

Construyendo una idea no estereotipada de triángulo con GeoGebra en Primero de Primaria¹

Building a non-stereotypical idea of a triangle with GeoGebra in First Grade

ALBERTO ARNAL-BAILERA²

BELÉN GUERRERO BELLOC

Resumen

Se plantea el estudio en profundidad de algunas posibilidades y limitaciones tanto didácticas como tecnológicas de la utilización de GeoGebra en primer curso de Educación Primaria en España. Se analiza parcialmente una secuencia didáctica para el trabajo con polígonos de la que exponemos las conclusiones de una actividad acerca de los triángulos con la mirada puesta en la recopilación de datos sobre el aprendizaje de los alumnos para su utilización posterior por la profesora en una discusión y puesta en común en gran grupo para construir la idea de triángulo. Se analizan las dificultades tecnológicas de las herramientas empleadas y la validez didáctica de la herramienta que permite diseñar nuevos triángulos a partir de los dados, concluyendo la adecuación del momento para introducir este tipo de actividades tendentes a construir conceptos matemáticos ricos y no estereotipados.

Palabras clave: Geometría plana, enseñanza y aprendizaje, estereotipos.

Abstract

The study presents in depth the possibilities and limitations of the use of GeoGebra in the first year of Primary Education in Spain, both in a didactical and in a technological way. We show the conclusions of an activity about the triangle with an eye on the collection of data about student learning for later use by the teacher in a whole class discussion in order to build an idea of the triangle. The technological difficulties of the tools used and the validity of the teaching tool to design new triangles from the given ones are analysed. We conclude the adequacy of introducing at this level this type of activities to build rich and not stereotyped mathematical concepts.

Keywords: Plane Geometry, learning and teaching, stereotypes.

Introducción y marco teórico

Se han hecho avances en cuanto al estudio, aprovechamiento e integración de las nuevas tecnologías en general y GeoGebra en particular en el área de Matemáticas, software de

¹ Financiado por el proyecto EDU2015-65378-P del Ministerio de Economía y Competitividad de España y el Grupo S-119 “Investigación en Educación Matemática” del Gobierno de Aragón (España).

² Universidad de Zaragoza. Departamento de Matemáticas – albarnal@unizar.es

creciente implantación en nuestras aulas tanto en Educación Primaria como en Secundaria (BARBOSA, 2013. IRANZO & FORTUNY, 2009. MARIOTTI, 2013). La literatura disponible plantea secuencias de enseñanza diseñadas a menudo por equipos mixtos formados por investigadores en didáctica de las matemáticas y por profesores en ejercicio (ARNAL & PLANAS, 2013).

En general, las actividades disponibles en Internet para Educación Primaria no vienen acompañadas de un mínimo análisis tecnológico, analizando el grado de adquisición de la herramienta o génesis instrumental (DRIJVERS, DOORMAN, BOON, REED, & GRAVEMEIJER, 2010; TROUCHE, 2004), ni tampoco didáctico, analizando el tratamiento de los objetos matemáticos en la aplicación en cuestión y las dificultades de aprendizaje que puedan aparecer.

El trabajo que presentamos aquí forma parte de una investigación más amplia en la que se estudian los resultados de enseñanza y aprendizaje de una secuencia didáctica completa sobre polígonos en primero de Educación Primaria en un Centro de Zaragoza. Por razones de espacio describiremos el proceso completo realizado con una de las nueve actividades que componen la secuencia, desde el momento en que se diseña la actividad original, pasando por el uso directo de la actividad con alumnos, y terminando en las indicaciones para la gestión del debate con los alumnos a posteriori, que permite analizar el aprovechamiento de la secuencia y posibles mejoras a la actividad con GeoGebra.

En este trabajo nuestro objetivo general es contrastar la adecuación de GeoGebra para la enseñanza del concepto de triángulo ayudando a superar obstáculos de aprendizaje en primero de Educación Primaria, este objetivo se concretará más adelante en el apartado de métodos.

Barrantes y Zapata (2008) distinguen varios elementos de la enseñanza tradicional basada en libros de texto que pueden causar obstáculos el aprendizaje de las figuras geométricas como son, entre otros: la simbología visual del concepto –escasa presentación de ejemplos–, distractores de orientación –propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no forman parte de la definición del concepto–, distractores de estructuración –presentación débil del concepto en el que ciertos elementos y propiedades son excluidos–.

La utilización exclusiva de la pizarra tradicional genera obstáculos al aprendizaje como

la ilusión de transparencia –mientras los profesores interpretan un ejemplo como modelo o representante de una clase, los estudiantes ven solamente un ejemplo– expresada por Lasa y Wilhelmi (2014). Superar este fenómeno parece esencial para el trabajo matemáticamente significativo de la generalización de la validez de una propiedad y de la demostración de la misma. Los autores citados proponen tres momentos de utilización de GeoGebra en la enseñanza: Exploración –diseñando una construcción que satisfaga las condiciones iniciales del problema–, ilustración –observando a través de múltiples ejemplos la validez del enunciado propuesto– y demostración –buscando el análisis detallado de los argumentos internos formales de la demostración en el marco de la construcción con GeoGebra–. La actividad propuesta se encuadraría en un momento de exploración o investigación libre, ya que se les pide una modificación de una construcción dada pero con un enunciado que da total libertad a la respuesta del alumno.

Dos usos de la tecnología en general y de GeoGebra en particular son posibles (LEE & HOLLEBRANDS, 2008): Por una parte un uso amplificador -permitiendo realizar más eficientemente ciertos procesos que si se hicieran a mano-, en este uso, lo que los estudiantes hacen o saben no cambia. Por otra, un uso reorganizador -proveyendo al estudiante con nuevas representaciones del conocimiento que enfatizan algún aspecto sobresaliente del mismo difícil de explicitar sin tecnología- en este uso, el programa cambia la forma de pensar del estudiante (RABARDEL, 2001). La actividad que a continuación se explica promueve un uso reorganizador, dado que ofrece representaciones del triángulo a partir de otros triángulos de modo dinámico, es decir no se construye un triángulo a partir de sus lados o de sus ángulos sino deformando de forma continua otro triángulo, lo que no podríamos hacer sin el programa.

En los primeros cursos de primaria se forma y asienta el prototipo de triángulo en la mente del niño, a partir de la experiencia y los ejemplos que se le han mostrado (GUTIÉRREZ & JAIME, 2012). Este prototipo sirve como referencia con la que se compara un objeto para determinar si es o no un triángulo. Entre las características del prototipo de triángulo podemos citar: tener una base horizontal, un eje de simetría y un tamaño apreciable (SCAGLIA & MORIENA, 2005). Si queremos una construcción completa del concepto de triángulo debemos dotar de herramientas la enseñanza que permitan superar la presentación de ejemplos estereotipados que construyan un prototipo cerrado y que suponga un obstáculo para aprendizajes posteriores.

1. Métodos

Con el objetivo de diseñar una secuencia de actividades para la enseñanza y aprendizaje de los polígonos en 1º de Primaria, se realizó una selección de entre las aplicaciones GeoGebra que algunas páginas web institucionales o de profesionales de reconocido prestigio ofertaban con acceso libre y gratuito. Entre otras se consultaron las páginas del proyecto Gauss del Ministerio de Educación en España (http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/primaria/actividades/novedades.htm) y las de Daniel Mentrard (<http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/>), y Manuel Sada (<http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/>), profesores de reconocido prestigio en Francia y España respectivamente. Posteriormente, dicha selección se completó con actividades propias con el fin de atender de un modo global a todos los contenidos y estándares de aprendizaje que la normativa educativa actual requiere.

La aplicación de la secuencia se llevó a cabo en el Colegio de Educación Infantil y Primaria “Miraflores” de Zaragoza con dos grupos de 25 alumnos y alumnas de 6 a 7 años de 1º de Educación Primaria que trabajaron en equipos de varios alumnos que compartían un ordenador según las disponibilidades del Centro.

1.1. Diseño de la actividad

En las citadas páginas web se encuentran muchas actividades que profundizan en la idea de triángulo y en su clasificación, pero no tantas que estudien el concepto en sí. Nos planteamos varios objetivos, que concretan el anteriormente expresado:

- Explorar, vía GeoGebra, las ideas preconcebidas sobre la forma habitual de un triángulo en Geometría.
- Valorar si se evitan los estereotipos que posiblemente se podrían crear en los niños al trabajar únicamente con los ejemplos del libro de texto.
- Estudiar cómo se favorece el intercambio de ideas entre los alumnos y con el profesor sobre qué es y qué no es un triángulo a través de la manipulación de los dos triángulos que se les ofrecen en la pantalla.

La actividad pretende que los niños jueguen a deformar dos triángulos escalenos dados, para acabar mostrándonos el triángulo que a ellos le parece más “feo” y el más “bonito”. Esta actividad puede ubicarse como una de las actividades de la fase 4 de los niveles de

Van Hiele (GUTIÉRREZ & JAIME, 2012) ya que se trata de una actividad abierta en la cual no existen respuestas correctas e incorrectas. A continuación, se formularon a nuestros alumnos ciertas preguntas que promuevan la construcción del concepto de triángulo y la verbalización de sus ideas, por lo que también favorece el trabajo de comunicación de ideas matemáticas entre los alumnos (fase 3).

Se les ofreció pues, una escena de GeoGebra (ver Figura 1) sin mostrar la cuadrícula ni los ejes. Solo se les permitió acceder a la herramienta “elige y mueve”. Como se puede observar los dos triángulos de partida eran idénticos y los vértices estaban marcados por vértices de tamaño apreciable pensando en las posibles dificultades de manejo del ratón debido a la edad de los niños y su previsible escasa experiencia en el manejo del mismo.

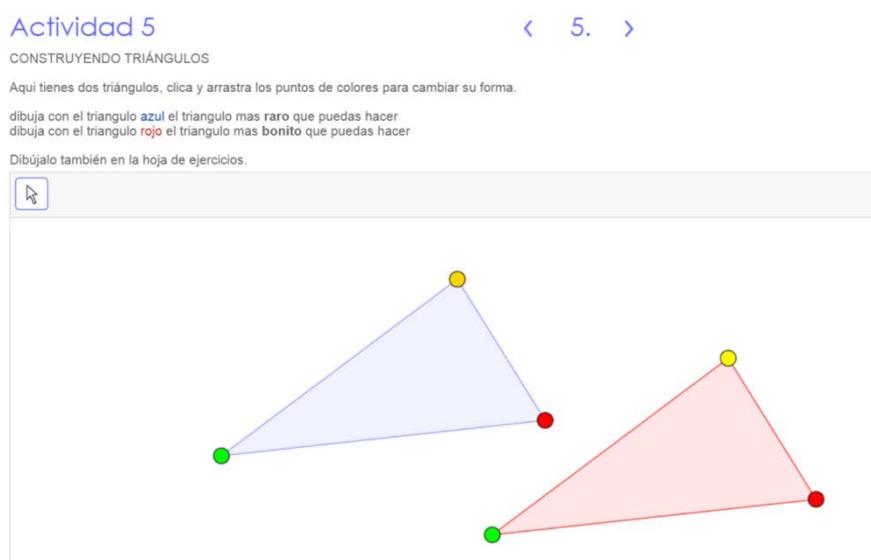


FIGURA 1: Actividad propuesta

En cuanto a los estándares de aprendizaje que la LOMCE (Ley de Educación vigente en España en la actualidad) determina, esta actividad puede responder a los siguientes: Est.MAT.4.4.4. *Compone de forma manipulativa figuras planas a partir de otras describiendo aspectos concretos del resultado (diferencias de tamaño, número de lados, piezas utilizadas...)*. Además, dada la metodología que se llevó a cabo, los niños tenían que dar una explicación de porqué habían llegado a ese resultado, por tanto también se ve implicado el estándar Est.MAT.4.7.2. *Explica oralmente el proceso llevado en la resolución de problemas relacionados con situaciones del entorno escolar y familiar revisando las operaciones y las unidades de los resultados y comprobando e interpretando en el contexto la coherencia de las soluciones.*

En este caso, GeoGebra -herramienta gratuita, de fácil acceso y fácil manejo- también

se consideró una herramienta fundamental en la realización del ejercicio, ya que si no hubiéramos tenido esta herramienta nos habría sido muy difícil llevar la misma actividad a cabo. Por ejemplo les podríamos haber pedido que dibujaran triángulos diferentes, sin embargo, seguramente su imaginación se habría acabado pronto ya que no saldrían mucho de los ejemplos dados en el libro o vistos anteriormente sobre triángulos (BARRANTES, BALLETBÓ & LÓPEZ, 2014). Sin embargo, con esta herramienta podemos fijar la condición de que el polígono tenga tres lados y que los niños modifiquen los vértices, encontrando figuras tan extrañas que tal vez ni les parezca que son triángulos y dé pie al debate y razonamiento con los niños.

1.2. Los instrumentos

Los instrumentos utilizados para la toma de datos son:

- Los archivos donde se guardan las distintas resoluciones de la tarea de los alumnos.
- Las explicaciones escritas de los alumnos. Los alumnos tenían que responder a una pregunta (ver Figura 2).
- Las anotaciones sobre los diálogos mantenidos con la profesora durante la realización de la actividad.

Uno de los objetivos de las actividades estaba relacionado con provocar un diálogo posterior con la profesora en gran grupo. Para prepararlo, la profesora pasó por cada equipo tratando de promover la reflexión de los alumnos sobre el porqué de las respuestas que van dando. Dada la edad de los alumnos se consideró que no era suficiente con preguntar por escrito y que se obtendría mayor información y reflexión mediante este instrumento oral. Estos diálogos seguían un esquema semiestructurado en los que la primera pregunta era la misma que venía por escrito y la segunda y tercera dependían de la respuesta de los alumnos a la primera (*¿Por qué os parece este bonito?, ¿por qué os parece este feo?, ¿sigue siendo un triángulo?...*).

Realizamos un análisis cuantitativo solo en lo relativo al tipo de triángulos construidos como “bonitos” y a la inclinación del lado inferior de ese triángulo respecto de la horizontal (ver Tabla 1).

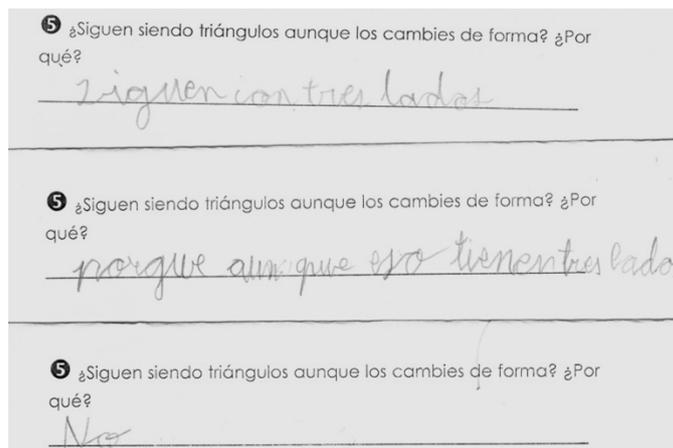


FIGURA 2: Pregunta asociada a la actividad con respuestas de varios alumnos

Sobre los demás datos obtenidos, el análisis realizado es de tipo cualitativo. Las unidades de análisis son las anotaciones de los alumnos y las transcripciones de los diálogos con la profesora. Las distintas categorías se construyen a partir de una aproximación inductiva en la que el propio análisis da lugar a las categorías (BERG, 2007). La validez y fiabilidad internas se mejoran con la presencia de dos investigadores que actúan sobre los mismos registros observacionales (HERNÁNDEZ, FERNÁNDEZ & BAPTISTA, 2010, p. 476).

2. Resultados

Esta actividad se mostró como una de las más sencillas de la secuencia de manejar para los niños y una de las que generó un mayor aprovechamiento didáctico. A continuación se muestran algunas de las producciones realizadas por los niños, y posteriormente se exponen las explicaciones que ellos dieron de por qué les parecía ese triángulo el más “bonito” o el más “raro”.

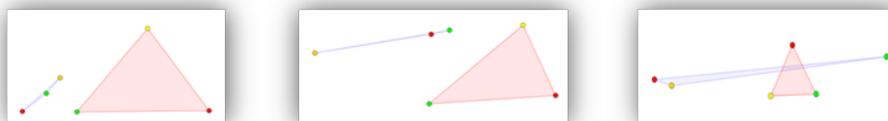


FIGURA 3: Ejemplos de respuestas gráficas a la actividad

Cuando intentaban dibujar triángulos “bonitos”, la mayor parte de los equipos los construyeron con diferencias de pocos grados entre dos de sus ángulos (ver Figura 3 y Tabla 1), lo que consiguieron con bastante precisión si se tiene en cuenta que no disponían de la herramienta de medición de ángulos para comprobarlo ni tenían

conocimientos previos sobre los ejes de simetría de los distintos tipos de triángulos. En concreto 10 de las 14 equipos dibujaron triángulos con menos de 10° de diferencia entre 2 de sus ángulos. Visualmente todos estos triángulos parecen isósceles. En la figura 4 podemos ver la producción de el equipo 11 y observar que, aunque hay una diferencia de casi 9° entre dos de sus ángulos, el triángulo de la derecha en conjunto parece isósceles.

Como podemos observar en las imágenes anteriores y comprobar en la Tabla hay una corriente muy similar en todas los equipos, una tendencia a considerar el triángulo “bonito” como un triángulo aproximadamente isósceles acutángulo y ocupando buena parte de la pantalla disponible. Es de notar que 3 de los equipos dibujaron un triángulo aproximadamente rectángulo (con un ángulo entre 85 y 95 grados).

Tabla 1 Medidas de los triángulos “bonitos” y diferencias entre ellos

	Amarillo	Verde	Rojo	A-V	A-R	V-R	Lado horizontal	Inclinación
1	69,04	54,47	56,49	14,57	12,55	-2,02	SI	0,1
2	64,42	65,69	49,88	-1,27	14,54	15,81	SI	0,34
3	58,5	50,79	70,71	7,71	-12,21	-19,92	SI	0
4	54,15	31,86	94,14	22,29	-39,99	-62,28	NO	15,47
5	104,55	40,14	35,31	64,41	69,24	4,83	NO	6,31
6	74,64	36,32	69,94	38,32	4,7	-33,62	NO	3,88
7	81,18	41,5	57,32	39,68	23,86	-15,82	SI	2,54
8	87,48	45,88	46,64	41,6	40,84	-0,76	SI	0,65
9	24,24	89,14	66,62	-64,9	-42,38	22,52	NO	24,17
10	97,36	41,21	41,43	56,15	55,93	-0,22	NO	6,31
11	36,08	67,55	76,38	-31,47	-40,3	-8,83	SI	1,85
12	69,82	42,21	67,97	27,61	1,85	-25,76	SI	0,95
13	98,72	41,43	35,85	57,29	62,87	5,58	NO	3,27
14	26,93	71,39	81,68	-44,46	-54,75	-10,29	SI	2,04

Refiriéndonos a la inclinación del lado inferior del triángulo, al que podríamos llamar base, podemos decir que en casi la mitad de los triángulos construidos no aparecen apoyados sobre un lado horizontal, lo que nos hace pensar que todavía esta característica del estereotipo no ha calado de un modo muy profundo. Podemos ver en la Tabla 1 las inclinaciones en grados del lado inferior respecto del eje x.

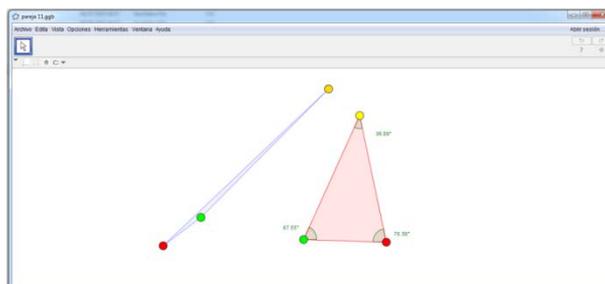


FIGURA 4: Triángulos dibujados por el equipo 11.

También la mayoría de equipos consideraban triángulo “raro” a un triángulo escaleno, muy alargado, hasta casi degenerarlo a veces en un segmento. Estos resultados son curiosos a la vez que habituales, ya que siempre se ha asociado la belleza y la armonía con la simetría, y estamos comprobando que incluso niños con escasos conocimientos sobre estos campos también lo reproducen. De otra manera, es posible también que este tipo de triángulos sean los que primero se enseñan en las clases de Infantil, y sea por otro lado, los que primero reconozcan y por tanto memoricen sus formas. También encontramos una cierta racionalización en el triángulo que les es extraño, dado que visualmente, casi deja de ser un triángulo. Este hecho nos abrirá la oportunidad para preguntar a los niños si esto siguen siendo triángulos o no.

A partir de revisiones sucesivas de los datos obtenidos a través de los instrumentos, surgen dos temas sobre los que tratan los comentarios de los alumnos que se convierten en categorías de análisis que exponemos a continuación ilustrándolas con ejemplos para mayor claridad (ver cuadro 1):

Categorías	Descripción	Ejemplo
Dinamismo	El alumno utiliza en sus respuestas verbos o gestos relacionados con movimientos.	“Porque es grande y así (movimiento de manos)...” “Porque era así y ahora es así pero es lo mismo”
Matemáticas	El alumno utiliza en sus respuestas alguna de las características matemáticas del triángulo	“Porque no se ve lo de dentro” “Si porque aunque eso tienen tres lados”

Cuadro 1. Categorías para el análisis cualitativo

Ante las preguntas de la profesora sobre por qué el triángulo construido es bonito las referencias que predominaron fueron de tipo matemático: sobre el área, “es grande” o el

tamaño de los lados “los puntos están muy separados”. De igual manera cuando se preguntó porque el otro triángulo era feo o raro las explicaciones también se refirieron al área, “es muy chatito” y en este caso a la comparación con el primero que consideraban modelo “no se parece al otro”. La mayor parte de los alumnos mostraban a través de estas preguntas su mayor familiaridad con ciertos tipos de triángulos.

Las referencias de tipo dinámico aparecieron cuando la profesora preguntaba sobre si el triángulo raro era o no un triángulo realmente: “Porque era así y ahora es así pero es lo mismo”, algunos alumnos evidenciaban comprender que el mero arrastre de los vértices de un triángulo no hace que se pierdan esas características. El triángulo “feo” que construyeron de modo mayoritario fue el que estaba degenerado en un segmento, al menos con el nivel de zoom que tenían en principio. Se identificaron tres grupos, muchos de los alumnos no sabían qué decir ante el contraste de su construcción con lo que ellos conocían como triángulo hasta ese momento, otros decían que no lo era “es una raya” y otros que sí lo era “... porque aunque eso tienen tres lados”, apareciendo también respuestas de tipo matemático. La respuesta de la profesora ante la no identificación como triángulo de la construcción era utilizar el zoom disponible en la ruleta del ratón, aunque esta herramienta no se había utilizado antes con los alumnos y no parecieron entender que era el mismo triángulo “visto más de cerca”.

Que emerjan estas dos categorías de análisis nos permitirá hilar la explicación posterior de la profesora, enlazando adecuadamente lo visto en el programa con las características matemáticas del triángulo, habitualmente presentadas en forma estática. Sería deseable que los alumnos captaran las características dinámicas de la actividad, para a través del diálogo con la profesora y los compañeros, terminar adquiriendo también las características matemáticas. Esta directriz marcará el diálogo posterior donde la profesora tratará de hacer una construcción compartida del concepto de triángulo.

Los alumnos se encontraron cómodos razonando y trabajando con la herramienta GeoGebra a pesar de la lógica falta de vocabulario, sin requerir en ningún momento ningún otro instrumento como una regla. Podemos afirmar que el punto de génesis instrumental de la herramienta “elige y mueve” de GeoGebra es adecuado para el planteamiento de esta actividad. De las dificultades mostradas con la interpretación del nuevo triángulo que surgía al utilizar la profesora la ruleta del ratón o “zoom” podemos inferir la necesidad de un trabajo específico que contribuya previamente a la génesis instrumental de esta herramienta en particular.

3. Conclusiones y discusión

Repasando los objetivos concretos planteados en la actividad, podemos afirmar lo siguiente: En lo relativo al primer objetivo, “explorar las ideas preconcebidas sobre la forma habitual de un triángulo en Geometría”, podemos concluir que el triángulo habitual que el alumno tienen en mente los alumnos que han participado en este estudio al dibujar con GeoGebra es aproximadamente isósceles, acutángulo y de un tamaño apreciable en línea con lo expresado por Scaglia y Moriena (2005). En cuanto al segundo objetivo, “valorar si se evitan los estereotipos que posiblemente se podrían crear en los niños al trabajar únicamente con los ejemplos del libro de texto”, observamos que algunos de las características que estereotipan el concepto de triángulo anunciados en la literatura no están presentes al realizar la construcción con GeoGebra, al menos no de un modo predominante, por ejemplo la presencia de un lado horizontal en la construcción de triángulos (BARRANTES & ZAPATA, 2008). Esto daría una idea de la adecuación del momento para introducir este tipo de actividades tendentes a construir conceptos matemáticos ricos y no estereotipados. Respecto al tercer objetivo “estudiar cómo se favorece el intercambio de ideas entre los alumnos y con el profesor sobre qué es y qué no es un triángulo a través de la manipulación de los dos triángulos que se les ofrecen en la pantalla” podemos afirmar a través de las conversaciones y producciones escritas registradas que los alumnos pueden expresar informalmente las características de los triángulos construidos y discutir sobre ellas con la profesora y entre ellos sirviendo de base a la explicación posterior.

En los aspectos matemáticos de la actividad, podemos señalar que las respuestas de los alumnos a las preguntas formuladas fueron verdaderamente ricas en cuanto a las ideas sobre el triángulo que aparecieron (definición, área, tamaño de los lados...) y mostraron tanto, en algunos casos, las ideas de dinamismo aportadas por GeoGebra como, en mayor medida, las ideas matemáticas que queríamos que surgieran (tres lados, tres puntos...) para guiar la construcción posterior del conocimiento matemático en gran grupo. Esto muestra la potencialidad de GeoGebra como motor de la discusión matemática también en los primeros cursos de Educación Primaria, en consonancia con lo aportado por investigadores como Mariotti (2013) con alumnos de secundaria.

Bajo una mirada tecnológica, podemos constatar que, en línea con lo aportado en investigaciones anteriores (ARNAL & PLANAS, 2013), una vez elegido el instrumento de trabajo (GeoGebra) tanto alumno como, sobre todo, profesor pueden y se deben

mantener fieles a él procurando elaborar respectivamente los razonamientos y las preguntas que guían el diálogo en torno al mismo. En este caso el instrumento de trabajo contenía una versión simplificada de la barra de herramientas de GeoGebra que no incluía el zoom, lo que unido a la edad de los alumnos, hizo que no mejoraran su adquisición del concepto triángulo cuando la profesora utilizaba el zoom en sus explicaciones. Este aspecto necesitaría de un trabajo específico para facilitar la génesis instrumental de la herramienta “zoom” (TROUCHE, 2004)

Como reflexión final, comentando el objetivo general expresado al principio del artículo, consideramos contrastada la adecuación de GeoGebra para la enseñanza del concepto de triángulo, a tenor de los datos obtenidos dicho proceso ha sido realizable, ayuda a preparar el momento posterior donde se formalice la idea de triángulo y es plenamente replicable para otros contenidos del mismo tipo. Consideramos asimismo contrastadas las posibilidades de este programa para ayudar a superar obstáculos de aprendizaje en primero de Educación Primaria pudiendo afirmar que las actividades han contribuido a enriquecer la idea de triángulo que los alumnos tienen y a superar ciertas características estereotipadas que se han podido observar de forma temprana.

Bibliografía

- ARNAL, A. & PLANAS, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de la Geometría con grupos de riesgo: un enfoque discursivo. En Berciano, A.; Gutiérrez, G.; Estepa, A. & Climent, N. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*. Bilbao: SEIEM, 157-164.
- BARBOSA, S. M. (2013). O software Geogebra e as possibilidades do trabalho com animação. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 2(1), 22-32.
- BARRANTES, M.; BALLETBÓ, I., & LÓPEZ, M. (2014). La componente visual de la geometría en los libros de texto de secundaria. *Revista Premisa*, 16(62).
- BARRANTES, M. & ZAPATA, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55-71.
- BERG, B.L. (2007). *Qualitative research methods for the social sciences*. Boston: Allyn and Bacon.
- CABERO, J. (2006). *Bases pedagógicas para la integración de las TIC en Primaria y Secundaria*. Sevilla: Universidad de Sevilla-Grupo de Tecnología Educativa.
- DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H. & GRAVEMEIJER, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213-234.
- GUTIÉRREZ, A. & JAIME, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 32, 55-70.

- HERNÁNDEZ, R.; FERNÁNDEZ, C. & BAPTISTA, M.P. (2010) *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill Educación.
- IRANZO, N. & FORTUNY, J.M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433-446.
- LASA, A. & WILHELMI, M. R. (2013). Use of GeoGebra in explorative, explanatory and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 2(1), 52-64.
- LEE, H. & HOLLEBRANDS, K. (2008). Preparing to teach mathematics with technology: An integrated approach to developing technological pedagogical content knowledge. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 8(4), 326-341.
- MARIOTTI, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM*, 45(3), 441-452.
- MORIENA, S., & SCAGLIA, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15(1), 5-19.
- RABARDEL, P. (2001). Instrument mediated activity in situations. *In People and Computers XV—Interaction Without Frontiers* (pp. 17-30). Springer London.
- SCAGLIA, S., & MORIENA, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, 17(3), 105-120.
- TROUCHE, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.