

# Resolución de problemas geométricos con GeoGebra en la formación de profesorado de educación primaria: un estudio de casos

## Geometry problem solving with GeoGebra for teacher training in primary education: some case studies

---

NATALIA RUIZ LÓPEZ<sup>1</sup>

### Resumen

*Presentamos un estudio de casos sobre resolución de problemas geométricos con GeoGebra realizado a cuatro parejas de estudiantes del Grado de Magisterio en Educación Primaria de la Universidad Autónoma de Madrid. El objetivo es analizar cómo interviene este software en la adquisición de competencias geométricas de los futuros profesores. En el artículo se describe la metodología: la selección de los casos, la elección de la prueba que realizaron, los instrumentos de recogida de datos utilizados y los criterios seguidos para analizarlos. Se profundiza en uno de los casos para ilustrar el proceso seguido y algunos de los resultados encontrados: la interacción entre la pareja y de ésta con la profesora es uno de los factores determinantes en el éxito de la resolución del problema planteado.*

**Palabras clave:** GeoGebra; formación de profesorado; competencias geométricas.

### Resumo

*Apresentamos um estudo de caso em resolver problemas geométricos com o GeoGebra fez quatro duplas de alunos da Licenciatura de Educação em Ensino Fundamental da Universidade Autónoma de Madrid. O objetivo é analisar a forma como o software envolvido na aquisição de competências geométricas dos futuros professores. O artigo descreve a metodologia: a seleção dos casos, a escolha do teste realizado, os instrumentos de coleta de dados utilizados e os critérios para análise. Aprofunda-se em um caso para ilustrar o processo seguido e alguns dos resultados: a interação entre a dupla e entre ela e o professor é um dos fatores determinantes de sucesso na resolução do problema.*

**Palavras-chave:** GeoGebra; formação de professores; competências geométricas

### Abstract

*We present some case studies in geometry problem solving with GeoGebra by four pairs of students from the Degree course "Teacher Training in Primary Education" from the Autónoma University of Madrid. The objective is to analyze how the software is involved in the acquisition of geometric competencies of future teachers. The article describes the methodology: the selection of cases, the choice of tests performed, the data collection instruments used and the criteria for analysis. One case is shown to illustrate the process followed and some of the findings: the interaction between the pair and also, between them and the teacher, is one of the determining factors in the successful resolution of the problem.*

**Keywords:** GeoGebra; teacher training; geometric competencies.

---

<sup>1</sup> Universidad Autónoma de Madrid (Spain)– [natalia.ruiz@uam.es](mailto:natalia.ruiz@uam.es)

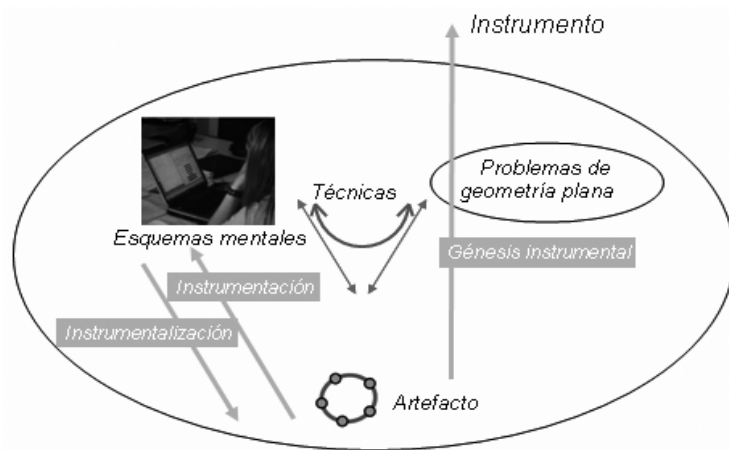
## Introducción

Los alumnos que cursan el grado de Magisterio en Educación Primaria deben adquirir competencias matemáticas y didácticas que les permitan desempeñar su profesión con éxito. Uno de los problemas que hemos detectado en la Facultad de Educación de la Universidad Autónoma de Madrid es la dificultad que encuentran los estudiantes para desarrollar estas competencias, fundamentalmente con los contenidos geométricos. Este es el origen de la investigación que hemos llevado a cabo para intentar mejorar la adquisición de competencias didáctico-geométricas mediante el uso de GeoGebra en las clases de matemáticas. En este artículo vamos a describir algunos aspectos de dicha investigación, en concreto nos centraremos en el estudio de uno de los casos que hemos analizado para profundizar en el proceso de resolución de problemas geométricos con GeoGebra.

El marco que nos sirve de sustento teórico es la teoría de la actividad instrumentada (Verillon et al., 1995). Este enfoque sirve para analizar la relación que se establece entre un sujeto (el alumno) y un objeto (el problema geométrico) cuando entre ambos media el uso de un artefacto (GeoGebra). El artefacto debe convertirse en un instrumento para el alumno y cuando eso sucede decimos que se ha producido *la génesis instrumental*. Según Artigue (2002), para un sujeto un artefacto no es un instrumento desde el principio; llega a serlo cuando se produce la génesis instrumental y el individuo construye sus propios esquemas personales o se apropia de esquemas sociales pre-existentes. El proceso de génesis instrumental se da en dos direcciones. La primera se dirige hacia el artefacto, se encuentran sus potencialidades progresivamente e incluso se transforman para usos específicos. Este es el proceso de *instrumentalización*, el individuo conoce el artefacto y aprende a utilizarlo, desarrolla esquemas de uso del artefacto. La segunda se dirige hacia el sujeto, quien elabora o se apropia de esquemas cognitivos, llamados esquemas de actividad instrumentada, que se transforman posteriormente en técnicas<sup>2</sup> que le permiten dar respuesta a las tareas planteadas. En la Figura 1 podemos ver un esquema de este proceso

---

<sup>2</sup> Se define técnica como un conjunto de procedimientos que permiten resolver un determinado tipo de problemas.



**FIGURA 1:** Proceso de génesis instrumental  
**FUENTE:** Iranzo (2009, p.434)

En la práctica, el proceso de génesis instrumental es complejo para los estudiantes porque requiere tiempo y esfuerzo. Por lo tanto, el papel del profesor, llamado *orquestación* (Trouche, 2004), es fundamental para guiar el proceso de génesis instrumental individual y colectiva de sus alumnos, ya que puede influir privilegiando el uso de unas técnicas por encima de otras.

Otro elemento que nos permitirá analizar el proceso de resolución de problemas geométricos con GeoGebra es el uso del dinamismo del software, es decir, si caracterizamos adecuadamente los tipos de arrastre utilizados podremos conocer los procesos cognitivos que están detrás. En esta investigación vamos a utilizar las modalidades de arrastre introducidas por Arzarello et al. (2002), concretamente las más usadas por los alumnos que han participado en el estudio son el arrastre guiado y el arrastre de test. En el arrastre guiado se mueven puntos libres de una figura para darle una forma determinada (por ejemplo, movemos los vértices de un triángulo cualquiera para conseguir que sea rectángulo). Este tipo de arrastre se usa normalmente en la fase de descubrimiento, cuando el alumno investiga y explora cómo resolver la tarea planteada. En el arrastre de test se mueven puntos libres o semi-libres para comprobar si la figura mantiene sus propiedades iniciales, si la figura pasa el test es que está construida de acuerdo a las propiedades pedidas. Principalmente se usa para validar o comprobar conjeturas.

## 1. Metodología

La población del estudio es un grupo de 50 estudiantes de 2º curso del Grado de Magisterio en Educación Primaria de la Universidad Autónoma de Madrid. Estos

alumnos estaban recibiendo, en la asignatura Matemáticas y su Didáctica II, docencia disciplinar y didáctica sobre Geometría y Medida. Además, llevaban dos meses realizando un taller semanal de 90 minutos donde resolvían problemas mediante GeoGebra. En estas sesiones los estudiantes trabajaban en parejas estables.

La selección de las parejas que participarían en el estudio de casos se realizó teniendo en cuenta los niveles previos de competencia geométrica y de competencia digital de los dos miembros de la pareja. Una vez hecha la selección, se informó a las cuatro parejas candidatas a participar en la investigación de las características del estudio y estuvieron de acuerdo en participar y ser grabadas.

La prueba que deberían realizar las parejas seleccionadas se elaboró teniendo en cuenta los problemas que habían resuelto en el taller de GeoGebra, de forma que se pusieran en juego competencias de transferencia de conocimientos ya adquiridos y generalización de propiedades geométricas. Se trataba de la siguiente actividad de construcción de figuras, conjetura e investigación:

1. Utilizando la herramienta de GeoGebra “polígono regular”, construid un cuadrado de color azul. ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado (rojo)? (Debe tener los vértices en cada uno de los lados del cuadrado azul).

Anotad todo lo que vais haciendo con GeoGebra en esta hoja (indicando la herramienta de GeoGebra que utilizáis en cada caso), hasta las construcciones que no sirvan y que habéis borrado.

2. ¿Hay más cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul de la actividad anterior? Realizad la construcción, anotando todos los pasos que habéis seguido para ello (incluso los que habéis borrado).

La prueba se realizó en dos días consecutivos: dos parejas el día 30 de noviembre de 2010 y otras dos el día 1 de diciembre. Cada pareja estuvo aislada en una sala durante una hora, aunque la profesora del curso acudía cada poco tiempo para supervisar el proceso y ofrecerles sugerencias si era necesario. En la sala disponían de un ordenador portátil con GeoGebra y papel y lápiz para completar los auto-protocolos de resolución y como ayuda para realizar dibujos o cálculos. Al terminar esta sesión se recogieron los archivos de GeoGebra que generaron, los auto-protocolos escritos de los procesos de

resolución del problema y la grabación en vídeo de las interacciones entre los integrantes de cada pareja y la profesora. Con toda esta información se elaboró un registro para cada pareja donde aparecen integrados todos los aspectos recogidos anteriormente, de modo que puede reconstruirse lo más fielmente posible la sesión. En la Figura 2 vemos un fragmento del registro de una de las parejas.

Sesión estudio de casos. Pareja 25: Helena y Lorena

Helena maneja el ordenador y Lorena lee el enunciado. Empiezan la construcción:

H: ¿polígono regular?

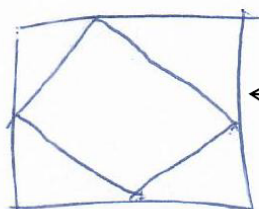
L: Sí, azul

H: vale

L: ¿podéis inscribir dentro de él otro cuadrado rojo? Yo me supongo que será...

H: ¿quieres una hoja?

L: si éste es el cuadrado, que sea así (Lorena hace un dibujo en una hoja de papel)



Dibujos realizados por las alumnas en papel

Comentarios de la investigadora (negro)

Diálogos entre las estudiantes (azul)

H: yo también lo pienso. Para esto lo que yo hice en una práctica fue hallar los puntos medios de cada lado y...

L: y hacer segmentos

H: y hacer... ¡no!..., claro

L: luego unir segmentos...

H: bueno, no sé si hacer segmentos o hacer también como esto de 4 para que te quede junto, ¿me entiendes?

L: sí, que en vez de hacer segmentos, como tenemos los puntos, hacer un polígono regular

H: claro

L: pues venga, vamos

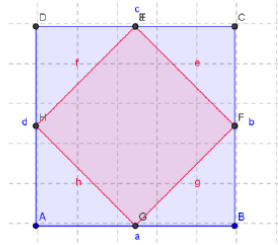
H: tienes que escribirlo

L: ¿qué pongo?

H: pues pon lo que hemos dicho

Helena va realizando la construcción en silencio, mientras Lorena escribe el auto-protocolo:

1. Para hallar el cuadrado inscrito, vamos a hallar el punto medio de cada lado del cuadrado y luego crear un cuadrado con la herramienta "polígono regular"



Construcciones de GeoGebra de las estudiantes (imágenes)

Narración de las alumnas del procedimiento de resolución (rojo)

FIGURA 2: Fragmento del registro de la pareja 25

Los registros de cada pareja se analizaron pormenorizadamente para detectar y describir los siguientes elementos a lo largo del proceso de resolución del problema planteado:

- Técnicas utilizadas

- Tipos de arrastre
- Obstáculos
- Interacción entre la pareja
- Interacción profesora-pareja
- Lenguaje utilizado en el auto-protocolo

Estos elementos se recogieron en tablas que permiten resumir la sesión desarrollada por cada pareja atendiendo a sus comportamientos en cada uno de los aspectos señalados. A partir de dichas tablas se ha obtenido información que nos sirve para profundizar en el proceso de génesis instrumental llevado a cabo en cada caso objeto de estudio, interpretando los resultados mediante los criterios que nos ofrece la teoría de la instrumentación que nos sirve de marco teórico. Vamos a ver con mayor detenimiento el análisis realizado de la sesión desarrollada por la pareja número 2.

## 2. Análisis de la sesión realizada por la pareja 2

La pareja nº 2 está formada por I, con un nivel de competencia geométrico y digital alto y por P, con nivel de competencia geométrico medio y de competencia digital bajo. En las siguientes tablas se resume el análisis del registro de esta pareja. Hemos dividido el proceso de resolución del problema en tres partes para facilitar el análisis de todos los elementos. La primera parte corresponde a la resolución del punto 1 del problema planteado. La segunda y tercera parte resuelven el punto 2: encuentran otra solución al apartado 1 y una solución general, respectivamente.

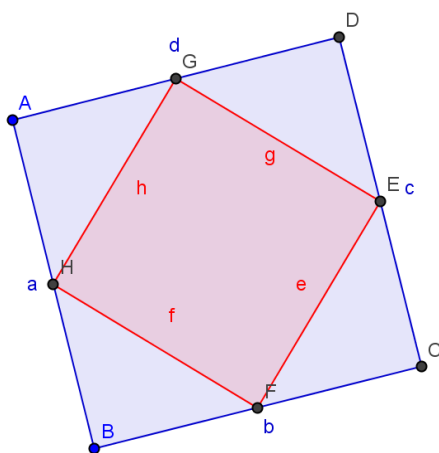
<b>1ª Parte del problema</b>	Utilizando la herramienta de GeoGebra “polígono regular”, construid un cuadrado de color azul. ¿Podéis inscribir dentro de él otro cuadrado (rojo)?
Técnicas	Construyen un c. azul con “polígono regular”. Determinan los puntos medios de cada lado y unen esos puntos con “polígono”.
Tipos de arrastre	Usan “arrastre de test” con el c. azul cuando terminan la construcción de la figura.
Obstáculos	Dudan si usar “segmento entre dos puntos” o “polígono” para construir el c. rojo.
Interacción pareja	I toma decisiones y maneja el ratón. También precisa términos y termina la explicación de P. P anota en el auto-protocolo y explica el procedimiento a la profesora.
Interacción prof-	La profesora sugiere mejoras al final del proceso y pide que le expliquen el

pareja	procedimiento seguido.
Lenguaje del auto-protocolo	Hay algunos errores de sintaxis, pero el lenguaje geométrico es adecuado.

**Cuadro 1. Análisis de la 1ª parte del problema- pareja nº 2**

En la primera parte del problema, I no duda en el procedimiento para llegar a la solución: determinar los puntos medios de cada lado del cuadrado azul (Figura 3). Está transfiriendo conocimientos ya adquiridos, en concreto en la práctica 8 del taller de GeoGebra trabajó el teorema de Varignon y estudió como era el cuadrilátero obtenido uniendo los puntos medios de otro cuadrilátero. Un caso particular de este problema era investigar el caso del cuadrado. El único obstáculo encontrado es utilizar la herramienta “segmento” o “polígono” para unir los puntos medios y construir el cuadrado rojo inscrito. Es un obstáculo intrínseco a GeoGebra, con lápiz y papel esta duda no tendría sentido. En cualquier caso, resuelven el asunto con rapidez y no constituye un auténtico problema para ellas.

Al acabar la construcción de la figura usan el “arrastre de test” moviendo los vértices libres del cuadrado azul para comprobar que el problema está resuelto.



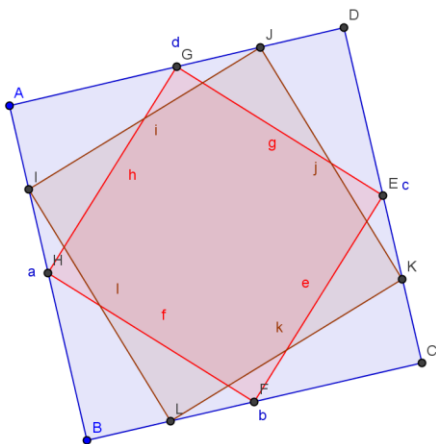
**FIGURA 3:** Construcción de la primera parte de la pareja nº 2

En cuanto a las interacciones que se han creado, es evidente que I es quien toma la iniciativa para realizar la construcción: elige el procedimiento, maneja el software, precisa términos cuando P está explicando a la profesora los pasos que han seguido y termina el relato que inició P. P adopta un papel secundario, es ella la que escribe el procedimiento en el auto-protocolo y luego lo lee en alto para que I le de el visto bueno. La intervención de la profesora se limita a sugerir al final de la construcción que limpien la pantalla de elementos inútiles y a preguntar los pasos que han dado para resolver el problema.

<b>2ª Parte del problema</b>	“Construid otro cuadrado rojo inscrito dentro del cuadrado azul”
Técnicas	Determinan los puntos medios entre los vértices del c. rojo y el c. azul. Unen los 4 puntos con “polígono”. Miden lados y ángulos para comprobar que la figura construida es un cuadrado.
Tipos de arrastre	No usan arrastre en esta construcción
Obstáculos	Cierta confusión entre cuadrado y rombo. Al principio sólo miden los lados de la figura. Luego miden también ángulos.
Interacción pareja	P toma la iniciativa. I sigue sus instrucciones y contesta las preguntas de la prof.
Interacción prof-pareja	La profesora pide que comprueben que es un cuadrado. Pregunta si medir los lados es suficiente. Al final pregunta: ¿Habría más cuadrados inscritos todavía?
Lenguaje auto-protocolo	No describen esta construcción en el auto-protocolo.

**Cuadro 2. Análisis de la segunda parte del problema- pareja nº 2**

En la segunda parte del problema se hacía la siguiente pregunta: *¿Hay más cuadrados que pueden inscribirse dentro del cuadrado azul de la actividad anterior?* Se pretendía que generalizaran buscando todos los cuadrados que son solución del problema. P toma la iniciativa y repite el procedimiento usado en la primera parte, determinando los puntos medios de la mitad de cada lado del cuadrado azul, luego une los puntos con la herramienta “polígono” (Figura 4). En esta figura no usan ningún tipo de arrastre. La comprobación de que la solución es efectivamente un cuadrado la hacen a petición de la profesora y consiste en medir los cuatro lados del cuadrado rojo. La profesora pregunta: *¿si fuera un rombo, no pasaría eso también?*, lo que les lleva a medir también los ángulos después de algunas dudas sobre las propiedades de cuadrados y rombos.





**FIGURA 4:** Construcción de la segunda parte de la pareja n° 2

En esta parte I sigue las instrucciones de P, aunque es ella la que contesta a las preguntas de la profesora. El papel de la profesora es más influyente en esta etapa del proceso de resolución, es la que provoca que comprueben la figura y realiza una pregunta fundamental para que no den por resuelto el problema: *Habéis encontrado otro cuadrado, la pregunta es ¿habrá más todavía?*

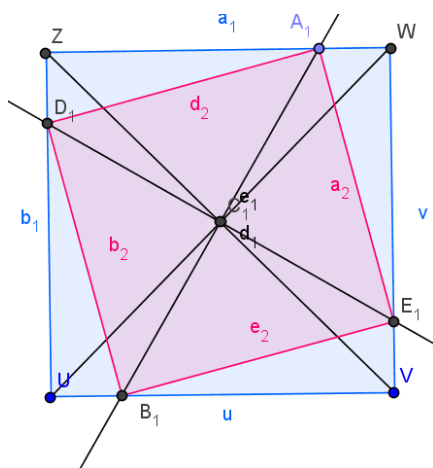
<b>3ª Parte del problema</b>	“Generalización de la figura: construid un cuadrado rojo dinámico que esté inscrito en el cuadrado azul”
Técnicas	<p>1) P propone diversas técnicas “sin pensar”</p> <p>2) construyen un cuadrado colocando 2 vértices en 2 lados del c. azul, pero no está inscrito.</p> <p>3) intentan utilizar procedimientos utilizados en otros problemas, sin llegar a concretarlos.</p> <p>4) trazan una diagonal del c. azul y buscan relaciones entre las medidas de triángulos y cuadrados, sin llegar a la solución.</p> <p>5) determinan el centro del c. azul (intersección diagonales), señalan un punto <math>A_1</math> en uno de sus lados y su opuesto por el centro con “recta que pasa por 2 puntos” e “intersección entre 2 objetos”, trazan la “perpendicular a esa recta por el centro” y con “intersección entre 2 objetos” determinan los 2 vértices que faltaban. Usan “polígono” para unir los 4 vértices.</p>
Tipos de arrastre	<p>2) “arrastre guiado” para inscribir el c. rojo en el azul y “arrastre de test” para comprobar que la figura se mantiene cuando se mueven los vértices del c. azul.</p> <p>“arrastre de test” para comprobar que el c. rojo no permanece inscrito cuando se mueven sus vértices libres.</p> <p>5) la profesora pide que hagan “arrastre de test” para comprobar que el opuesto a <math>A_1</math> se mantiene al moverlo.</p>
Obstáculos	<p>1) P quiere hacer libres puntos que son dependientes por construcción. Las alumnas se bloquean y no hacen nada.</p> <p>2) tienen dificultades en entender a la profesora cuando les pide construir un c. rojo que generalice todas las posiciones posibles.</p> <p>4) Intuyen que construyendo la diagonal a partir de <math>A_1</math> podrían encontrar la solución, pero no saben cómo hacerlo.</p>
Interacción pareja	<p>P no entiende la idea de generalizar el c. rojo, I se lo explica.</p> <p>En la etapa 1), I pregunta el propósito de su propuesta a P y ella reconoce no</p>

	<p>saberlo.</p> <p>En las etapas 2, 3 y 4 las dos intentan encontrar un camino.</p> <p>En 5), I construye la figura y P mira la pantalla en silencio. I dicta a P para escribir el auto-protocolo.</p>
Interacción prof-pareja	<p>2) La prof sugiere usar la construcción para intuir la posible solución. Guía a las alumnas para que generalicen, pregunta ¿cuántos cuadrados hay inscritos en el c. azul?</p> <p>4) La prof repite varias veces que tienen que construir el c. rojo a partir de un punto en un lado del c. azul teniendo en cuenta las relaciones dentro de un cuadrado. Pregunta a P y guía a la pareja para que tengan en cuenta todas las propiedades de la figura. I es quien contesta a sus preguntas.</p> <p>5) La prof pide que limpien la construcción y anoten el procedimiento teniendo cuidado en los términos elegidos.</p>
Lenguaje auto-protocolo	No anotan todos los intentos realizados, pero el lenguaje es bastante correcto.

**Cuadro 3. Análisis de la tercera parte del problema- pareja nº 2**

Esta parte es la más complicada para las alumnas. Tardan en comprender qué significa encontrar un cuadrado dinámico que generalice todas las posiciones posibles que son solución del problema. El proceso pasa por cinco fases en las que van probando técnicas distintas, hasta que consiguen realizar la construcción. En las fases 1, 3 y 4 intentan transferir conocimientos geométricos anteriores, sin lograr encontrar un procedimiento que les permita llegar a la solución. La fase 2 resulta productiva porque les hace intuir que hay infinitos cuadrados que son solución del problema, aunque les plantea otra dificultad que es cómo construir un cuadrado general. En esta fase usan “arrastre guiado” y “arrastre de test”, ya que la propia naturaleza de la actividad planteada requiere el uso del carácter dinámico de GeoGebra.

La intervención de la profesora en esta parte es fundamental porque seguramente sin las preguntas que va formulando en la fase 4 las alumnas no hubieran llegado a realizar la construcción final. El hecho de que construyan el cuadrado inscrito utilizando como técnica la descrita en la tabla en la fase 5 (Figura 5) se debe a la orientación dada por la profesora, ya que podían haber utilizado procedimientos distintos. También es cierto que el uso de la herramienta “refleja objeto por punto”, que permite construir el simétrico de un vértice respecto al centro del cuadrado, no la habían utilizado anteriormente por lo que era difícil que se les ocurriera este procedimiento.



**FIGURA 5:** Construcción de la tercera parte de la pareja nº 2

Los obstáculos que encuentran son de dos tipos: técnicos y geométricos. P demuestra tener un nivel de instrumentalización menor que I y manifiesta dificultades en el uso de GeoGebra, posiblemente esto fomente el reparto de papeles que se adjudican: I manejar el ratón y P escribir el auto-protocolo. Por otro lado, son patentes los obstáculos geométricos trasladados al software (Drijvers, 2003): construcción de las diagonales del cuadrado conocido sólo un vértice, propiedades del cuadrado, etc.

En cuanto a la interacción entre la pareja, podemos decir que la construcción final la realiza I en solitario con la guía de la profesora. También en esta parte el auto-protocolo lo redacta I, que le dicta a P el procedimiento seguido y los intentos infructuosos. P demuestra que generalizar le resulta difícil y se muestra más pasiva que en la segunda parte. Por último hay que indicar que el vocabulario y el lenguaje expresados en el auto-protocolo son correctos y explican claramente el procedimiento que han seguido, aunque no recogen todos los pasos.

### 3. Resultados

Los resultados que hemos extraído de este estudio de casos son todavía parciales, puesto que aún no hemos acabado de analizar toda la información recogida. Nuestra pretensión es poder caracterizar el tipo de alumnado que obtiene más beneficios en el desarrollo de competencias geométricas mediante la utilización de GeoGebra. Sin embargo, hemos podido observar algunos comportamientos que pueden ayudarnos a reflexionar sobre la práctica docente con GeoGebra:

- La interacción entre los dos miembros de la pareja resulta beneficiosa para ambos. La comunicación que deben establecer mejora su desarrollo de la competencia lingüística y les ayuda a clarificar sus procesos cognitivos.

- El nivel previo que tienen los alumnos en competencia geométrica (CGEO) y en competencia digital (CDIG) parece influir en el reparto de roles en la pareja. Los alumnos que tienen mayor nivel de CDIG suelen tomar la iniciativa en el manejo de GeoGebra y los de mayor nivel de CGEO suelen decidir el procedimiento de resolución del problema planteado.
- Los alumnos encuentran obstáculos técnicos y geométricos a la hora de resolver problemas con GeoGebra. Su nivel de instrumentalización afecta de manera directa, por eso no resulta efectivo el empleo esporádico del software, ya que no les permite familiarizarse suficientemente con el manejo de las herramientas y acaba siendo un impedimento para la resolución de problemas. Por otro lado, también están los obstáculos geométricos trasladados a GeoGebra: son carencias anteriores de los alumnos que el software en algunos casos logra salvar pero que reaparecen a lo largo del proceso de resolución del problema.
- La transferencia de conocimientos adquiridos con anterioridad resulta sencilla para todas las parejas que han participado en el estudio. Todas llegan sin ninguna dificultad a resolver la primera parte del problema, construyendo el cuadrado rojo sobre los puntos medios de los lados del azul.
- Sin embargo, la generalización de la solución ofrece una dificultad mucho mayor para todas ellas. Es aquí cuando el carácter dinámico de GeoGebra representa una ventaja sobre otros métodos, como lápiz y papel. Las distintas modalidades de arrastre les permiten explorar, buscar contraejemplos, llegar a la solución y comprobar que realmente cumple las condiciones buscadas.
- La interacción entre la pareja y la profesora es muy importante y puede ser decisiva en la elección de las técnicas de resolución elegidas. En todos los casos estudiados la profesora orienta a los alumnos en la etapa de generalización, de forma que todas las parejas consiguen resolver el problema. Probablemente algunas de ellas habrían desistido sin la guía de la profesora o hubieran elegido otros procedimientos.

## Conclusiones

GeoGebra ha ayudado, a la mayoría de los futuros maestros que han participado en esta investigación, a visualizar los procesos de resolución de problemas y a generalizar soluciones parciales. El software favorece que puedan superar obstáculos geométricos anteriores y promueve el desarrollo de competencias geométricas: comprobar fácilmente propiedades y relaciones entre las figuras que son difíciles de realizar con lápiz y papel, realizar conjeturas y refutarlas, buscar contraejemplos, etc. Sin embargo, hay que tener en cuenta que los alumnos obtienen estos beneficios cuando su nivel de instrumentación es suficiente, es decir, cuando GeoGebra es una herramienta habitual en su formación y el proceso de génesis instrumental ha tenido tiempo de realizarse con

éxito. Esto lo hemos comprobado comparando los resultados obtenidos después de realizar el taller de GeoGebra semanal durante tres meses, con los resultados de un taller piloto mucho más corto que se realizó con anterioridad y que sirvió para preparar la metodología y las actividades del taller de la investigación (Ruiz-López, 2011).

Por otra parte, trabajar en parejas y tener que comunicar sus resultados parece mejorar el uso del vocabulario geométrico y su comprensión. Esta mejora de la competencia lingüística resulta de especial importancia para su futura labor como profesores de educación primaria. A la vez, resolver los problemas en pareja facilita la superación de obstáculos que individualmente resulta más difícil conseguir. También limita el peso del profesor como único depositario del saber matemático.

En cuanto al papel del profesorado en un entorno GeoGebra, llamado orquestación por Trouche (2004), parece bastante evidente que es fundamental en dos aspectos: la elección de las actividades que propondrán a sus alumnos puede ser determinante para conseguir que GeoGebra sea un medio del que se puedan obtener todos los beneficios expuestos más arriba, además la orientación del profesor puede favorecer que los alumnos empleen unas técnicas en lugar de otras en los procesos de resolución de problemas.

Otras cuestiones que tenemos que seguir estudiando a la luz de los resultados obtenidos en esta investigación son:

- cómo favorecer el proceso de apropiación del software en los casos de alumnos con bajo nivel de competencia digital, de forma que se pueda producir satisfactoriamente la génesis instrumental.
- cómo integrar GeoGebra en las aulas de modo más natural para que pueda generalizarse su uso, aunque no se disponga de ordenadores personales para todos los alumnos.
- cómo interviene GeoGebra en la adquisición y desarrollo de competencias didáctico-geométricas en los futuros profesores.
- cómo utilizan los alumnos que han seguido el taller de GeoGebra este recurso en sus prácticas docentes.

## Referencias

ARTIGUE, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. v. 7, n. 3, 245-274.

ARZARELLO, F., et al. (2002). A Cognitive Analysis of Dragging Practices in Cabri Environment. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*. v. 34, n. 3, 66-72.

DRIJVERS, P. (2003). *Learning Algebra in a Computer Algebra Environment: Design Research on the Understanding of the Concept of Parameter*. Tesis. Universiteit Utrecht.

IRANZO, N. (2009). La Influencia Conjunta Del Uso De Geogebra y Lápiz y Papel En La Adquisición De Competencia Del Alumnado. *Enseñanza De Las Ciencias: Revista De Investigación y Experiencias Didácticas*. v. 27, n. 3, 433-446.

RUIZ-LÓPEZ, N. (2011). *GeoGebra Workshop for the Initial Teacher Training in Primary Education*. Málaga ed.

TROUCHE, L. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Students' Command Process through Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. v. 9, n. 3, 281-307.

VERILLON, P.; and RABARDEL, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education*. v. 10, n. 1, 77-101.