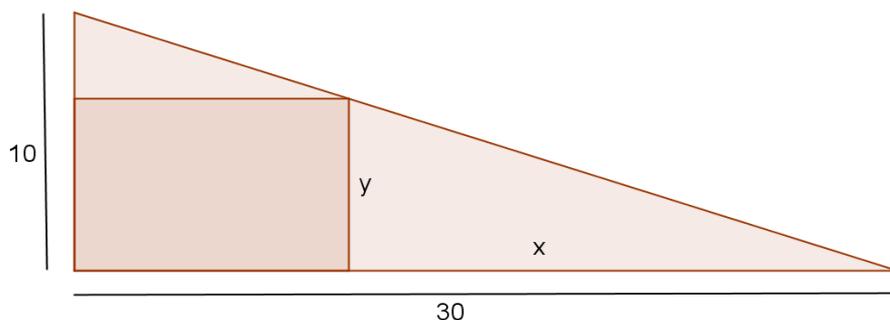


FIGURA 1: Ejemplo de actividad propuesta

FUENTE: Recuperado en Marzo de 2010 de:

<http://descartes.cnice.mec.es/edad/4esomatematicasB/impresos/quincena9.pdf>

Segundo momento: Se entregaron distintas producciones realizadas por grupos de alumnos, para que los docentes asistentes al taller analizaran cuáles podrían ser:

- los procedimientos utilizados
- los posibles errores y dificultades en la resolución presentada

Tercer momento: puesta en común.

Cuarto momento: se discutieron cuestiones generales al quehacer didáctico como ser:

- importancia del estudio de la Dimensión Didáctica
- importancia de la anticipación de los posibles procedimientos de resolución
- alcance y limitaciones del software
- distintos momentos de la clase: trabajo grupal, individual, puesta en común
- variables didácticas
- rol del alumno y del docente

De las producciones que se analizaron en esa oportunidad con los docentes participantes, se exponen, a continuación, algunos de los trabajos elaborados por los alumnos, con las correspondientes impresiones de pantalla, y los análisis, discusiones que surgieron en la puesta en común (Tercer momento):

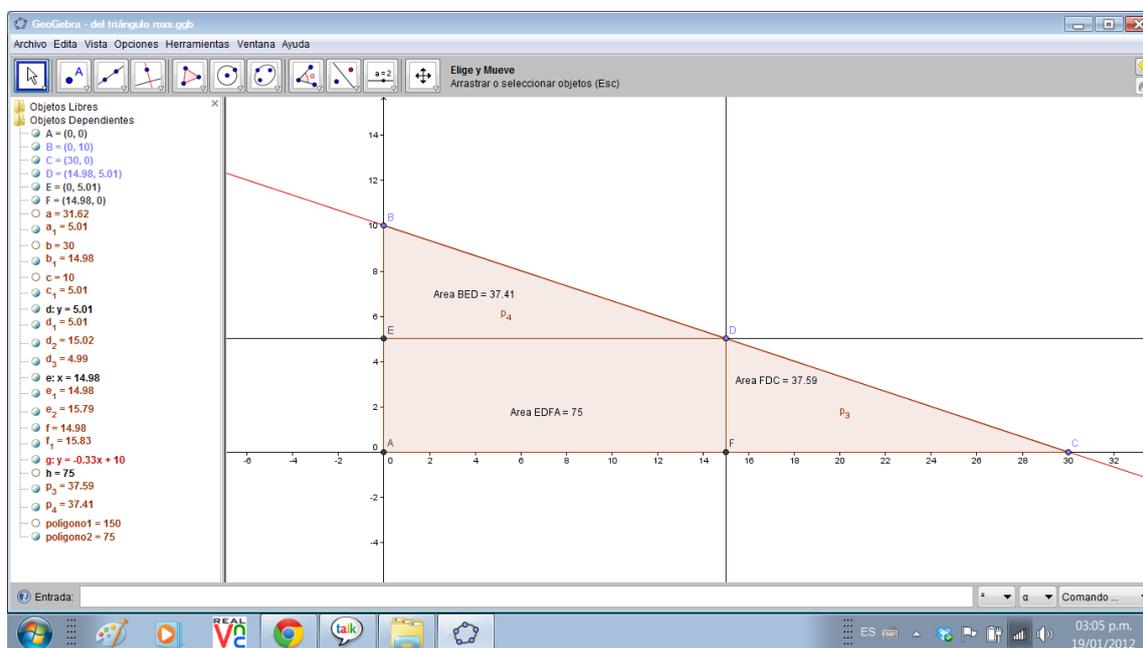


FIGURA 2: Producción alumno N° 1

FUENTE: Propia

Producción alumno N° 1: La construcción fue realizada del siguiente modo:

- Dibujó el triángulo (ABC) cuya base y altura se corresponden con los datos ofrecidos en el problema.
- Ubicó el punto D, el cual puede deslizarse sobre la hipotenusa, como también a los puntos E y F, sobre los catetos.

- Seguidamente trazó dos rectas, una perpendicular al cateto AB, que contiene a D y E, y otra normal a AC que contiene a D y F.
- Calculó el área de los polígonos en que quedó dividida la figura original, es decir, los triángulos BED, DFC y el rectángulo EAFD.
- Estableció, al deslizar el punto D, el valor aproximado de “x” (14,98), el cual consta en la FIGURA 2, para el que las áreas de los triángulos que no contienen al rectángulo, es mínima.

Puesta en común: Algunos docentes expresaron que depende del nivel académico y cognitivo de los alumnos en que sea presentada esta actividad, el procedimiento considerado será éste. Otros, en cambio, debatieron acerca de que el procedimiento utilizado no es “suficiente” para demostrar que el punto D es el que permite determinar el valor pedido, dejando solamente el poder deslizar el mismo y sumar las áreas para su verificación.

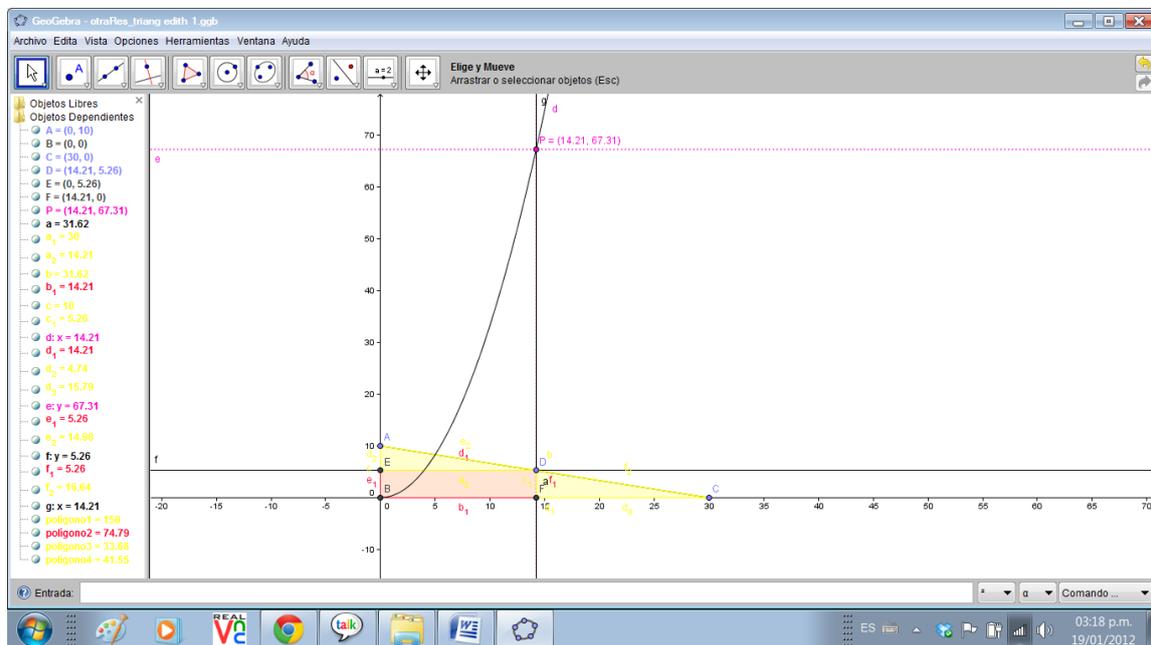


FIGURA 3: Producción alumno N° 2

FUENTE: Propia

Producción alumno N° 2: La construcción fue realizada del siguiente modo:

- Trazó el segmento, AC, que representa a la hipotenusa del triángulo ABC, de manera tal que los extremos de AC coincidan con los datos proporcionados por el problema.

- Ubicó el punto D sobre el segmento AC.
- Desde el sector de “entrada”, cargó un punto genérico P cuyas coordenadas dependen de D, haciendo uso de la herramienta “lugar geométrico” (lugar geométrico de P respecto a D) y como consecuencia se obtuvo la parábola que se aprecia en la FIGURA 3.
- Construyó, con la herramienta “polígono”, el triángulo ABC y el rectángulo BFDE.
- Trazó rectas perpendiculares a cada uno de los ejes coordenados y que contienen a P.
- Percibió que al construir los polígonos mencionados, el programa arrojó, por defecto, el valor del área de cada uno de éstos (ver la ventana algebraica en la FIGURA 3), y al deslizar D, se apreció la variación del área del rectángulo y de las coordenadas del punto P (situado en la parábola).
- Concluyó que la solución fue dada por las coordenadas de P, es decir, cuando el área del rectángulo asume su mayor área, ya que allí el área restante dentro del triángulo ABC es mínima.

Puesta en común: Varios docentes calificaron lo desarrollado como muy bueno, ya que se trata de un procedimiento bastante completo que engarza aspectos geométricos y algebraicos de los contenidos matemáticos puestos en juego.

Sin embargo, existieron opiniones, que si bien destacaban el control que el alumno tenía sobre el valor de la solución, este procedimiento presentaba bastante complejidad en su construcción. Esto último, fue asociado al hecho que en las aulas del nivel medio de la Argentina, el concepto “Lugar Geométrico” suele estar ausente, razón por la cual, los docentes entendían que no siempre estaría disponible en los razonamientos de los alumnos, aunque GeoGebra ofrezca una herramienta que permita construir los lugares geométricos de manera bastante sencilla.

Producción alumno N° 3: La construcción de base fue similar a la realizada por el alumno N° 1. El procedimiento que utilizó fue el siguiente:

- Construyó el triángulo rectángulo ABC y ubicó al punto D sobre la hipotenusa.
- A partir de allí, dibujó el rectángulo BFDE.

- Insertó un punto genérico P cuyas coordenadas dependen de D. De esta forma crea el lugar geométrico de P respecto a D
- Identificó los triángulos interiores al ABC, cuya suma de áreas se pretende sea mínima.
- Concluyó, auxiliado por su observación de la ventana algebraica, que cuando el área del rectángulo es igual a la suma de las áreas de los triángulos AED y DFC (de color amarillo en la FIGURA 4), estaban dadas las condiciones adecuadas para obtener la solución deseada, la cual se corresponde al valor numérico de la primera coordenada del punto P, al momento en que se verifica la igualdad de las áreas antes mencionadas.

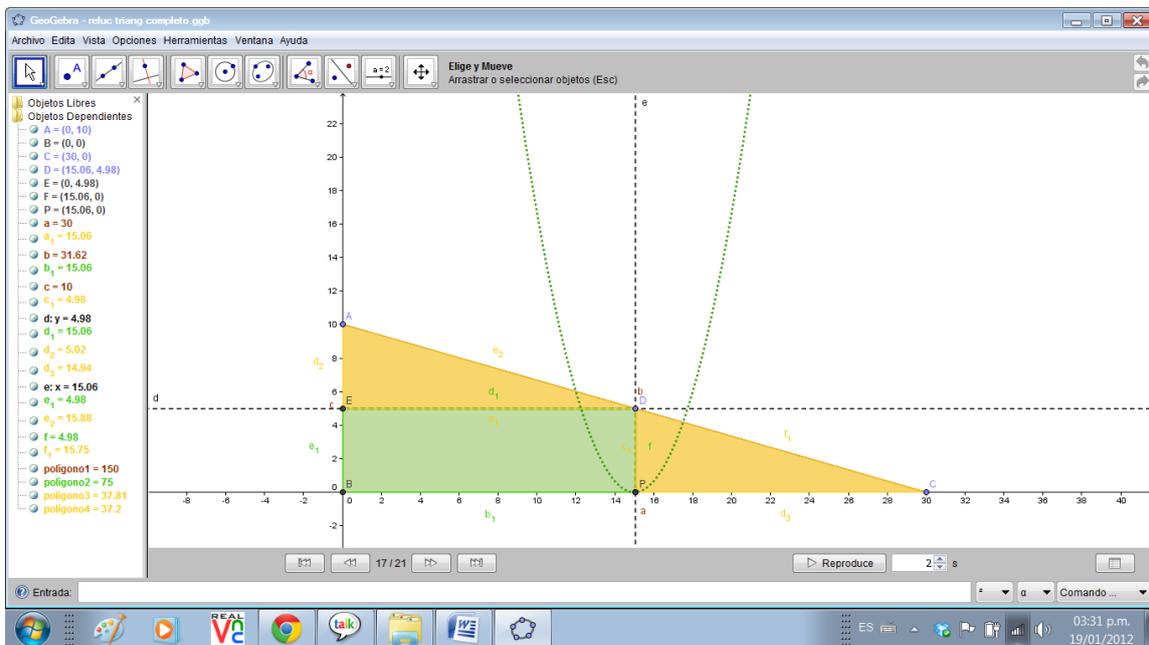


FIGURA 4: Producción N° 3

FUENTE: Propia

Puesta en común: En esta producción al igual que la realizada por el alumno N° 2, la discusión versó entorno al conocimiento matemático involucrado -lugar geométrico-. Tal como se expresó el procedimiento anterior, este concepto, no es conocido por todos los alumnos del nivel medio, a pesar de ello, no deja de ser interesante para su discusión y posible aplicación.

Algunos docentes manifestaron que la noción de lugar geométrico forma parte del diseño curricular que se elaboró como consecuencia del cambio en el Sistema Educativo Argentino, vigente desde el año 2009, no así en la currícula anterior.

Producción alumno N° 4: La construcción realizada, en este caso, constó del siguiente proceso:

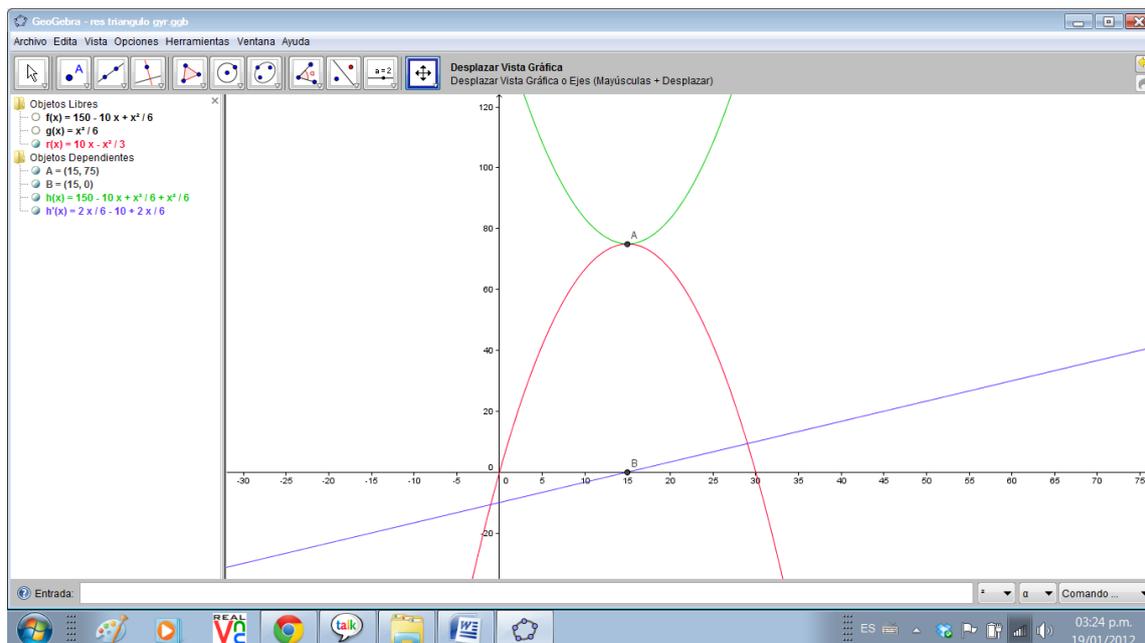


FIGURA 5: Producción N° 4

FUENTE: Propia

Los primeros pasos realizados por el alumno no estaban a la vista, se supone utilizó lápiz y papel.

- Consideró las funciones $f(x)$ y $g(x)$ como las áreas de los triángulos formado dentro del triángulo ABC
- A la suma de las áreas citadas en el ítem anterior, la designó función $h(x)$ (en color verde FIGURA 5).
- Nombró como $r(x)$ a la función que representa el área del rectángulo.
- Identificó al punto A, de intersección entre las funciones h y f , lo que permite concluir que el alumno infirió que el mismo, se produce la igualdad entre ambas áreas.
- Halló la derivada de la función $h(x)$ y encontró su intersección con el eje de las abscisas, punto al que nominó B, cuya primera componente representa el valor de “ x ” pedido, dando respuesta a lo solicitado.

Puesta en común: La discusión, entre los docentes asistentes al curso, se centró nuevamente en que esta tipo de resolución la podrían realizar alumnos que detenten tales conocimientos matemáticos. También manifestaron que es positivo el hecho que

algunos alumnos trabajaran sólo con el programa y que otros utilizaron primeramente lápiz y papel, para luego proseguir la resolución con GeoGebra.

Cuarto Momento

Se discutieron ampliamente varias cuestiones referidas al quehacer didáctico, algunas de ellas, por ejemplo: la elección de un problema, de los posibles procedimientos, si involucran o no el uso de GeoGebra, y en tal caso si pueden ser resueltos solo utilizando el programa, el alcance y limitaciones del software, los obstáculos que podrían surgir tanto al momento de la resolución grupal como en la puesta en común.

Además, se discutió acerca de la importancia del reconocimiento de las variables didácticas en la consigna dada, porque son las que el docente puede manejar a voluntad y permiten el cambio o no de estrategia. Por ejemplo, en esta consigna las variables didácticas eran: el dibujo, los datos de la situación (catetos), los valores utilizados (10, 30), el uso de GeoGebra. Con respecto a este último se observó que si el planteo del problema hubiese sido “sin uso del programa”, los posibles procedimientos hubiesen sido más limitados quedando reducidos a “papel y lápiz”. Por ejemplo:

- Hallar una ecuación, en función de “x”, a partir de la igualdad del área del rectángulo y de la suma de las áreas de los triángulos que no contienen puntos del rectángulo. El valor hallado correspondería a la situación particular que las mencionadas áreas sean iguales. A partir de allí se podría inferir cuándo la suma es mínima.
- Utilizar el cálculo diferencial para dar respuesta a la consigna.
- Buscar una expresión en función de “x” a partir de las áreas de los triángulos interiores y del rectángulo en cuestión, por medio de la relación de proporcionalidad entre los segmentos del triángulo, utilizando el teorema de Thales.

En cambio, se llegó a la conclusión que el uso de GeoGebra permitió además poner en juego objetos y relaciones matemáticas que quizás no hubieran estado disponibles, o su uso hubiera sido más dificultoso que con el uso exclusivo del papel y lápiz, a saber:

- Lugar geométrico
- Análisis del crecimiento y decrecimiento de una función en relación a su derivada

- Máximos y mínimos de una función utilizando su derivada

Se advirtió la importancia del rol docente tanto en la elección de la situación problemática, como la valoración que tiene de la utilidad del uso del GeoGebra, cómo es utilizado por el alumno al enfrentarse a la situación planteada: Por ejemplo si el alumno utiliza la herramienta como una mera comprobación de los resultados, o como “ayuda gráfica” para plantear la situación y pensar posibles estrategias de resolución o como único medio para resolver el problema.

Se ha acordado también que la elección de una situación problemática es fundamental, es decir no cualquier problema es útil o puede ser abordado con GeoGebra, la situación debe ser tal de manera, que represente un verdadero trabajo matemático, es decir aprovechar al máximo las bondades del programa. Si un problema puede resolverse sólo con lápiz y papel dejando la constatación de resultados a través del GeoGebra, se deja de lado la riqueza del programa.

Cabe aclarar que si un problema no reúne las condiciones para ser resuelto utilizando toda la potencialidad de GeoGebra, no significa que deba ser descartado. El docente podrá modificar la consigna atendiendo a las variables didácticas que sean necesarias para lograr el objetivo antes mencionado.

Consideraciones finales

Los docentes asistentes a los cursos pudieron iniciarse en el uso de GeoGebra como recurso potente de su práctica y reducir la asimetría con la actual generación computacional. Reconocieron, además, que GeoGebra es un poderoso instrumento para llevar a cabo no solo el desarrollo de un sin número de los contenidos de la currícula, sino también, realizar la evaluación de los aprendizajes de los alumnos. Este es un punto de partida para la utilización racional del equipamiento con el que cuentan docentes y alumnos a partir del Programa conectar Igualdad.

El reconocimiento, por parte del docente, que las tecnologías de la información y la comunicación constituye elementos mediadores del conocimiento, propicia una mayor fluidez en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Esta introspección encierra dos intenciones: por una parte la construcción de una actitud crítica con conciencia social que permite observar, analizar y repensar la propia práctica en forma argumentada -análisis didáctico- y por otra, la responsabilidad multiplicadora

que induce a compartir experiencias, aceptar la crítica de sus pares y mantener una actitud abierta.

Este es un aporte para el estudio y profundización de las herramientas que nos brinda la tecnología aplicada a la educación. Creemos que la reflexión, la discusión de un conocimiento más exhaustivo acerca del uso del software en las resoluciones de situaciones problemáticas, debería ser una cuestión explícitamente considerada en la formación de los docentes.

Referencias

BURBULES, N. (2011). Entrevista a Nicholas Burbules. En: GVIRTZ, Silvina; NECUZZI, Constanza (Comp.). *Educación y tecnologías. Las vocês de los expertos*. 1ª Edición. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Gráfica Printer S. A. ISBN 978-987-27243-0-6

KOZAK, D (2010). *¡Llegaron las netbooks! El monitor de la educación*. Revista del Ministerio de Educación de la Nación. N°26.

SEIJAS, S (2010). Cuando llegaron las netbooks. En: *El monitor de la educación*. Revista del Ministerio de Educación de la Nación. N°25.

UNESCO. (2004). *Las Tecnologías de la Información y la Comunicación en la formación docente. Guía de planificación*. Disponible en: <http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001295/129533s.pdf>.