

Resolução de problemas geométricos no GeoGebra

Resolution of geometric problems in the GeoGebra

MONICA SOUTO DA SILVA DIAS¹

Resumo

Neste artigo buscar-se-á discutir um determinado aspecto de investigações geométricas no ambiente de geometria dinâmica GeoGebra, a fim de resolver problemas geométricos abertos. A pesquisa realizada caracteriza-se como qualitativa, com aspectos de um estudo de caso. Foi observado que a investigação da solução de determinados tipos de problemas geométricos não é favorecida pelo ambiente de geometria dinâmica, como aqueles cuja solução possa ser expressa por uma expressão literal. Nas condições do desenvolvimento da pesquisa aqui relatada, detectou-se que o bom rendimento do trabalho de investigação no software de geometria dinâmica pode estar relacionado ao tipo de problema geométrico proposto. Tais questões constituem um estudo atualmente em desenvolvimento.

Palavras-chave: geometria, GeoGebra, problemas geométricos.

Abstract

In this article one will search to argue one definitive aspect of geometric inquiries in the environment of dynamic geometry GeoGebra, in order to decide open geometric problems. The carried through research is characterized as qualitative, with aspects of a case study. It was observed that the inquiry of the solution of determined types of geometric problems is not favored by the environment of dynamic geometry, as those whose solution can be express for a literal expression. In the conditions of the development of the research told here, it was detected that the good income of the work of inquiry in the software of dynamic geometry can be related to the type of considered geom of considered geometric problem. Such questions constitute a study in development currently.

Word-key: geometry, GeoGebra, geometric problems.

Introdução

A utilização de softwares de geometria dinâmica em situações de ensino de Matemática, tem ocorrido cercada de entusiasmo de alunos e professores com relação à aspectos como motivação, visualização e envolvimento dos estudantes nas tarefas propostas, fato comprovado por várias pesquisas e relatos de experiências. Neste texto, é apresentada uma reflexão sobre um outro aspecto do uso de softwares de geometria dinâmica: a influência das respostas dadas pelos softwares às ações dos alunos sobre a elaboração de conjecturas.

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense – msoutodias@gmail.com.

A partir de um resultado obtido em uma pesquisa acadêmica, a autora atentou para o fato de que o retorno que o software dá após uma solicitação do usuário, pode confundir a natureza da resposta procurada pelo mesmo, quando se trata de uma solução dada por uma expressão literal. Em se tratando de uma situação de sala de aula, na qual os alunos ficam mais susceptíveis às respostas do software, estas podem conduzi-los à encaminhamentos errôneos.

Os resultados que serão apresentados neste texto, e que motivaram o desenvolvimento do estudo, constituem parte de uma pesquisa acadêmica desenvolvida no âmbito de uma tese de doutorado em Educação Matemática, intitulada “Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico”. O objetivo principal deste trabalho foi investigar a influência dos ambientes de geometria dinâmica na construção de argumentações, por alunos da licenciatura em Matemática. Buscou-se também estudar uma possível articulação entre os níveis de desenvolvimento geométrico existentes e os tipos de prova que ele produz.

A opção pelo uso do software GeoGebra se deu em função de suas possibilidades, dentre estas, a ferramenta Protocolo de Construção, que possibilitou dirimir dúvidas nas construções efetivadas pelos alunos nesse ambiente, facilitando a análise dos dados. Outro fator foi a isenção de custos para o usuário.

O aporte teórico, a metodologia, o relato da experimentação e a análise dos dados, uma proposta de tipologia de problemas, e as considerações finais referentes ao recorte determinado pela autora, neste texto, são apresentados nas seções a seguir.

1. Aporte Teórico

Níveis de desenvolvimento geométrico

A pesquisa realizada objetivava o estudo da elaboração de demonstrações em Geometria, daí a escolha de quadro teórico desenvolvido por Parzysz (2001, 2006) para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Parzysz (2001), baseado nas pesquisas desenvolvidas por Van Hiele (1984), Houdement & Huzniak (1998) e Henry (1999)

propôs uma forma de articulação entre os níveis de pensamento geométrico. Tomando por base a natureza dos objetos de estudo da Geometria e o tipo de validação, o autor propõe a consideração de dois tipos de geometrias: não-axiomáticas e axiomáticas.

Na geometria não-axiomática, o estudo é voltado para a situação concreta, os objetos são modelos da realidade, referindo-se aos mesmos, ou a uma representação deles tais como uma maquete ou um desenho. A validação da afirmação sobre propriedades destes objetos ou relações entre eles é feita por meio da percepção, isto é, o aluno afirma que é verdadeiro porque assim ele vê ou percebe.

Na geometria axiomática, os objetos são teóricos, mas é aceitável construir referências ao mundo físico. A validação é baseada em teoremas e axiomas. Nesta geometria, uma afirmação que derive de uma observação, da realidade ou não, será verdadeira se puder ser demonstrada. Este caráter acentua o aspecto abstrato da geometria em questão.

Parzysz propôs um detalhamento das geometrias não-axiomáticas e axiomáticas, que é sintetizado no Quadro 1 (adaptado de Parzysz. (2001), p. 3) a seguir:

| | Geometrias não-axiomáticas | | Geometrias axiomáticas | |
|--------------------|-----------------------------|---|------------------------------------|------------------------------|
| Tipos de Geometria | Geometria concreta (G0) | Geometria <i>spatio-graphique</i> (G1) | Geometria proto-axiomática (G2) | Geometria axiomática (G3) |
| Objetos | Natureza física ou concreta | | Natureza teórica | |
| Validação | Perceptiva | | Dedutiva | |

Quadro 1. Síntese da classificação da Geometria segundo Parzysz

As geometrias não axiomáticas estão também subdivididas: geometria concreta (identificada pela sigla G0) e geometria *spatio-graphique* (identificada pela sigla G1). Em G0, os objetos são físicos, e suas características físicas influenciam as observações e constatações. A validação é baseada somente na percepção. Em G1, os objetos, que eram físicos em G0, ganham uma representação gráfica, que pode ser um esboço ou um desenho construído por processos geométricos. A validação é baseada em comparação visual e sobreposições, apoiadas por medições realizadas com régua graduada, compasso e esquadros.

As geometrias axiomáticas se subdividem em proto-axiomática (identificada pela sigla G2) e axiomática (identificada pela sigla G3). Em G2, ainda pode-se recorrer a objetos físicos, tais como representações feitas por processos geométricos, mas a sua existência é garantida pelas definições, axiomas e propriedades entre figuras, no interior de um dado sistema axiomático – a Geometria Euclidiana. A validação se dá por meio de um discurso dedutivo aplicado aos dados do enunciado do problema, se apoiando nos postulados e axiomas da geometria euclidiana. Em G3, os objetos são teóricos, e a tentativa de representá-los pode incorrer em deformações do objeto representado. A existência tanto dos objetos geométricos, como as relações entre eles, é baseada em axiomas, definições e teoremas, que podem mudar de uma geometria para outra. As geometrias não-euclidianas são exemplos de resultados obtidos teoricamente, baseados na não consideração de um postulado.

Tipos de provas

Neste item, será exposto um breve estudo sobre validação e demonstração, segundo os preceitos propostos por Balacheff (1987), o qual será articulado com o apresentado sobre os diferentes tipos de raciocínio geométrico, apresentados no item anterior.

O autor crê ser indispensável clarificar termos que são usados pelos matemáticos como sinônimos (tais como prova, demonstração e raciocínio), e alerta que a falta de clareza no seu entendimento pode constituir um obstáculo às pesquisas sobre questões de ensino e aprendizagem, que envolvam tais termos. Devido a este fato, Balacheff propõe as seguintes definições:

Chamamos explicação um discurso que visa tornar compreensível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor de uma proposição ou de um resultado. As razões podem ser discutidas, recusadas ou aceitas.

Chamamos prova uma explicação aceita por uma comunidade em um determinado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate entre a significação e a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.

Entre as provas, certamente há uma particular, elas são uma seqüência de enunciados seguindo regras determinadas: um enunciado é conhecido como sendo verdadeiro, ou bem é obtido a partir daqueles que lhe precedem com o auxílio de uma regra de dedução tomada de um conjunto de regras bem definidas. Chamamos demonstração essas provas.

Nós reservamos a palavra raciocínio para designar a atividade intelectual, na maior parte do tempo não explícita e manipulação de informações para, a partir de dados, produzir novas informações. (BALACHEFF, 1987, p. 147-148).

No que se refere aos tipos de provas, pragmáticas e intelectuais, a diferenciação é feita

pela possibilidade de acesso ou não à experimentação. Nesta última, o aluno pode verificar a conjectura construída por meio de ações experimentais sobre os objetos estudados. Obtendo resultado positivo, pode considerar a conjectura como válida. Nas provas intelectuais, o discurso é teórico, não se tomam observações experimentais como argumentos para validar uma conjectura, mas apenas resultados teóricos já observados, como definições, teoremas, axiomas etc.

O status e a natureza do conhecimento, ao lado da evolução da linguagem, pontuam a passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais. As provas pragmáticas encerram saberes advindos da ação, enquanto nas provas intelectuais, os saberes devem ser colocados como objeto de reflexão ou debate. Na pesquisa relatada, buscou-se analisar como a passagem de um tipo a outro de prova (da pragmática para a intelectual) pode assinalar a evolução nos níveis de raciocínio geométrico do aluno.

Balacheff (1987) afirma que entre as provas pragmáticas e intelectuais, podem-se identificar quatro tipos que se distinguem pelo conhecimento mobilizado e pelo tipo de raciocínio.

O primeiro deles é o *empirismo ingênuo*, no qual a validade de uma conjectura é baseada em observações de um pequeno número de casos.

A *experiência crucial* é o segundo tipo de prova, e consiste na colocação da generalização de modo explícito, isto é, o aluno realiza experiências como no empirismo ingênuo, mas aqui ele tem consciência de que busca um resultado geral.

O terceiro tipo é o *exemplo genérico*. O aluno trabalha sobre um objeto particular, mas tendo em mente a classe de objetos do qual o primeiro é um representante. Portanto, neste tipo de prova, o aluno busca uma generalização baseada em exemplos, mas procura justificá-la com a teoria geométrica.

A *experiência mental* é o quarto e último tipo de prova e consiste em interiorizar a ação e separá-la de seu representante particular. Entende-se que aqui não há mais referência ao caso particular e a afirmação é elaborada para uma classe de objeto, e a validação é inteiramente sustentada pela teoria.

A relação entre os quatro tipos de provas e os níveis de raciocínio geométrico proposto por Parzys (2001, 2006) prescinde de estudos, uma vez que Balacheff (1987) não fez referências explícitas aos objetos geométricos evocados em dada prova, tal qual fez Parzys (2001) ao elaborar a classificação dos níveis de desenvolvimento geométrico. A tese citada buscou analisar a hipótese de existência de relações entre o proposto por estes dois autores, por meio do estudo das produções e diálogos de alunos durante a

resolução de problemas que envolvem a demonstração em Geometria. Tal estudo apontou um aspecto da resolução de problemas geométricos em ambiente de geometria dinâmica, objeto deste artigo.

2. Metodologia

O objetivo fixado para a pesquisa e as questões formuladas conduziu a eleger a pesquisa de natureza qualitativa (REY, 2002) como metodologia mais adequada ao estudo que pretende-se desenvolver. Por outro lado, o trabalho se constitui em um estudo diagnóstico, pois submete o objeto de estudo à influência de certas variáveis, em condições controladas e conhecidas pela autora (o uso dos ambientes papel e lápis e geometria dinâmica). Deste modo, este estudo caracteriza-se como um estudo de caso (MARTINS, 2008), cuja unidade de estudo é o conjunto formado por três duplas de alunos.

Os instrumentos para coleta de dados foram: as atividades resolvidas pelos alunos, tanto no formato de redação em ambiente papel e lápis, como no formato eletrônico quando as atividades eram desenvolvidas em ambiente computacional; os arquivos construídos pelos alunos no software GeoGebra durante a resolução da atividade em tal ambiente; as áudio-gravações dos diálogos e as observações da própria pesquisadora, feitas em formato de diário de bordo. Além desses, foram realizadas também entrevistas semiestruturadas após os encontros para realização das atividades.

Decidiu-se que a aplicação de atividades deveriam ser desenvolvidas tanto em ambiente papel e lápis como em ambiente de geometria dinâmica GeoGebra. Os seis alunos que participaram da pesquisa cursavam o sexto período de um curso diurno de licenciatura em Matemática de uma instituição pública, localizada no interior do Estado do Rio de Janeiro. Tal curso possui sete períodos, portanto já haviam cursado mais de 80% dos conteúdos curriculares do curso. A pesquisadora os conhece desde o primeiro período do referido curso, quando foram seus alunos na disciplina Geometria I e tal escolha foi feita para facilitar a comunicação entre os participantes e a pesquisadora, minimizando assim as possibilidades de desvio de resultados devido a esse tipo de problema.

Tais alunos estudaram dois períodos de Geometria Plana Euclidiana e dois períodos de Geometria Espacial Euclidiana, sabiam utilizar os recursos dos ambientes de geometria dinâmica, pois cursaram a disciplina Educação Matemática e Tecnologia em períodos

anteriores, na qual realizaram um estudo instrumental e pedagógico de vários softwares gratuitos, entre os quais se inclui o GeoGebra, software escolhido para essa pesquisa.

3. A experimentação e análise dos dados

Os seis alunos foram organizados em três duplas e resolveram a atividade em dois encontros de três horas cada, com uma semana de intervalo entre estes encontros. As duplas foram identificadas com nomes fictícios: Rita/Guilherme, Helena/Júlia e Patrícia/Diana. A atividade constava de duas questões cujos enunciados são apresentados abaixo:

Questão 1: É sempre possível construir uma circunferência tangenciando três lados de um quadrilátero convexo? Justifique sua resposta.

Questão 2: Considere um quadrilátero $ABCD$, o ponto médio M de CD e o ponto P , interseção da diagonal AC com o segmento BM . Estude a relação entre as áreas dos triângulos ABP e MCP nos casos em que $ABCD$ é: a) paralelogramo; b) trapézio; c) quadrilátero convexo qualquer.

Para cada questão foi realizada uma análise didática prévia, que consistia em um estudo das possíveis estratégias dos alunos para resolver a atividade e as dificuldades que eles poderiam encontrar durante a tentativa de resolução, a partir da análise dos resultados observados em outras pesquisas na área, que constituíram a revisão bibliográfica.

As duas questões foram resolvidas no ambiente papel e lápis no primeiro encontro, no qual os alunos utilizaram par de esquadros, compasso e régua graduada. No segundo encontro, resolveram a mesma atividade no ambiente GeoGebra. Tal escolha na ordem de apresentação dos contextos (papel e lápis ou computacional) deveu-se à análise de resultados obtidos em um teste exploratório, no qual os alunos tiveram forte resistência no uso do papel e lápis pelo conhecimento da solução já encontrada no ambiente computacional. Dessa forma, ajustou-se os enunciados e foi proposto, primeiramente, a reflexão sobre possíveis estratégias a partir do uso dos instrumentos clássicos do desenho geométrico.

O aspecto com relação à utilização do GeoGebra, citado na Introdução deste artigo, surgiu durante a resolução da questão dois, por este motivo, ela será o foco dos

comentários.

Análise das soluções apresentadas pelos alunos para a questão dois

Na análise didática prévia desta questão para o ambiente lápis e papel, considerou-se a hipótese que ao começar a investigação dos quadriláteros na ordem sugerida no enunciado da questão, o aluno poderia adquirir segurança para prosseguir na busca de uma solução para o problema proposto, uma vez que o paralelogramo é um polígono com muitas propriedades familiares ao aluno, facilitando o estabelecimento de relações. Foi exatamente o que ocorreu. Este fato foi enfatizado por Júlia, quando ela afirmou que começar pela ordem sugerida no enunciado poderia “dar alguma dica”. Também ocorreu com as outras duplas: o estudo no paralelogramo clareou as ideias para analisar o trapézio, o que facilitou muito a determinação de uma solução geral, mas a solução prevista na análise teórica só foi alcançada por Guilherme e Rita.

Nenhum aluno cogitou calcular a área dos triângulos para saber a relação entre as mesmas, e todos visualizaram a semelhança dos triângulos ABP e CMP, justificada pelo caso ângulo-ângulo. Apenas Guilherme quis provar a semelhança destes triângulos pelo caso lado-lado-lado, mas só conseguiu devido à orientação dada pela pesquisadora sobre a proporcionalidade dos lados correspondentes. Observe-se que a pesquisadora não forneceu respostas, mas apenas orientou caminhos, fazendo questões que provocaram a reflexão do aluno sobre as propriedades buscadas em seus conhecimentos anteriores.

A busca por uma solução para o item c ocupou maior tempo das duplas Patrícia/Diana e Júlia/ Helena, mas o motivo foi o fato de todos acreditarem que obrigatoriamente deveria existir uma solução e não cogitaram a possibilidade de inexistência da relação procurada. Foi necessária a intervenção da pesquisadora no trabalho das duas duplas para que estas viessem a pensar em tal possibilidade. Júlia e Helena terminaram por justificar corretamente por que no quadrilátero qualquer proposto pelo enunciado não havia relação entre as áreas dos triângulos analisados. A dupla Rita/Guilherme apesar de indicar a percepção de que esta relação poderia não existir, produziram respostas escritas que mostram que a dúvida com relação à existência persistiu. Em todos os casos, constatamos a influência do contrato didático: se o professor propôs um problema, então ele tem sempre uma solução possível.

As construções com régua e compasso exerceram o papel de orientação no decorrer da resolução da questão, mas não foram determinantes para a definição das respostas. A análise dos diálogos ocorridos durante as construções geométricas nos permite afirmar que todos os alunos observados trabalharam no nível G2 nos termos de Parzysz (2006), tal como apresentado no quadro teórico.

As justificativas apresentadas por Rita e Guilherme foram as mais completas, se comparadas com as apresentadas por Patrícia/Diana e com as de Júlia/ Helena. No entanto, esperava-se justificativas mais estruturadas do ponto de vista matemático, devido ao grau de escolaridade dos alunos participantes da pesquisa. Assim, pode-se inferir que a aprendizagem em Geometria, para estes alunos, não cumpriu os requisitos necessários para a evolução do raciocínio geométrico.

Por fim, é possível afirmar que todos os alunos alcançaram as fases relatadas para a resolução da questão, sendo que apenas Rita e Guilherme obtiveram a razão entre os lados do trapézio em função das bases. As justificativas apresentadas foram compatíveis com o tipo de prova experiência mental.

Na resolução da questão 2 no ambiente GeoGebra, observou-se que a configuração do software tanto para a nomeação dos pontos como para a adoção do número de casas decimais para os valores numéricos não foram fonte de dificuldades para os alunos, seja porque os resultados fornecidos na tela não apresentavam diferença (no caso de Júlia, Rita e Guilherme), seja porque foi compreendido como uma aproximação (no caso de Patrícia e Diana).

Rita e Guilherme utilizaram as construções e os resultados fornecidos pelo GeoGebra (medidas de áreas e de lados dos triângulos) para confirmar os resultados obtidos no ambiente papel e lápis para os itens *a* e *b*. No caso do item *c*, eles buscaram indícios de uma resposta diferente da que encontraram no ambiente papel e lápis. Após analisar as figuras construídas por eles, concluíram que não havia relação entre as áreas dos triângulos, caracterizando que mesmo em ambiente de geometria dinâmica eles permaneceram na observação de figuras diversas construídas para o mesmo enunciado, o que evidencia o apego ao visual e não às propriedades e axiomas relativos à figura trabalhada.

Desde o início da resolução do problema no ambiente GeoGebra, Rita e Guilherme

afirmaram o paralelismo de dois lados, que garantia a semelhança dos triângulos; portanto, a relação entre as suas áreas estava ausente do quadrilátero qualquer referente ao enunciado. Ainda assim, eles insistiram na investigação, realçando o poder de convencimento da ferramenta computacional, pois nos itens *a* e *b* o resultado fornecido pelo GeoGebra coincidiu com o encontrado no ambiente papel e lápis. No item *c*, mesmo tendo o respaldo teórico de seus conhecimentos geométricos, eles ainda duvidaram das conclusões obtidas no ambiente papel e lápis, persistindo na procura por resultados, ou seja, na busca de uma solução, ainda que inexistente, caracterizando o efeito de contrato já citado.

Diana e Patrícia utilizaram os resultados obtidos pelo uso do GeoGebra a fim de validar a solução encontrada no ambiente papel e lápis para todos os itens da questão. No item *c*, a ausência do paralelismo de dois lados foi suficiente para que elas concluíssem que não havia relação entre as áreas dos triângulos, e não insistiram na investigação, caracterizando a permanência dos alunos em um nível de prova pragmática em um raciocínio dentro de *G1 (spatio graphique)*.

Júlia não utilizou a ferramenta *área*, do GeoGebra, e usou as ferramentas de medição de ângulos e de segmentos. Com estes dados, calculou as áreas dos triângulos no item *a*, e concluiu pela existência de uma razão de $\frac{1}{4}$ entre elas. No item *b*, o paralelismo de dois lados a levou inferir que os triângulos eram semelhantes, e por isso, a razão entre as áreas era igual ao quadrado da razão de semelhança. No item *c*, após realizar medições de lados e ângulos, concluiu que não havia relação entre as áreas. Júlia foi a que utilizou menor variedade de ferramentas do GeoGebra. Pode-se dizer que usou o software como régua e transferidor eletrônicos, ou seja, não fez uso do caráter dinâmico do software para explorar e construir conjecturas.

É possível constatar que, para os alunos observados, a experimentação no ambiente GeoGebra não contribuiu para um avanço em relação aos resultados obtidos pelos alunos no ambiente papel e lápis, funcionando como um instrumento de confirmação dos resultados obtidos neste ambiente. Pode-se fazer a hipótese de que tal utilização do ambiente é consequência da forma de abordagem dos softwares nas disciplinas anteriores, já que as atividades não visavam a familiarização com o GeoGebra, mas sim um diagnóstico do seu uso na resolução de problemas envolvendo demonstração.

Rita e Guilherme oscilaram entre os níveis de raciocínio geométrico G1 e G2. Eles poderiam ser identificados em G2 quando justificaram suas afirmações a partir de fatos geométricos, e em G1 quando duvidaram do resultado encontrado, apesar dos argumentos teóricos. Também buscaram alguma solução por meio da movimentação da figura no ambiente GeoGebra, ou ainda, retornando ao desenho produzido no ambiente papel e lápis. As demais alunas participantes tiveram comportamento idêntico ao de Rita e Guilherme.

As justificativas apresentadas pelos alunos foram do tipo experiência mental, porém de modo incompleto, ou seja, no texto havia referência a algumas propriedades, mas continha omissões de argumentação. Consideramos que tais justificativas foram escritas pelos alunos como uma extensão do que haviam feito no ambiente papel e lápis. Eles registraram apenas o que consideraram diferente do que havia na resolução naquele ambiente, e quando não houve acréscimo, nada foi escrito.

Com base na análise apresentada, observou-se que as soluções elaboradas pelos alunos, no ambiente papel e lápis, não foram modificadas pelos mesmos, após a resolução no ambiente GeoGebra. Sublinha-se que, no caso do aluno Guilherme, o qual apresentou duas formas distintas para demonstrar as relações da questão 1 e do item a da questão 2, estas ocorreram quando o aluno trabalhava no ambiente papel e lápis. Portanto, constata-se que a experimentação no ambiente GeoGebra não acrescentou outras possibilidades para a elaboração das justificativas, ou seja, não despertou novas idéias, gerando, assim, a necessidade de aprofundamento da pesquisa na busca das reais causas dessa limitação: conhecimento das ferramentas e potencialidades dinâmicas do software, tipo de apresentação do problema, ou outros motivos a serem diagnosticados.

Cabe registrar que os alunos trabalharam oscilando entre os níveis G1 e G2. A evocação de representações para os objetos geométricos envolvidos no problema indica que nenhum aluno participante desta pesquisa estava no nível de raciocínio geométrico G3 ou apresentou um tipo de prova que pudesse ser categorizada como intelectual. Novamente atentamos para a necessidade de pesquisa empírica, envolvendo um número suficientemente grande de alunos, para validar a existência ou não da articulação teórica proposta.

Ao final da experimentação, foi realizada uma entrevista com os alunos para que falassem sobre as suas impressões a respeito da investigação realizada em dois

ambientes distintos. A pergunta inicial direcionada aos alunos foi:

– Vocês trabalharam dois problemas de Geometria, numa situação de investigação, e tinham que fazer uma demonstração. Trabalharam primeiro no ambiente papel e lápis, depois trabalharam os mesmos problemas num ambiente de geometria dinâmica. Que diferença vocês veem entre um ambiente e outro, do ponto de vista do aluno?

Transcreveu-se aqui apenas o trecho da fala do aluno Guilherme, que se relaciona com o objetivo deste artigo. Considere G para a fala de Guilherme e Pesq. para a fala da pesquisadora:

G - Um erro seu, você pode consertar aqui bem mais rapidamente do que você está fazendo com régua e compasso, no papel. Então, eu acho que facilita bastante sim. E fora os recursos que são... por exemplo, a gente aqui está comparando a área, a gente primeiro teve que achar uma razão de semelhança, provar. No caso do GD, a gente apenas digitou a função da área do triângulo e a gente verificou rapidamente qual era a razão entre as duas áreas. Aqui não seria possível a gente fazer isso, porque não tem como a gente achar, para um caso, mas todos a gente não poderia confirmar. Então, no papel a gente teria realmente que provar de outra forma, não encontrando a área.

Pesq - E você acha que se, por acaso, vocês tivessem vindo para cá, não tivessem passado pelo papel e lápis, tivessem começado a investigação nesse ambiente, as ideias para fazer a demonstração teriam sido mais rápidas? Vocês lembram que demoraram um pouquinho para chegar à bissetriz, na primeira questão?

G - Eu acho que seria mais rápido sim. Pelos recursos que o software oferece, por tudo que é mais fácil construir. Tudo isso daria as ideias mais rápido sim. Só que por outro lado, eu não sei se eu faria essa demonstração do mesmo jeito, se tivesse o software de GD.

Pesq - Faria de que jeito?

G - Por exemplo, na 2, aqui está pedindo para investigar relação entre as áreas. Como no software de GD eu tenho essa opção, de calcular a área final, eu ia

acabar primeiro, logo, de início assim, tentar calcular a área dos triângulos e tentar fazer uma relação. No paralelogramo, que é a a (o item a), o software de GD teria um valor fixo, 4; mas no trapézio, eu já não ia perceber isso rápido, porque o valor ia mudar sempre, aí pra mim, não teria nenhuma relação entre as áreas.

Pesq - Ia acabar afirmando que não existia...

G - Ia acabar afirmando que não ia ter relação nenhuma, então teria que realmente estudar mais a fundo para perceber qual era a relação, que ali tem.

Pesq - Teria que fazer um estudo no papel e lápis?

G - Exatamente.

É possível observar na fala de Guilherme o levantamento de um aspecto da utilização de softwares de geometria dinâmica na resolução de problemas geométricos: o caso da solução do problema ser uma expressão que generaliza uma dada situação geométrica, sendo representado por uma expressão literal. Em questões como o item b da questão 2, o software apresenta resultados particulares, o que pode distanciar o aluno da busca por uma resposta completa, caso este não domine as características oferecidas pelo aspecto dinâmico do software.

4. Uma proposta de tipologia de problemas geométricos

A análise apresentada acima inspirou a autora a elaborar uma tipologia de problemas geométricos visando a sua resolução no ambiente GeoGebra. A utilidade desta classificação é a orientar os professores nas escolhas adequadas de problemas geométricos, tendo em vista os conceitos a serem construídos, e/ou a reflexão de questões relacionadas ao tópico estudado.

A tipologia foi elaborada segundo a relação solicitada entre os elementos geométricos do problema. Deste modo, há três tipologias: i) problemas que solicitem a relação de posição ou de configuração; ii) problemas que solicitem uma relação aritmética expressa por um valor fixo; iii) problemas que solicitem uma relação aritmética expressa por uma expressão algébrica. Os itens a e b da questão dois, analisada neste artigo, apresentam características dos problemas do tipo ii e iii, respectivamente.

A investigação de problemas do tipo i e ii são adequadas para o ambiente GeoGebra, uma vez que o software possui ferramentas adequadas que podem auxiliar o aluno na busca da solução correta para o problema. Por outro lado, a investigação de problemas do tipo iii no GeoGebra, como já relatado neste texto, podem conduzir o aluno a uma solução equivocada.

Considerações finais

Creditamos, em parte, à subutilização das ferramentas do GeoGebra pelos alunos, o fato de estes não extraírem das experimentações neste ambiente informações que poderiam compor a argumentação desejada. Por outro lado, detectamos que o bom rendimento do trabalho de investigação no software de geometria dinâmica pode estar relacionado ao tipo de problema geométrico proposto. Em problemas geométricos, nos quais a solução seja expressa por uma expressão literal, os resultados fornecidos pelo software, que são quase sempre numéricos, podem confundir o aluno e conduzi-lo a uma conjectura falsa, ou seja, os resultados numéricos podem afastar o aluno da solução procurada. As características de problemas geométricos adequados para serem investigados em ambientes de geometria dinâmica, bem como a inversão da ordem dos ambientes papel e lápis e geometria dinâmica, constituem um estudo em desenvolvimento. A tipologia de problemas geométricos para serem investigados em ambientes no GeoGebra, exposta neste artigo, constituem os primeiros passos nesta direção.

Referências

BALACHEFF, Nicolas. Processus de Preuve et Situations de Validation. In : **Educational Studies in Mathematics**. n.18. p. 147-176, 1987.

MARTINS, Gilberto de Andrade. **Estudo de caso: uma estratégia de pesquisa**. 2. ed.. São Paulo: Atlas, 2008.

PARZYSZ, Bernard. Articulation entre perception et déduction dans une démarcge géométrique en PE1. Extraído do **Coloquio de COPIRELEM**, Tours, 2001.

PARZYSZ, Bernard. La géometrie dans l'enseignement secondaire et en

formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? In : **Quaderni di Ricerca in Didattica**. n. 17. 2006. Italia: Universidade de Palermo.

REY, Fernando Luis González. **Pesquisa Qualitativa em Psicologia: caminhos e desafios**. Tradução: Marcel Aristides Ferrada Silva. São Paulo: PioneiraThomson Learning, 2002.