A utilização do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da integral: uma articulação entre a pesquisa e a docência[1]

La utilización del GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral: una articulación entre la investigación y la docencia

EDSON CRISOSTOMO DOS SANTOS[2]
JANINE FREITAS MOTA[3]
ALEXANDRE BOTELHO BRITO[4]
RONALDO DIAS FERREIRA[5]

Resumo

O objetivo deste trabalho consiste em analisar uma atividade de Cálculo centrada no conceito intuitivo de integral definida, elaborada a partir de problemas geradores cuja solução se apóia em um processo de construção realizado com a utilização do GeoGebra. As quatro etapas da engenharia didática serviram de base para a elaboração, execução e análise da atividade desenvolvida com os estudantes do primeiro ano do curso de sistemas de informação. Uma das conclusões que chegamos se refere à relevância da articulação entre a docência e a pesquisa para a melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem da matemática universitária.

***Palavras-chave**: Processo de ensino e aprendizagem de Cálculo, integral, GeoGebra.*

Resúmen

El objetivo de este trabajo consiste en analizar una actividad de Cálculo, centrada en el concepto intuitivo de integral definida, elaborada a partir de los problemas generadores cuya solución se apoya en un proceso de construcción realizado con la utilización del GeoGebra. Las cuatro etapas de la ingeniería didáctica han servido de base para la elaboración, ejecución y análisis de la actividad desarrolladla con los estudiantes del primer año de sistemas de información. En las conclusiones resaltamos la relevancia de la articulación entre la docencia y la investigación para mejorar la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática universitaria.

***Palavras-clave**: Proceso de enseñanza y aprendizaje de Cálculo, integral, GeoGebra.*

[1] Apoio institucional: UNIMONTES/CAPES.
[2] Professor-Pesquisador da Universidade Estadual de Montes Claros - UNIMONTES. Doutorando em Educação Matemática e Mestre em Educação Matemática pela Universidade de Granada-Espanha. edsoncrisostomo@yahoo.es; edson.crisostomo@unimontes.br
[3] Professora-Pesquisadora da Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES. Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela PUC-Minas. E-mail: janinemota@gmail.com
[4] Professor-Pesquisador do Instituto Federal do Norte de Minas – IFNMG. Mestre em Educação Matemática pela UFOP. E-mail: alexandrebrito2@yahoo.com.br
[5] Professor-Pesquisador da Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES. Mestrando em Educação Matemática pela PUC/SP. E-mail: ronaldodiasferreira@yahoo.com.br

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral constitui-se em um domínio de conhecimento relevante para a cultura científica moderna, principalmente, pela potencialidade de sua utilização na resolução de problemas de distintas áreas. Entretanto, o processo de ensino e aprendizagem do Cálculo se converte em um objeto de pesquisa na educação superior, especialmente, pela problemática inerente às dificuldades encontradas para a compreensão de seus conceitos, pelo elevado índice de evasão e reprovação dos estudantes e devido à falta de articulação entre os resultados da investigação e a docência universitária. Ruthven (2002) analisa os vínculos entre a investigação e o ensino propondo uma cooperação entre os conhecimentos derivados da investigação acadêmica e os conhecimentos derivados da prática profissional – docência (RUTHVEN, 2002, p. 581).

Com o objetivo de promover uma articulação coerente entre a pesquisa em Didática do Cálculo e a docência dessa disciplina no primeiro ano do curso universitário, elaboramos uma atividade com a utilização do GeoGebra que foi desenvolvida no laboratório de informática. Os estudantes participantes, apesar de não possuírem conhecimentos prévios sobre o GeoGebra, foram orientados sobre as principais ferramentas do *software*, especialmente no que se refere àquelas relacionadas com os conceitos de Cálculo.

1. Tecnologias aplicadas ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática

Através da prática profissional docente, observamos que, nos cursos de graduação de grande parte das universidades brasileiras, muito se fala sobre inclusão digital e sobre a influência da tecnologia nas metodologias educacionais. No entanto, pouco se utiliza das ferramentas tecnológicas de forma consciente e consistente nas atividades docentes nas disciplinas das áreas de Ciências Exatas.

Consideramos que é imprescindível a integração Tecnologia e Ensino de Matemática nos cursos de graduação. No entanto, isso requer que o educador matemático esteja preparado para compatibilizar os métodos de ensino e teorias de trabalho com as tecnologias, tornado-as parte integrante da realidade do acadêmico (MISKULIN, et. al, 2006, p.107).

Dessa maneira, caberá ao docente propiciar aos acadêmicos uma aprendizagem significativa de tópicos específicos da Matemática Universitária, de relevância para a compreensão de noções/conceitos matemáticos e de suas aplicações nos diversos cursos. Nesse sentido, a utilização de recursos tecnológicos possibilitará uma visualização satisfatória dos conceitos matemáticos, o que deverá contribuir com a compreensão de seus significados (GODINO & BATANERO, 1998; GODINO, BATANERO & FONT, 2007). Além disso, a utilização dos recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem de noções/conceitos matemáticos possibilita solucionar diversas situações-problema[6] que contemplam tais conceitos implícita ou explicitamente.

Nessa perspectiva, estamos desenvolvendo um estudo, parte de uma pesquisa mais ampla, que visa contribuir com a produção, aplicação e análise de materiais didáticos com utilização de tecnologias para apoio ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, no qual deverão ser articulados os aspectos teóricos, práticos e investigativos das disciplinas, tendo em vista os resultados das pesquisas desenvolvidas na linha de tecnologias aplicadas à Educação Matemática.

Entendemos que esta pesquisa contribuirá também para o desenvolvimento profissional dos professores-pesquisadores, ampliando seus conhecimentos teóricos, práticos e investigativos referentes ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática e, particularmente, de Cálculo. Isso implicará na aquisição das habilidades necessárias ao trabalho em grupo por meio das interações presenciais e/ou virtuais, contemplando o aperfeiçoamento das competências requeridas para a realização de trabalhos colaborativos pelos docentes. Corroborando essa idéia, Azevedo afirma que:

> [...] a sociedade hoje requer um sujeito que saiba contribuir para o aprendizado do grupo de pessoas do qual ele faz parte, quer ensinando, quer aprendendo, respondendo ou perguntando. É a inteligência coletiva do grupo que se deseja por em funcionamento, a combinação de competências distribuídas entres seus integrantes, mais do que a genialidade de um só (AZEVEDO, 2006, p. 15).

Assim, "a utilização de tecnologias significa maior dedicação ao trabalho e à compreensão, ou seja, por um lado, a sala de aula se transforma e, por outro, o trabalho

[6] Estamos utilizando *situações-problema* com o significado atribuído por Onuchic (1999, APUD ALLEVATO, ONUCHIC e JANH, 2010, p. 190). Segundo essa pesquisadora, problema "[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que está interessado em resolver (1999, p.215). Desse modo, uma questão será um problema se o aluno ainda não conhecer os meios necessários à sua resolução, mas deseja resolvê-lo".

docente também sofre mudanças drásticas, sobretudo no sentido de maior intensificação do mesmo" (MERCADO, 1998, p.15).

Nesse sentido, cabe à universidade a introdução das tecnologias de comunicação e informação e a condução do processo de mudança da atuação do professor que propicie ao acadêmico buscar corretamente a informação em fontes de diversos tipos e estar engajado no processo, consciente das reais capacidades da tecnologia, do seu potencial e de suas limitações, para que possa selecionar qual é a melhor utilização a ser explorada, num determinado conteúdo, contribuindo para a melhoria do processo ensino-aprendizagem, por meio de uma renovação da sua prática pedagógica.

Porém, a operacionalização do anteriormente descrito requer uma coerente articulação entre a pesquisa e a prática docente no âmbito universitário, entendendo ambas como uma "via de mão dupla", isto é, as aportações das pesquisas contribuirão para a organização e implementação da docência e as experiências docentes revelarão novos aspectos para o desenvolvimento da pesquisa acadêmica no âmbito da Educação Matemática.

2. Breve panorama das pesquisas em Didática do Cálculo

A grande quantidade de pesquisas realizadas sobre formação de professores de matemática publicadas nos capítulos dos "Handbooks" sobre esse tema (JAWORSKI e GELLERT, 2003; ZASLAVSKY, CHAPMAN e LEIKIN, 2003; PONTE e CHAPMAN, 2006; SWODER, 2007; WOOD, 2008; PONTE e CHAPMAN, 2008) nas revistas especializadas e nos anais de congressos evidenciam a necessidade de centrar o estudo no conteúdo matemático específico que se pretende investigar. Consideramos que essa orientação se aplica também às pesquisas desenvolvidas sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática nos distintos cursos universitários, particularmente nas áreas de Ciências Exatas e Tecnológicas. Levando em consideração nossa experiência na docência universitária de Cálculo nos cursos de Matemática, Sistemas de informação e Engenharias, optamos por desenvolver essa pesquisa em Didática do Cálculo, na linha do "Pensamento matemático avançado", e concretamente sobre o "objeto matemático" *integral*. Para isso nos apoiamos na abundante bibliografia existente sobre Didática do Cálculo na literatura especializada (TALL, 1991, 1996; HAREL, SELDEN e SELDEN, 2006; ARTIGUE, BATANERO e KENT, 2007; MAMONA-DOWNS e DOWNS, 2008; KOUROPATOV e DREYFUS, 2009).

A escolha da integral como objeto matemático de investigação didática justifica-se, além de nossa experiência profissional, pela sua grande relevância na área de Matemática e por suas aplicações em outras áreas do conhecimento. Nesse sentido, corroboramos com Kouropatov e Dreyfus em que:

> Certamente não é possível imaginar a cultura científica moderna sem as integrais. Juntamente com a derivada, a integral forma o núcleo de um domínio matemático que é uma linguagem, um dispositivo e uma ferramenta útil para outros campos como a física, a engenharia, a economia e a estatística. Além disso, o conceito de integral representa uma idéia filosófica para a compreensão do mundo: a contemplação da totalidade das partes pequenas de um todo aporta conclusões sobre o todo em sua globalidade, assim como sobre sua estrutura interna e propriedades (KOUROPATOV y DREYFUS, 2009, p. 417).

A pesquisa na linha do "Pensamento matemático avançado", particularmente sobre a integral, é considerável. Ressaltaremos alguns aspectos da mesma que serão úteis neste trabalho, especialmente no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem de Cálculo I, contemplado no início dos cursos universitários de distintas áreas do conhecimento.

Tall (1991) ao abordar a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado ressaltou que:

> O câmbio do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma significativa transição: desde a descrição à definição, desde o convencimento à demonstração de maneira lógica baseada nas definições. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva, que se manifesta durante os conflitos iniciais dos estudantes universitários com as abstrações formais enfrentadas por eles no primeiro ano da universidade (p. 20).

Nossa experiência profissional no ensino de Cálculo, tanto na universidade pública quanto em faculdades privadas, tem evidenciado as dificuldades que os estudantes geralmente apresentam durante o desenvolvimento do Cálculo I. Nesse sentido encontramos diversas publicações nos PME que abordam a problemática do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo (BEZUIDENHOUT e OLIVIER, 2000; CZARNOCHA et al., 2001; RASSLAN e TALL, 2002; CARLSON et al., 2003).

Para Dreyfus e Eisenberg (1990) isso se deve ao fato do Cálculo constituir-se em um ramo da matemática superior ao qual se dedica maior tempo aos estudos e quantidade de problemas não triviais que, geralmente, estão presentes em seu processo de aprendizagem.

Artigue (1998; 2003) ressalta que a formalização dos conteúdos de Matemática requerida dos estudantes universitários os obriga a romper com o trabalho algébrico ordinário e a reconstruir significados. Em outro estudo prévio, Artigue (1991) abordou as dificuldades que surgem para os estudantes no curso introdutório de Cálculo, destacando que, no ensino tradicional da referida disciplina, tais dificuldades geralmente são resolvidas através de uma excessiva algebrização, especialmente no que se refere ao predomínio da manipulação de fórmulas em detrimento ao estudo das funções; ao cálculo de derivadas em detrimento das aproximações lineares; ao cálculo de primitivas em detrimento da busca de significados para a integral; aos algoritmos (o receitas) para calcular equações diferenciais em detrimento de solucioná-las através de aproximações numéricas e gráficas.

Em estudos que desenvolvemos anteriormente (CRISOSTOMO, ORDÓÑEZ, CONTRERAS y GODINO, 2006; CRISOSTOMO, 2008), sistematizamos alguns resultados relacionados com a caracterização dos significados de referência da integral no contexto da formação de professores de matemática. Também realizamos estudos relacionados com os conhecimentos profissionais manifestados por uma amostra de professores-formadores sobre o processo de ensino e aprendizagem da integral. Alguns resultados dos referidos estudos foram utilizados na organização da atividade prática que analisamos neste trabalho.

3. Síntese metodológica

Para produção e análise das referidas atividades nos apoiamos em alguns aspectos metodológicos propostos pela Engenharia Didática. Segundo Almouloud & Coutinho (2008):

> A noção de Engenharia Didática emergiu na Didática da Matemática (enfoque da didática francesa) no início dos anos 80. Segundo Artigue (1988), é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apóia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori (ALMOULOUD & COUTINHO, 2008).

Uma Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), inclui quatro fases: 1) análises prévias; 2) concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática; 3) Implementação da experiência; 4) análise *a posteriori* e validação da experiência.

Essa metodologia nos parece apropriada para a elaboração, execução e análise da atividade na qual está centrado este trabalho. Ressaltamos que se encontra em desenvolvimento em nossa universidade dois projetos nos quais estamos participando com um grupo de professores, os quais estão dando suporte ao desenvolvimento de nossas atividades docentes e investigativas no âmbito das tecnologias e da Matemática universitária. Trata-se do Projeto de Pesquisa: *Educação Matemática e Novas Tecnologias* e do Projeto de ensino fomentado pela CAPES, centrado na educação à distância no âmbito da universidade, intitulado *A implemantação de novas tecnologias na produção de materiais didáticos para o ensino e aprendizagem da Matemática nos cursos de graduação da UNIMONTES*. A partir dos resultados parciais obtidos nos referidos projetos, organizamos uma estrutura para produção de materiais didáticos de Matemática Universitária de cinco disciplinas, dentre as quais está contemplado o Cálculo Diferencial e Integral I. Essa estrutura está organizada a partir das seguintes sessões: título, objetivos, preparação, recursos didáticos e tecnológicos, situação-problema, processo de construção, abordagem teórica, formalização de alguns conceitos e proposições, dicas para aprofundamento dos estudos, curiosidades, sínteses, auto-avaliação/avaliação e refletindo sobre a atividade. Por questão de espaço, neste trabalho, daremos ênfase ao "processo de construção" de uma atividade de Cálculo. A base da atividade consiste em tomar como ponto de partida uma ou mais situação-problema na concepção de *Ensino-Aprendizagem-Avaliação* de Matemática através da resolução de problemas. Essa concepção é entendida como

> uma metodologia de ensino, em que um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem e a construção de conhecimento faz-se através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula. [...] Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-clave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente, durante o processo de resolução de problemas (ALLEVATO, ONUCHIC E JANH, 2010, p. 192-193).

Baseado na referida concepção e na literatura específica relacionado com o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo, apresentamos, a seguir, a atividade aplicada aos estudantes do curso de sistemas de informação antes de iniciar o estudo da integral.

4. Análise e discussão das atividades

Fizemos um recorte de uma das atividades elaboradas a qual foi aplicada em uma aula prática, realizada no laboratório de informática, para os estudantes do curso de Sistemas de Informação. Houve participação e empenho de todos os estudantes que consideraram a atividade relevante para seu processo formativo, os quais sugeriram que seja ampliada a carga horária dedicada às práticas com utilização de *software*. Segue uma breve análise da atividade desenvolvida:

Quadro 1: Atividade parcial sobre área de uma região compreendida entre curvas.

Atividade

Situação-problema 1:

Calcule a área da região plana compreendida pelo gráfico da função

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$, pelo eixo x e pela reta vertical $x=2$.

Situação-problema 2:

Como podemos definir a área de uma região plana qualquer compreendida por uma curva

$f(x)\geq 0$, pelo eixo x e pelas retas verticais $x=a$ e $x=b$?

Processo de construção

Aproximação da área sob a parábola no intervalo [a, b] através das ferramentas do GeoGebra

Após criar seu arquivo no GeoGebra execute as seguintes ações:

1. Plote o gráfico de parábola f(x) = $1/2x^2$, localizando a região A compreendida pela parábola, pelo eixo x e pela reta vertical *x=2*.
2. Use o comando *soma inferior* do GeoGebra para determinar as somas das áreas dos retângulos cujas bases são 2/n, no intervalo I_1 = [0, 2], onde n representa a quantidade de retângulos (número de partições). Use o comando seletor para definir a variável n, no intervalo [0, 100] e incremento 1.
3. No menu *opções* do GeoGebra, configure *arredondamento* para 10 casas decimais.
4. Observe e anote as somas inferiores parciais para n=10, n=50 e n=100.
5. Visualize as somas inferiores parciais ativando *animação* no seletor.
6. Utilize o seletor do GeoGebra no intervalo de 0 a 100 para fazer uma estimativa da área sob a parábola.
7. Altere o parâmetro *Max* do seletor, respectivamente para 1000, 10000, 100000 e 1000000 e verifique se as *somas inferiores* estão convergindo para determinado valor.
8. Use o comando *soma superior* do GeoGebra para determinar as somas das áreas dos retângulos cujas bases são 1/2n, no intervalo I_1 = [0, 2], onde n representa a quantidade de retângulos (número de partições).
9. Observe e anote as *somas superiores* parciais para n=10, n=50 e n=100.
10. Visualize *somas superiores* parciais ativando *animação* no seletor.
11. Utilize o seletor do GeoGebra no intervalo de 0 a 100 para fazer uma estimativa da área sob a parábola baseado nas *somas superiores*.
12. Altere o parâmetro *Max* do seletor para 10000 e verifique se as *somas superiores* estão convergindo para determinado valor.
13. Encontre a média aritmética das somas superior e inferior usando 10000 retângulos aproximantes.

A atividade foi desenvolvida pelos estudantes no laboratório de informática em uma aula com duração de 02 horários (100 minutos). Terminada a atividade, os estudantes responderam um questionário manifestando sua opinião sobre o uso das tecnologias no processo de ensino de Cálculo, dificuldades encontradas para realizar a construção, etc. Depois de concluída, a atividade foi enviada por e-mail para o professor. Os principais aspectos da construção podem ser apreciados na figura 1.

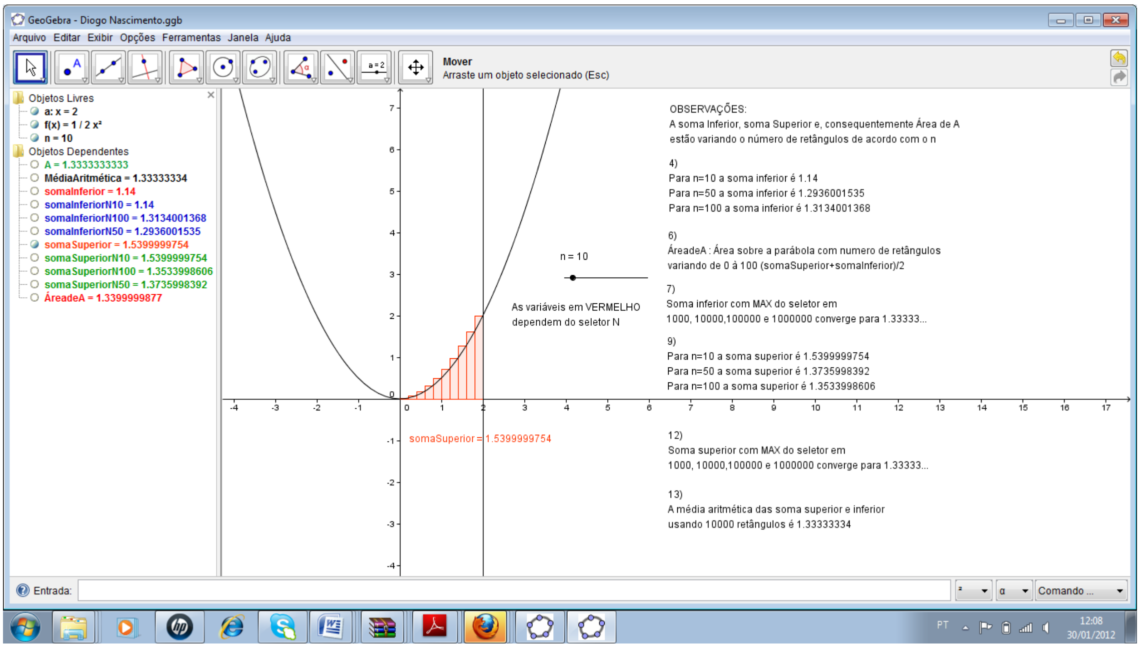

Figura 1: Construção parcial da atividade pelo estudante E_1

A atividade realizada contemplava o conceito integral aplicado ao cálculo de área entre curvas. Ressaltamos que ainda não havíamos trabalhado as aplicações de integrais na turma na qual realizamos o experimento, por isso não tratamos explicitamente do referido conceito na atividade. Durante a etapa de construção foram seguidas as orientações descritas no Quadro 1. Observamos que os estudantes, de maneira geral, tiveram um bom desempenho na realização da atividade considerando que não haviam trabalhado previamente com o GeoGebra. Entretanto, constatamos algumas dúvidas relacionadas com a utilização das ferramentas do *software*. No primeiro momento, foi questionado como poderiam localizar a região para a qual seria calculada a área (item 1), visto que não conheciam uma ferramenta para preencher aquela região. A opção adotada, nesse caso, foi a delimitação do contorno da referida região, ainda que isso não tenha sido concretizado/explicitado na atividade desenvolvida pela maioria dos estudantes.

No que se refere aos itens 2 a 7, pretendíamos que os estudantes visualizassem que a área da região poderia ser aproximada pelas somas das áreas dos retângulos aproximantes. Para que fosse possível a eles observar que quando aumentavam a quantidade de retângulos, com o objetivo de encontrar as “somas inferiores”, as somas também se modificavam, solicitamos, então, que utilizassem o arredondamento para 10 casas decimais. Os estudantes observaram que as somas eram as mesmas para determinada ordem decimal, mas sofriam alterações quando eles buscavam melhorar a aproximação.

Outra questão que vale a pena ressaltar se refere à etapa da construção que requeria a utilização do *seletor*. Essa ferramenta foi considerada a mais difícil na realização da atividade. O professor teve que orientar os estudantes para realizá-la adequadamente. Não obstante, após a inserção correta do seletor, com as informações solicitadas, os estudantes puderam visualizar que a soma das áreas dos retângulos aproximantes, usando o comando *soma inferior*, produzia boa aproximação para a área da região que pretendiam calcular. A utilização da animação contribuiu com uma melhor visualização da área em questão.

Pretendíamos que a noção de “Soma de Riemann” se tornasse significativa para os estudantes. Para isso, foi proposta uma questão mais genérica, com o intuito de contribuir com uma reflexão dos mesmos sobre a referida noção. As informações obtidas durante o processo de construção deveriam ser retomadas na “abordagem teórica”. Neste momento os estudantes deveriam mostrar que tanto o limite das somas inferiores quanto o limite das somas superiores dos retângulos aproximantes, quando a quantidade de partições n tende ao infinito, é equivalente às aproximações encontradas no processo de construção. A partir disso, propomos a generalização da definição de área como o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes quando n tende a infinito. Esse aspecto teórico seria posteriormente associado à definição de área através do conceito de integral definida.

A construção solicitada nos itens 9 a 12 foi desenvolvida de maneira relativamente simples, uma vez que eram bastante similares àquelas anteriormente realizadas com as *somas inferiores*. No entanto, constatamos novamente a dificuldade dos estudantes em operacionalizarem a ferramenta *seletor*. Essas construções parciais possibilitaram que os estudantes visualizassem as *somas superiores* das áreas dos retângulos aproximantes percebendo que as mesmas também representam uma boa aproximação da área da região e que essa pode ser obtida através de subestimação ou de superestimação dependendo da altura assumida para os retângulos aproximantes.

Finalmente, ao realizarem a média aritmética entre as somas superiores e as somas inferiores, os estudantes constataram que essa produz uma melhor aproximação para as áreas requeridas e procuraram comprovar essa conjectura a partir da visualização das somas das áreas dos retângulos aproximantes geradas no GeoGebra.

Síntese e conclusões

A separação entre a "teoria" e a "prática", entre os resultados da investigação acadêmica e o processo de ensino de Matemática, é um tema de reflexão freqüente em Ruthven (2002). Este autor analisa os vínculos entre a investigação e o ensino, propondo uma cooperação entre os conhecimentos derivados da pesquisa acadêmica e os conhecimentos derivados da prática profissional. *"Uma preocupação particular se refere a como pode ser promovida uma maior sinergia entre essas duas práticas específicas, suas formas características de conhecimento e os processos associados de criação de conhecimento"* (RUTHVEN, 2002, p. 581). A articulação coerente entre a teoria e a prática através da investigação consiste em um objetivo a ser alcançado na educação. Consideramos que tanto a teoria contribui para o enriquecimento da pesquisa, quanto os resultados das investigações contribuem para a ampliação da teoria e, uma vez que são aplicados à prática profissional do docente, para sua melhoria. Essa articulação pode converter-se em importantes aportações para a área de Educação Matemática.

Durante o desenvolvimento da atividade de Cálculo com a utilização do GeoGebra, os estudantes fizeram observações, levantaram algumas conjecturas, buscando validá-las. A análise dos resultados ocorreu de forma qualitativa a partir da observação e dos registros das atividades desenvolvidas pelos acadêmicos em consonância com os resultados das pesquisas realizadas em didática do Cálculo.

A visualização foi bastante explorada nas atividades propostas. Constatamos que após *plotar* os gráficos com a utilização do GeoGebra, os acadêmicos evocaram conhecimentos intuitivos sobre a integral, uma vez que trabalharam com as Somas de Riemann e com as noções de limites dessas somas para uma quantidade de partições tendendo ao infinito. Essas noções foram mobilizadas para realizar as construções requeridas e resolver a atividade relacionada com *áreas entre curvas.* Também foram estabelecidas algumas relações entre os conceitos prévios relacionados com a atividade (funções, intersecção entre curvas, representações gráficas, etc.), representações das figuras em termos visuais, articulação entre as configurações geométricas e algébricas e identificadas as dificuldades dos estudantes. Esses resultados proporcionaram elementos que nos permitem considerar a potencialidade de utilização do GeoGebra na elaboração e desenvolvimento de atividades destinadas à compreensão dos significados de objetos matemáticos e didáticos no âmbito da Matemática universitária.

Referências

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R.; JANH, A. P. (2010). O computador no ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: reflexões sob a perspectiva de resolução de problemas. In: JHAN, A. P.; ALLEVATO, N. S. G. (Org.). *Tecnologia e educação matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores*. Recife: SBEM, pp. 192-193.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. (2011). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática.* Florianópolis: UFSC, V.3.6, p.62-77. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/13031/12137. Acesso em: 27 março 2011.

ARTIGUE, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (2): 231-262.

ARTIGUE, M. (2003) ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Venezolana*, (X): 2, 117-134.

ARTIGUE, M., BATANERO, C.; KENT, P. (2007). Mathematical thinking and learning at post-secondary level. In: LESTER, F. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1011-1049). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., and NCTM.

AZEVEDO, W. (2006). Panorama atual da educação a distância no Brasil. Disponível em: http://www.aquifolium.com.br/educacional/artigos/panoread.html. acesso em: 18 de maio de 2006.

BEZUIDENHOUT, J.; OLIVIER, A. (2000) Students' conceptions of the integral. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 2, pp. 273- 280.

CARLSON, M. P.; PERSSON, J.; SMITH, N. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: the Fundamental Theorem of Calculus. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2 pp. 165-172. Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA. Editores: Pateman, N.A.; Dougherty, B.J.; Zilliox, J.

CRISOSTOMO, E. (2008). *Caracterización del proceso de estudio de la integral en la formación de profesores de matemáticas*. Tesis de Fin de Máster (Dissertação de Mestrado). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada.

CRISOSTOMO, E.; ORDÓÑEZ, L.; CONTRERAS, A.; GODINO, J. (2006). Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. In: CONTRERAS, A.; BATANERO, C.; ORDÓÑEZ, L. (Eds.). *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 125-166). Universidade de Jaén.

CZARNOCHA, B., LOCH, S., PRABHU, V.; VADAKOVIC, D. (2002). The definite integral: A coordination of two schemas. *Conference: ICTM-2: 2. International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level*, Grecia.

DREYFUS, T.; EISENBERG, T. (1990). On difficulties with diagrams: theoretical issues. *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2: 27-33.

DREYFUS, T.; EISENBERG, T. (1990). On difficulties with diagrams: theoretical issues. *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2: 27-33.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In: SIERPINSKA, A.; KILPATRICK, J. (Eds.). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. (Versão ampliada em espanhol disponível em, http://www.ugr.es/local/jgodino).

JAWORSKI, B. y GELLERT, U. (2003). Educating new mathematics teachers: integrating theory and practice, and the roles of practicing teachers. In: BISHOP, A. J.; CLEMENTS, M. A.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LEUNG, F. K. S. (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 829-875). Dordrecht: Kluwer.

KOUROPATOV, A.; DREYFUS, T. (2009). Integrals as accumulation: a didactical perspective for school mathematics. In: TZEKAKI, M.; KALDRIMIDOU, M.; SAKONIDIS, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 417-424. Thessaloniki, Greece: PME.

MAMONA-DOWNS, J.; DOWNS, M. L. N. (2008). Advanced mathematical thinking and the role of mathematical structure. In: ENGLISH, L. D. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 154-174). New York: Routledge.

MERCADO, L. P. L. (1998). *Formação Docente e Novas Tecnologias. Universidade Federal de Alagoas*. IV Congresso RIBIE, Brasília.

MISKULIN, R. G. S.; SILVA, M. R. C. (2010). Cursos de licenciaturas de matemática à distância: uma realidade ou uma utopia. In: JAHN, A. P.; ALLEVATO, N. S. G. (Org.). *Tecnologia e Educação Matemática*: ensino, aprendizagem e Formação de professores. Recife: SBEM, p. 105-124.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In: GUTIERREZ, A.; BOERO, P. (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishing.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: ENGLISH, L. D. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 223-261). New York: Routledge.

RASSLAN, S.; TALL, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 4, pp. 89-96.

RUTHVEN, K. (2002). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowlege. In: L.D. ENGLISH, L. D.; M. BARTOLINI-BUSI, M.; JONES, G. A.; R. LESH, R.; TIROSHM, D. *Handbook of International research in mathematics education*, pp. 581-598. London: Lawrence Erlbaum Ass.

SELDEN, A.; SELDEN. J. (2005). Perspectives on advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7 (1), 1-13.

SWODER, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In: LESTER, F. K. (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.157-223). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

TALL, D. (1991). The psycology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Netherlands: Kluwer, A. P.

TALL, D. (1996). Functions and calculus. In: BISHOP, A. et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Netherland: Kluwer, A. P.

WOOD, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education.* Rotterdam: Sense Publishers.

ZASLAVSKY, O., CHAPMAN, O.; LEIKIN, R. (2003). Professional development of mathematics educators: trends and tasks. In: BISHOP, A. J.; CLEMENTS, M. A.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LEUNG, F. K. S. (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 877-917). Dordrecht: Kluwer.