Clasificación particional de cuadriláteros como fuente de demostraciones y construcciones en la formación inicial de profesores

MARIO DALCÍN[1]

VERÓNICA MOLFINO[2]

Resumen

Se presenta una investigación llevada a cabo con tres grupos de estudiantes de primer año de Profesorado de Matemática de Enseñanza Media en el Instituto de Profesores 'Artigas' (Montevideo – Uruguay), en su curso regular de Geometría Euclidiana. El objetivo de la misma fue indagar sobre las posibilidades de construcción y justificación de propiedades de cuadriláteros generados a partir de clasificaciones no tradicionales de los mismos. La investigación se llevó adelante trabajando en equipos de tres o cuatro estudiantes, tanto en lápiz y papel como en GeoGebra, y colectivizando al final de cada actividad. La experiencia permitió constatar que el ambiente dinámico fue una herramienta que posibilitó a los estudiantes transitar entre una geometría empírica y una geometría deductiva.
***Palabras clave**: Clasificación de cuadriláteros, construcción, demostración.*

Resumo

Apresenta-se uma pesquisa realizada com três grupos de alunos do primeiro ano da Faculdade de Matemática do ensino médio do Instituto de Professores "Artigas" (Montevideo - Uruguai), no seu curso normal da Geometria Euclidiana. O objetivo desta foi investigar as possibilidades de construção e justificação das propriedades de quadriláteros gerados a partir de classificações não-tradicionais dos mesmos. A pesquisa foi realizada com estudantes trabalhando em equipes de três ou quatro alunos, tanto no lápis e papel e GeoGebra, e coletivizada até o final de cada atividade. A experiência permitiu ver que o ambiente dinâmico foi uma ferramenta que permite aos estudantes se mover entre uma geometria empírica e uma geometria dedutiva.
***Palavras-chave**: Classificação dos quadriláteros; construção; demonstração.*

Introducción

Los estudiantes que inician su formación como profesores de matemática de enseñanza media en el Instituto de Profesores "Artigas" (IPA, Montevideo – Uruguay), enfrentados a la tarea de nombrar y dibujar cuadriláteros, incluyen en su lista a cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, paralelogramo tipo, trapecio, trapecio isósceles, trapecio birrectángulo, trapezoide, romboide… Reuniendo todas sus respuestas, la lista nunca sobrepasa la docena de nombres. Dado que estos son los cuadriláteros que

[1] Instituto de Profesores 'Artigas', Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación, Uruguay – mdalcin00@gmail.com
[2] Instituto de Profesores 'Artigas', Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación, Uruguay – veromolfino@gmail.com

generalmente se presentan en Enseñanza Primaria, las respuestas de los estudiantes nos sugieren que durante su formación posterior ha sido reforzada la idea de que esos son los únicos cuadriláteros que existen.

Si a estos mismos estudiantes se les solicita que definan los cuadriláteros nombrados, surge una diversidad amplísima de respuestas que implican una diversidad de clases bajo un mismo nombre, es decir, un mismo nombre designa conjuntos distintos de figuras. Las mismas toman en cuenta igualdad o paralelismo de lados, igualdad de ángulos, igualdad de diagonales o ángulo entre ellas o posición de su punto de intersección, y combinan estos elementos de las más diversas maneras.

Cuando se pide a los estudiantes que dibujen a mano alzada o con instrumentos geométricos los cuadriláteros previamente nombrados, las figuras en su gran mayoría aparecen en posiciones prototípicas. Los rectángulos con lados horizontales y verticales, los rombos con la diagonal mayor en vertical, los trapecios con lados paralelos en horizontal y el lado superior menor que el lado inferior, los trapecios birrectángulos con ángulos rectos a la izquierda además de lados paralelos horizontales.

También observamos que estos estudiantes tienen dificultades a la hora de discernir si dos definiciones son equivalentes o no son equivalentes. Las dificultades se presentan tanto para hallar un ejemplo que esté en una clase y no en otra, y fundamentar así que dos definiciones no son equivalentes, como para elaborar una demostración que justifique la equivalencia de dos definiciones.

Si a estos estudiantes se les pide que clasifiquen de alguna manera los cuadriláteros nombrados, en la mayoría de los casos lo hacen recurriendo a tres clases: paralelogramos, trapecios, trapezoides, asumiendo el paralelismo de los lados como criterio: dos pares de lados paralelos, un solo par de lados paralelos o sin lados paralelos. Hasta aquí la clasificación es particional: si un cuadrilátero está un una clase no está en otra, y la unión de las clases conforman los cuadriláteros. Dentro de cada una de estas tres clases hacen nuevas distinciones pero recurriendo a diversos criterios. Por ejemplo, en el caso de los trapecios usan como criterio la igualdad de lado y la igualdad de ángulos, para distinguir trapecio isósceles y trapecio birrectángulo respectivamente. Dentro de los trapezoides se distingue el romboide siguiendo un criterio de igualdad de pares de lados consecutivos.

Ante esta situación nos planteamos como objetivo general diseñar una serie de actividades que permitieran a los estudiantes ampliar sus conocimientos sobre los cuadriláteros así como involucrarlos en los procesos de construcción y demostración.

1. Lo que dicen los libros de texto

Buscando los orígenes de las concepciones de los estudiantes revisamos las definiciones y clasificaciones que asumen distintos libros de texto usados ayer y hoy en Uruguay. Las definiciones de rectángulo que aparecen en tres de esos libros son: “El rectángulo está formado por cuatro lados iguales dos a dos y cuatro ángulos rectos” (VV.AA., 1979, Texto único 4º); “Se llama rectángulo al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos.” (Repetto, Linskens, Fesquet, 1991, Geometría 2); “Si en un paralelogramo uno de los ángulos es recto, la figura se denomina rectángulo.” (Petracca, Varela y Foncuberta, 1984, Matemática II)

Algunas de las definiciones de rectángulo dadas por estudiantes que inician su formación en el Profesorado de Matemática en el IPA son: “Cuadrilátero que tiene sus lados paralelos iguales y tres ángulos de 90º”; “Cuadrilátero con sus lados opuestos iguales y paralelos y además tiene un ángulo recto”; “Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos y un ángulo recto”; “Cuadrilátero con dos lados paralelos y dos ángulos opuestos iguales y rectos”; “Cuadrilátero con lados opuestos iguales y cuatro ángulos rectos”; “Cuadrilátero con lados opuestos iguales y un ángulo recto”; “Cuadrilátero con cuatro ángulos iguales”; “Cuadrilátero con cuatro ángulos rectos”; “Cuadrilátero con tres ángulos rectos”; “Cuadrilátero con dos ángulos opuestos rectos”; “Cuadrilátero con tres ángulos rectos y dos lados distintos”; “Paralelogramo que tiene todos sus ángulos rectos y sus lados opuestos de igual medida”; “Paralelogramo con cuatro ángulos rectos”; “Paralelogramo con ángulos iguales”; “Paralelogramo con dos ángulos rectos”; “Paralelogramo con un ángulo recto.”

En las definiciones de los libros se observa el mismo fenómeno que en las definiciones dadas por los estudiantes: un mismo término tiene significados distintos. Esto genera un problema didáctico de comunicación, ya que al referirse a ‘rectángulo’ cada estudiante está resaltando características distintas o con la palabra ‘rectángulo’ hace referencia a conjuntos de figuras distintos.

Las figuras que incluyen los textos aparecen en las posiciones prototípicas (Hershkowitz, 1990) antes mencionadas para las figuras de los estudiantes.

Las clasificaciones presentes en los textos anteriores recurren a la cantidad de lados paralelos como criterio, distinguiendo tres clases: paralelogramos, trapecios, trapezoides. Dependiendo del texto, cada una de estas clases tiene a su vez subclases consideradas en forma particional o jerárquica (cuando una clase forma parte de otra).

Como objetivos específicos nos planteamos diseñar una serie de actividades que permitan a los estudiantes i) concebir y construir otros cuadriláteros, o fundamentar la imposibilidad de su existencia; ii) hacer clasificaciones de los cuadriláteros distintas a las que aparecen en los libros de texto; iii) establecer si dos definiciones son o no equivalentes.

2. ¿Cómo concebir la geometría y la actividad geométrica?

Houdement y Kuzniak (1993) proponen tres geometrías:

Geometría I. La geometría natural. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

Geometría II. La geometría axiomática natural. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.

Geometría III. La geometría axiomática formalista. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

Estas tres geometrías nos dan un marco desde el cual dar cuenta de toda la geometría, desde la que se trabaja en la enseñanza primaria hasta aquella con la que trabaja un matemático.

Estas Geometría I, Geometría II y Geometría III podrían pensarse en un primer momento como niveles a través de los cuales los estudiantes deberían transitar, concebirlas como un sistema de jerarquías: la Geometría II mejor que la Geometría I, la Geometría III mejor que la Geometría II. Así es como ha sido concebida tradicionalmente la enseñaza de la geometría, como un camino unidireccional, siempre ascendente:

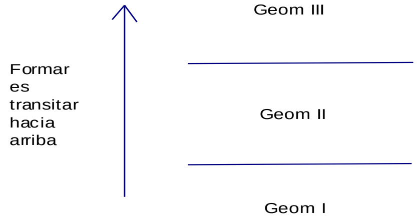

FIGURA 1: Concepción tradicional de la enseñanza de la Geometría

Sin embargo, no se trata de dirimir cuál de estas geometrías es mejor, no es eso lo que está planteado: los autores postulan tres geometrías posibles, tres enfoques distintos de un mismo hecho, pero donde ninguno niega a los otros. Las prácticas permiten ver en cuál se está trabajando en cada momento, son tres dimensiones distintas: el camino deductivo es uno de esos caminos (Geometría II), pero también puede ser el de constatar mediante mediciones (Geometría I), o validar al interior de un sistema axiomático formal (Geometría III). Cada una de estas dimensiones no niega a la otra. Esto permite concebir la formación de un estudiante en el ámbito de la geometría como un tránsito continuo entre estas tres dimensiones.

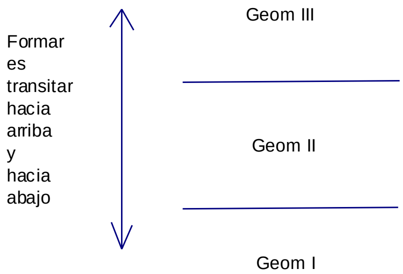

FIGURA 2: Concepción de la enseñanza de la Geometría de los autores

Consideramos que dadas las características antes mencionadas de los estudiantes que ingresan al profesorado de matemática, así como la amplitud del modelo de Houdement y Kuzniak (1993), este nos puede ser de utilidad para entender el trabajo geométrico de nuestros estudiantes y así poder contribuir a su desarrollo. Consideramos que las producciones de nuestros estudiantes al iniciar sus estudios de profesorado se ubican dentro de la Geometría I o la Geometría II, dependiendo de la actividad en que estén trabajando.[3]

Las preguntas que busca contestar nuestra investigación son las siguientes: Los estudiantes que inician sus estudios de profesorado de matemática, i) ¿serán capaces de hacer clasificaciones de los cuadriláteros distintas a las que aparecen en los libros de texto?; ii) ¿podrán establecer, trabajando en el ámbito de la Geometría I o de la Geometría II, si dos definiciones son o no equivalentes?; iii) ¿podrán concebir y

[3] Houdement y Kuzniak plantean un vínculo entre su modelo de las Geometrías I, II, III y los niveles de van Hiele. Esto facilitará a futuro establecer conexiones entre su modelo y el modelo de pensamiento geométrico de van Hiele, que será trabajado por los estudiantes en años venideros de su formación como profesores de matemática de enseñanza media. Quien desee profundizar en este aspecto, puede remitirse a Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail geometriques. Elements d'un cadre theorique pour I'enseignement et la formation des enseignants en geometrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 6 (2), April, pp. 167–187.

construir nuevos cuadriláteros más allá de los que ellos conocen o llegar a fundamentar la imposibilidad de su existencia?

3. Método de trabajo

Las actividades, que incluimos como anexo, fueron propuestas a estudiantes de primer año de profesorado de matemática de enseñanza media en el Instituto de Profesores “Artigas” (Montevideo, Uruguay). Se propuso a tres grupos de 50, 40 y 25 estudiantes respectivamente, en el curso de Geometría Euclidiana (curso anual de 8 horas semanales de 45 minutos, agrupadas en dos módulos de 4 horas cada uno), cuyos docentes fueron los autores.

Cabe destacar la heterogeneidad en cuanto a las edades y conocimientos previos de los estudiantes, dado que el ingreso a la carrera admite cualquier orientación de Bachillerato Diversificado. Cada estudiante viene con su propio recorrido académico: algunos terminaron el Bachillerato el año anterior (en cualquiera de sus orientaciones), otros hace dos años o más que no estudian y están retomando estudios, otros cursaron diversas carreras universitarias y se proponen ahora comenzar la carrera de profesorado. Así, conviven en el mismo salón de clase personas que están estudiando Ingeniería en la Universidad con otras que hace cuatro o más años que no asisten a ningún curso de Matemática.

Los estudiantes trabajaron en equipos de 3 ó 4 integrantes, teniendo disponible al menos una computadora por equipo, con el GeoGebra instalado y lápiz y papel[4]. Las respuestas a las actividades debían ser acordadas entre los integrantes y entregadas en un reporte por equipo y por actividad, además del archivo de GeoGebra en caso de que hubiesen hecho uso del software. Ante cada actividad, una vez finalizado el trabajo por equipos, se hacía una colectivización a todo el grupo usando el pizarrón y/o el cañón para proyectar lo producido en GeoGebra. En esta instancia un estudiante exponía lo acordado en su equipo y los estudiantes de todo el grupo podían hacer preguntas. Al finalizar la colectivización de cada actividad se explicitaban los distintos argumentos

[4] En la sala de informática del Instituto hay tres programas de Geometría Dinámica. En los últimos años se ha ido optando por trabajar con GeoGebra por su accesibilidad, ya que permite que los estudiantes lo instalen también en sus computadoras personales. Además, como es usado en el curso de Fundamentos de la Matemática de primer año, están familiarizados con sus aspectos algebraicos y analíticos, lo que permite un tránsito ágil entre los diferentes registros.

usados, discriminando sus virtudes y fallas, y si se había trabajado en el ámbito de la Geometría I o de la Geometría II. El docente del grupo hace anotaciones de aspectos que considera relevantes tanto en el momento en que los estudiantes trabajan en equipo como en el momento de la colectivización.

Las actividades, que plantean situaciones problemáticas, forman parte de un curso organizado en base a fichas de trabajo armadas centralmente con propuestas de actividades que implican un rol activo del estudiante tanto a nivel individual como grupal. Las mismas se encuentran disponibles en la página web del Departamento de Matemática del Instituto de Profesores Artigas[5].

En las fichas también se plantean como actividades la consulta a libros de texto de geometría o páginas de Internet, la búsqueda de información acerca de la época, vida y obra de distintos matemáticos, la construcción de modelos en GeoGebra y ejercicios de aplicación de los conceptos desarrollados en clase como resultado de las sucesivas colectivizaciones. El diseño de un curso en base a actividades es una alternativa a la forma en que tradicionalmente se ha trabajado la geometría y donde el conocimiento geométrico ya está escrito en los textos y llega al estudiante a través de la exposición del profesor. En esta propuesta de curso las actividades son planteadas para que los estudiantes las trabajen en equipos en clase (equipos que se mantienen para el trabajo domiciliario) y donde cotidianamente se formulan preguntas y conjeturas. La responsabilidad del docente está en diseñar las actividades y en organizar el desarrollo de la clase, buscando que sean los estudiantes quienes lleven adelante las tareas propuestas y organizando las puestas en común, institucionalizando los acuerdos alcanzados, organizando las preguntas –nuevos problemas- que van surgiendo en la misma dinámica de la clase y que muchas veces implican la propuesta de nuevas actividades para poder responderlas.

Al momento de plantear estas actividades, en los tres grupos ya se habían acordado como axiomas las relaciones entre ángulos que se forman entre dos rectas paralelas y una secante, así como los criterios de congruencia de triángulos.

4. Algunos resultados obtenidos

Presentamos a continuación algunas producciones de los estudiantes frente a algunas de las actividades propuestas.

Las clases que surgieron inicialmente en la Actividad 1 fueron: cuatro lados iguales, dos pares de lados iguales, sólo tres lados iguales, sólo un par de lados iguales, sin lados iguales.

Algunos equipos, si bien habían llegado originalmente a las clases anteriores, propusieron hacer una distinción entre lados opuestos y lados consecutivos, obteniendo las siguientes clases: cuatro lados iguales, dos pares de lados consecutivos iguales, dos pares de lados opuestos iguales, sólo tres lados iguales, sólo un par de lados consecutivos iguales, sólo un par de lados opuestos iguales, sin lados iguales

En la Actividad 2 llegan a construir figuras para cada una de las clases mencionadas, tanto en lápiz y papel como en GeoGebra.

En la Actividad 3 observan que tanto la clase ‘cuadrilátero con cuatro lados iguales’ como ‘cuadrilátero con dos pares de lados opuestos iguales’ tienen dos pares de ángulos opuestos iguales. También que en ambas clases las diagonales se cortan en su punto medio. Para ‘cuadrilátero con cuatro lados iguales’ y ‘cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales’ conjeturan que las diagonales son perpendiculares y que al menos una es cortada por la otra en su punto medio. Algunos equipos fundamentan su conjetura basándose en mediciones hechas sobre las figuras construidas previamente en lápiz y papel, otros equipos midiendo en la figura dinámica construida en GeoGebra y otros equipos elaboran demostraciones.

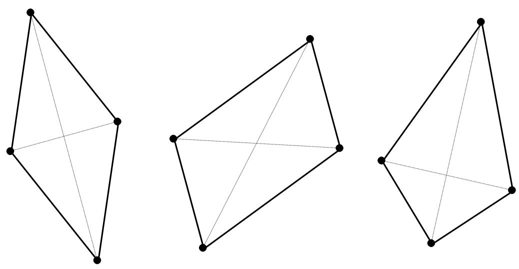

FIGURA 3: Algunas clases de cuadriláteros según la igualdad de sus lados

En la Actividad 4 cada equipo acuerda rápidamente clases análogas –sustituyendo lados por ángulos- a las de la Actividad 1.

La Actividad 5 resulta más difícil y lleva más tiempo que la Actividad 2, pero finalmente logran construir figuras para cada una de las clases mencionadas.

En la Actividad 6 observan que tanto la clase ‘cuadrilátero con cuatro ángulos iguales’ como ‘cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos iguales’ tienen dos pares de lados opuestos iguales. También que en ambas clases las diagonales se cortan en su punto

[5] http://www.depdematematica.org/ipa/sitio/login/index.php

medio. Para ‘cuadrilátero con cuatro ángulos iguales’ y ‘cuadrilátero con dos pares de ángulos consecutivos iguales’ conjeturan que las diagonales son iguales y que se cortan determinando segmentos proporcionales. Al igual que en la Actividad 3 algunos equipos fundamentan su conjetura basándose en mediciones hechas sobre las figuras construidas previamente en lápiz y papel, otros equipos midiendo en la figura dinámica construida en GeoGebra y otros equipos elaboran demostraciones.

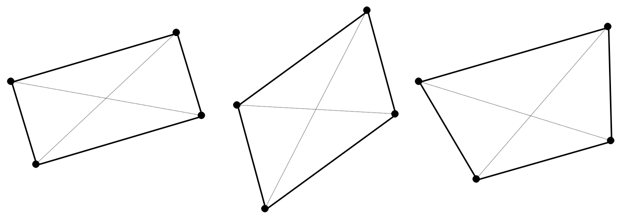

FIGURA 4: Algunas clases de cuadriláteros según la igualdad de sus ángulos

La tabla de doble entrada de la Actividad 7 consta de cuarenta y nueve casilleros y dada la vastedad de las producciones de los equipos será motivo de un trabajo independiente.

Sólo mencionamos un resultado muy parcial que nos permitirá contestar una de las preguntas de investigación. El estudio de la tabla puede abordarse mediante el análisis uno a uno de los cuarenta y nueve casilleros y así fue encarado inicialmente por algunos equipos. Otros equipos abordaron el estudio de la tabla considerando una fila o una columna en su conjunto. El estudio de la fila ‘cuatro ángulos iguales’ les permitió concluir rápidamente –basándose en que si un cuadrilátero tiene cuatro ángulos iguales entonces tiene dos pares de lados opuestos iguales (Actividad 6)- que en esa fila no se podían construir ‘cuadriláteros con cuatro ángulos iguales y solo tres lados iguales’, o ‘cuadriláteros con cuatro ángulos iguales y solo un par de lados opuestos iguales’, por ejemplo.

En la Actividad 8 algunos equipos recurren a las figuras con ‘dos pares de lados opuestos iguales’ y con ‘dos pares de ángulos opuestos iguales’ ya construidas en las Actividades 2 y 5 respectivamente. A simple vista, las figuras cumplen ambas condiciones simultáneamente. Algunos equipos, no conformes con la sola observación de las figuras, hacen mediciones de lados y de ángulos. Finalmente, formulan la pregunta ¿si el cuadrilátero tiene dos pares de lados opuestos iguales, tiene necesariamente dos pares de ángulos opuestos iguales? Algunos equipos concluyen que la respuesta es negativa, dado que el cuadrilátero puede tener dos pares de lados opuestos iguales y los cuatro ángulos iguales. Esto, en la clasificación particional considerada, hace que pertenezca a otra clase distinta a la de cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos iguales.

¿Y la afirmación recíproca?, o sea ¿si el cuadrilátero tiene dos pares de ángulos opuestos iguales, tiene necesariamente dos pares de lados opuestos iguales? La respuesta también es negativa en esta ocasión, porque el cuadrilátero puede tener los cuatro lados iguales y por tanto pertenecer a otra clase distinta a la de dos pares de lados opuestos iguales.

Parte de la Actividad 9 ya se resolvió en la Actividad 3 al establecer propiedades referidas a ángulos por un lado y a diagonales por otro de cuadriláteros con dos pares de lados consecutivos iguales. Para abordar el trabajo restante gran parte de los equipos hizo una construcción dinámica de un ‘cuadrilátero con diagonales perpendiculares y que una corta a la otra en su punto medio’ y midiendo en GeoGebra constataron que el cuadrilátero tiene ‘dos pares de lados consecutivos iguales’.

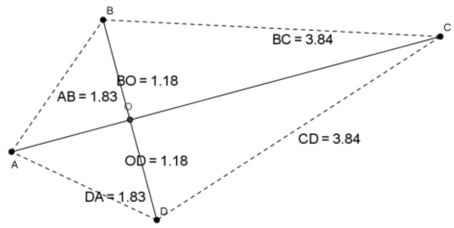

FIGURA 5: Cuadrilátero con diagonales perpendiculares y que una corta a la otra en su punto medio

Los triángulos a considerar para elaborar una demostración se imponen naturalmente.

Algunos equipos construyen cuadriláteros dinámicos ‘con una diagonal que es bisectriz de dos ángulos’, otros equipos optan por hacer la construcción en lápiz y papel, alegando que es más rápido y fácil que hacer la construcción en GeoGebra. En ambos casos, los triángulos a considerar para hacer una demostración de la propiedad surgieron sin dificultad.

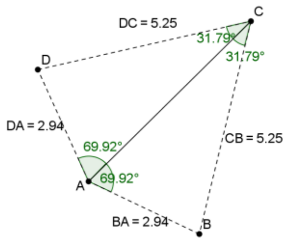

FIGURA 6: Cuadrilátero con una diagonal que es bisectriz de dos ángulos

Las producciones de los equipos frente a la Actividad 10 tienen características similares a las mencionadas para la Actividad 9, por lo que no ampliaremos.

5. Reflexión acerca de los resultados reportados

En la puesta en común de la Actividad 1 se habían acordado las primeras cinco clases mencionadas. Es al realizar la Actividad 2 que algunos equipos, al observar las figuras que obtienen al construir 'cuadriláteros con dos pares de lados iguales', sostienen que dada la diferencia de las figuras, hay que separar la clase anterior en 'cuadriláteros con dos pares de lados opuestos iguales' y 'cuadriláteros con dos pares de lados consecutivos iguales'. Proponen una subdivisión análoga para 'cuadriláteros con un solo par de lados iguales'. Frente a la construcción de figuras que proponía la Actividad 2, los estudiantes recurren a los cuadriláteros 'con nombre' que ya conocen de años anteriores y se hace necesaria la intervención del docente para recordar que no se usarán nombres para designar a una clase de cuadriláteros sino la propiedad que la define. La mayor dificultad se observa en la construcción de 'cuadriláteros con sólo 3 lados iguales'. Hay quienes sostienen inicialmente que no existen, después algunos equipos construyen –tanto en lápiz y papel como en GeoGebra- 'un trapecio isósceles con uno de los lados paralelos iguales a los dos lados iguales'. Finalmente un equipo construye en GeoGebra una figura dinámica que permite apreciar la vastedad de los integrantes de la clase 'cuadrilátero con sólo 3 lados iguales'. En la colectivización, y luego de que el profesor presente las Geometría I y Geometría II de Houdement y Kuzniak, además de que cada equipo relate lo acordado, se les solicita que indiquen en el ámbito de qué geometría ubicarían su producción. Se acuerda que los equipos que se basaron en mediciones, tanto en lápiz y papel como en GeoGebra, corresponden a la Geometría I y quienes elaboraron demostraciones, a la Geometría II. La serie de actividades se llevaron adelante en cursos regulares, en los que previamente ya se habían trabajado en clase y asumido como axiomas que dos rectas paralelas cortadas por una transversal determina ángulos alternos internos iguales y su recíproco, así como los criterios de congruencia de triángulos. Algunos equipos demuestran que los 'cuadriláteros con cuatro lados iguales' tienen dos pares de ángulos opuestos iguales, otros equipos deducen la igualdad de dos pares de ángulos opuestos a partir de los 'cuadriláteros con dos pares de lados opuestos iguales'. Se presenta la ocasión para discutir sobre la generalización de propiedades: en este caso la condición de 'cuatro lados iguales' puede ser sustituida por una condición menos exigente, como 'dos pares de lados opuestos iguales' y la propiedad de 'dos pares de ángulos opuestos iguales' se sigue manteniendo. Hay estudiantes que argumentan que si se demostró la propiedad para 'dos pares de lados opuestos iguales’ ya queda automáticamente demostrado para ‘cuatro lados iguales’. Surge así la inquietud sobre cómo podría hacerse un clasificación jerárquica de los cuadriláteros tomando como criterio la igualdad de sus lados (que se integró posteriormente a la serie como Actividad 11). Una situación análoga se presenta con la deducción de que las diagonales son perpendiculares y que al menos una es cortada por la otra en su punto medio, a partir de ‘cuadrilátero con cuatro lados iguales’ y de ‘cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales’.

En la Actividad 5, además de la dificultad ya mencionada en la Actividad 2 acerca de una creencia muy fuerte en la inexistencia de algunas clases, dado que no forman parte de los cuadriláteros conocidos por los estudiantes, se presentó el problema de que algunos equipos conseguían construir un cuadrilátero de determinada familia y otros no, debido a la medida del ángulo considerada. Por ejemplo, para construir un ‘cuadrilátero con sólo tres ángulos iguales’ fue imposible construirlo considerando los ángulos iguales de una medida menor a 60º o mayor a 120º, pero sí pudieron hacerlo los equipos que consideraron un ángulo entre 60º y 120º, siempre que no fuera recto.

En la Actividad 6 distintos equipos establecen una analogía con lo trabajado en la Actividad 3 en cuanto al enunciado de las propiedades que se cumplen en esta situación. También observan que esta analogía se pierde a la hora de elaborar demostraciones.

En la colectivización de la Actividad 8 surge por parte de algunos estudiantes la pregunta ¿ambas clases son equivalentes en una clasificación jerárquica? Se aclara que en una clasificación jerárquica la clase ‘cuadrilátero con cuatro lados (o ángulos) iguales’ está incluida en la clase ‘cuadrilátero con dos pares de lados (o ángulos) opuestos iguales’. La necesidad de demostrar el paralelismo de los lados opuestos surgió como una necesidad de la demostración al intentar deducir la igualdad de dos pares de lados opuestos a partir de la igualdad de dos pares de ángulos opuestos. Este paralelismo era asumido por algunos estudiantes que basaban sus apreciaciones en argumentos estrictamente visuales, otros señalaban la necesidad de argumentos deductivos para hacer tal afirmación. Esta fue una buena situación donde distinguir lo visual (Geometría I) de lo deductivo (Geometría II) y empezar a recorrer el camino deductivo estando alerta de no caer en la ‘trampa’ de lo visual. Lo que aparece en la gran mayoría de los textos de geometría y en el discurso escolar tradicionalmente difundido en Uruguay son teoremas, con sus respectivas demostraciones, mediante las cuales se establece una equivalencia que nunca fue cuestionada. Esta forma de presentar el conocimiento a enseñar le quita a la actividad matemática su sentido.

Finalmente se llega a establecer la equivalencia que se muestra en el cuadro.

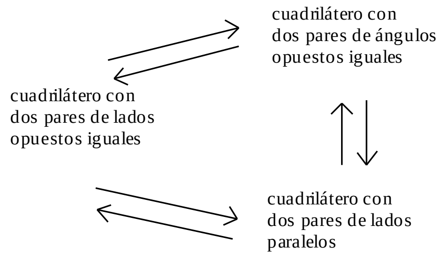

FIGURA 7: Definiciones equivalentes de paralelogramo

Recién en este momento se acuerda llamar paralelogramo al cuadrilátero.

En la Actividad 9, se estableció inicialmente la equivalencia de ‘cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales’ y ‘cuadrilátero con diagonales perpendiculares y con una diagonal que corta a la otra en su punto medio’, así como de ‘cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales’ y ‘cuadrilátero con dos ángulos opuestos iguales y cuyos otros dos ángulos opuestos tienen la misma bisectriz’. En este último caso dos equipos mencionan que se puede eliminar la condición ‘dos ángulos opuestos iguales’ y que de todas maneras se sigue pudiendo demostrar que un cuadrilátero tiene ‘dos pares de lados consecutivos iguales’ a partir de que sus ‘ángulos opuestos tengan la misma bisectriz’. Surgió la interrogante acerca de si era posible establecer la equivalencia de ‘cuadrilátero con diagonales perpendiculares y con una diagonal que corta a la otra en su punto medio’ y ‘cuadrilátero con dos ángulos opuestos iguales y cuyos otros dos ángulos opuestos tienen la misma bisectriz’. Si bien algunos equipos intentan elaborar una demostración, otros sostienen que la equivalencia ya quedó establecida con lo hecho hasta el momento. Otros sostienen que se podría haber trabajado menos si se hubieran hecho las demostraciones de las propiedades en un solo sentido.

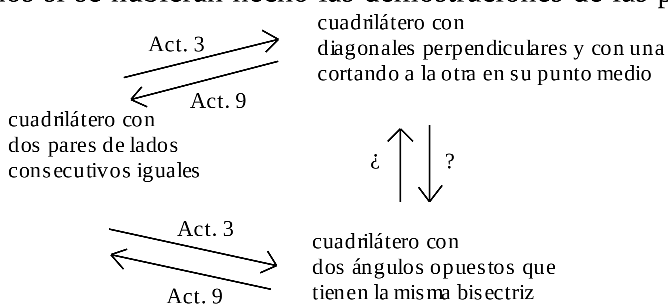

FIGURA 8: Definiciones equivalentes de romboide

En este momento se acuerda llamar romboide al cuadrilátero.

La Actividad 10 permitió acordar las equivalencias que se muestran en el cuadro.

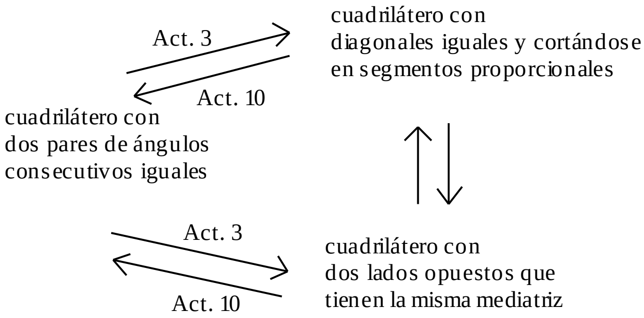

FIGURA 9: Definiciones equivalentes de trapecio isósceles

A partir de este momento se acuerda llamar trapecio isósceles al cuadrilátero anterior.

Consideraciones finales

En base a lo expuesto podemos sostener que los estudiantes de los tres grupos en los que se llevaron adelante las actividades hicieron clasificaciones de los cuadriláteros tomando como criterios exclusivamente la igualdad de sus lados o la igualdad de sus ángulos. Estas clasificaciones nunca habían sido realizadas antes por los estudiantes y tampoco aparecen en los libros de texto de Uruguay. También pudieron establecer, ya sea en el ámbito de la Geometría I y/o en el ámbito de la Geometría II, la equivalencia o no de distintas definiciones, y apreciar que dichas definiciones -y por lo tanto la equivalencia- dependen de si la clasificación considerada es jerárquica o particional. Luego de establecidas las equivalencias es que en el ámbito de la clase se le dio un nombre al cuadrilátero. Los estudiantes fueron capaces de concebir y construir familias de cuadriláteros que nunca antes habían considerado, como por ejemplo las de ‘cuadriláteros con sólo tres lados (o ángulos) iguales’. La construcción en GeoGebra de algunas familias de cuadriláteros, si bien significó muchas veces un desafío importante, permitió apreciar la amplitud de la familia considerada e ir más allá de los cuadriláteros conocidos por los estudiantes. En otros casos la propia figura dinámica facilitó la observación de los elementos a considerar en la búsqueda de argumentos deductivos. Los estudiantes también fueron capaces de fundamentar la inexistencia de otras familias de cuadriláteros, como por ejemplo ‘cuadriláteros con cuatro lados iguales y sólo tres ángulos iguales’.

Referencias

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DEL INSTITUTO DE PROFESORES ‘ARTIGAS’. http://www.depdematematica.org/ipa/sitio/login/index.php.

HERSHKOWITZ, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

HOUDEMENT, C. y KUZNIAK, A. (1999). Geometríe et paradigmenes geometriques. *Petit x*, 51, 5-21.

KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail geometriques. Elements d'un cadre theorique pour I'enseignement et la formation des enseignants en geometrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 6 (2), April, 167–187.

PETRACCA, M.; VARELA, L. y FONCUBERTA, J. (1984). *Matemática II*. Argentina: Magisterio del Río de la Plata.

REPETTO, C.; LINSKENS, M. y FESQUET, H. (1991). *Geometría 2*. Argentina: Kapelusz.

VV.AA. (1979). *Texto único 4º*. Uruguay: Barreiro y Ramos.

Anexo

Actividad 1: Realiza una clasificación particional de los cuadriláteros usando como criterio exclusivo la igualdad de sus lados. Las clases deben ser nombradas por lo que cumplen sus elementos, no por un nombre (como podría ser "rombo").

Actividad 2: ¿Existen cuadriláteros en cada una de las clases de la Actividad 1? Intenta construir la figura de al menos un cuadrilátero de cada clase, tanto en lápiz y papel como en GeoGebra.

Actividad 3: ¿Observas peculiaridades en los ángulos o diagonales de algunas de las clases? ¿Puedes explicar por qué pasa lo observado?

Actividad 4: Realiza una clasificación particional de los cuadriláteros usando como criterio exclusivo la igualdad de sus ángulos. Las clases deben ser nombradas por lo que cumplen sus elementos, no por un nombre (como podría ser "rectángulo").

Actividad 5: ¿Existen cuadriláteros en cada una de estas clases? Intenta construir la figura de al menos un cuadrilátero de cada clase, tanto en lápiz y papel como en GeoGebra.

Actividad 6: ¿Observas peculiaridades en los lados o diagonales de algunas de las clases? ¿Puedes explicar por qué pasa lo observado?

Actividad 7: Construye una tabla de doble entrada con las siguientes categorías:

lados	*ángulos*
sin lados iguales	sin ángulos iguales
un solo par de lados opuestos iguales	un solo par de ángulos opuestos iguales
un solo par de lados consecutivos iguales	un solo par de ángulos consecutivos iguales
dos pares de lados opuestos iguales	dos pares de ángulos opuestos iguales
dos pares de lados consecutivos iguales	dos pares de ángulos consecutivos iguales
sólo tres lados iguales	sólo tres ángulos iguales
cuatro lados iguales	cuatro ángulos iguales

Si es posible, construye en lápiz y papel y/o en GeoGebra, un cuadrilátero para cada casillero, o fundamenta por qué es imposible construirlo.

Actividad 8: ¿Son equivalentes las clases 'cuadrilátero con dos pares de lados opuestos iguales' y 'cuadrilátero con dos pares de ángulos opuestos iguales'?

Actividad 9: ¿Son equivalentes las clases 'cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales', 'cuadrilátero con dos ángulos opuestos iguales y cuyos otros dos ángulos opuestos tienen la misma bisectriz' y 'cuadrilátero con diagonales perpendiculares y con una diagonal que corta a la otra en su punto medio'? Ten en cuenta lo trabajado en las actividades 2 y 3.

Actividad 10: ¿Son equivalentes las clases 'cuadrilátero con dos pares de ángulos consecutivos iguales', 'cuadrilátero con dos lados opuestos iguales y cuyos otros dos lados opuestos tienen la misma mediatriz' y 'cuadrilátero con diagonales iguales y que se cortan determinando segmentos proporcionales'? Ten en cuenta lo trabajado en las actividades 5 y 6.