COGNITIO-ESTUDOS

Revista Eletrônica de Filosofia
*Philosophy Eletronic Journal*
ISSN 1809-8428

São Paulo: Centro de Estudos de Pragmatismo
Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Disponível em http://www.pucsp.br/pragmatismo

**Vol. 9, nº. 2, julho-dezembro, 2012, p. 149-160**

# FORMALIZANDO A NOÇÃO DE 'POUCOS' VIA TABLEAUX

**Ana Claudia de Jesus Golzio**
Universidade Estadual de Campinas
Campinas – SP - Brasil
anaclaudiagolzio@yahoo.com.br

**Resumo:** Feitosa, Nascimento e Grácio (2009) no artigo intitulado “Algebraic elements for the notions of ‘many’” introduziram uma lógica proposicional para “muitos”, que é uma lógica proposicional com um operador modal para formalizar a noção de “muitos” no campo proposicional. De modo similar, este trabalho apresenta uma lógica proposicional para “poucos” que, como o nome sugere, busca formalizar a noção de “poucos” também no campo proposicional. Embora reconheçamos uma dualidade entre “muitos” e “poucos”, a abordagem do termo “poucos” feita aqui será uma adaptação não dual à abordagem de Feitosa, Nascimento e Grácio (2009) para o termo “muitos”. Ademais a lógica proposicional para “poucos” será apresentada aqui em um sistema de *tableaux*, que é, neste caso, um método dedutivo mais eficiente do que o método hilbertiano usualmente utilizado para a apresentação de sistemas lógicos.

**Palavras-chave:** Lógica proposicional para “poucos”. Sistema de *Tableaux*. Quantificadores.

***FORMALIZING THE NOTION OF 'FEW' VIA TABLEAUX***

***Abstract:*** *Feitosa, Nascimento and Grácio (2009) in their article entitled “Algebraic elements for the notions of ‘many’” introduced a propositional logic for “many”, which is a propositional logic with a modal operator to formalize the notion of “many” inside the propositional context. In a similar way, this work introduces a propositional logic for “few” that, as the name suggests, intends to formalize the notion of “few” also in the propositional context. Although we recognize a duality between “many” and “few”, the approach to the term “few”, that will be made here, is not an adaptation of the dual approach given by Feitosa, Nascimento and Grácio (2009) for the term “many”. Moreover, to propositional logic, "few" will be presented here in a tableaux system that, in this case, is a deductive method more efficient than the Hilbert method usually utilized for the presentation of logical systems.*

***Key-words:*** *Propositional logic for "few". Tableaux system. Quantifiers.*

* * *

## Introdução

O estudo de sentenças envolvendo algum tipo de quantificador, como por exemplo, a sentença, “toda planta de folhas largas perde as suas folhas” já despertava o interesse do filósofo grego Aristóteles [384 a.C. - 322 a.C.], entretanto, historicamente, uma teoria formal da quantificação, isto é, uma teoria utilizando linguagens artificiais, só teve origem com Gottlob Frege [1848 - 1925] em sua obra

"Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens" (1967), publicada originalmente em 1879. Também, Peirce desenvolveu, de maneira paralela a Frege, as bases da concepção contemporânea de quantificadores. Assim, os trabalhos de Peirce e Frege deram origem à lógica clássica de primeira ordem, que trata dos quantificadores universal "$\forall$" e existencial "$\exists$".

A lógica clássica de primeira ordem, entretanto, não é suficiente para formalizar qualquer sentença da linguagem natural. Mostowski, em seu artigo "On a generalization of quantifiers", publicado em 1957, aponta a existência de muitos outros quantificadores que são matematicamente interessantes, mas que não podem ser definidos a partir dos quantificadores de primeira ordem: universal e existencial. Esses quantificadores, não definidos na lógica clássica de primeira ordem, foram denominados por ele quantificadores generalizados.

Sette, Carnielli e Veloso (1999), buscando uma formalização lógica para um tipo específico de quantificador generalizado, apresentaram um sistema lógico monotônico, denominado lógica dos ultrafiltros. O nome desse sistema é devido à composição de sua estrutura semântica: um conjunto universo e um ultrafiltro sobre esse universo. A lógica dos ultrafiltros é uma extensão da lógica de primeira ordem, feita basicamente pelo acréscimo de um quantificador generalizado à linguagem clássica de primeira ordem.

Motivada por esse trabalho, Grácio (1999), em sua tese de doutorado, intitulada "Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza", introduziu um conjunto de lógicas monotônicas não clássicas, denominadas por ela de lógicas moduladas. Uma lógica modulada em particular, a lógica do "muito", introduzida por Grácio (1999), insere um novo quantificador G na sintaxe da clássica lógica de primeira ordem e essa lógica captura a noção de "muitos", por meio de uma estrutura matemática denominada família própria de conjuntos fechados superiormente.

Depois de investigar estes elementos que permitem a formalização do conceito de "muitos", Feitosa, Nascimento e Grácio (2009), no artigo intitulado "Algebraic elements for the notions of 'many'" introduzem uma álgebra para "muitos" e uma lógica proposicional para "muitos", que é uma lógica proposicional com um operador modal para formalizar a noção de "muitos" no campo proposicional. A lógica proposicional para "muitos" de certa maneira captura, no contexto proposicional, algumas características do termo "muitos" da linguagem natural.

De forma semelhante, mas não dual à abordagem feita por Feitosa, Nascimento e Grácio (2009) para o termo "muitos", este trabalho apresenta uma lógica proposicional para o termo "poucos" em um sistema dedutivo denominado "sistema de *tableaux".* O método dos *tableaux* é um método dedutivo assim como o método hilbertiano comumente utilizado na apresentação de sistemas lógicos.

Abaixo serão elencadas algumas propriedades que o termo "poucos" da linguagem natural possui e que fundamentarão a apresentação da lógica proposicional para "poucos" em tableaux.

## 1. A noção intuitiva de "poucos"

Grácio (1999) assume que a noção de "muitos" possui três propriedades essenciais, são elas:

i) Se muitos indivíduos do universo satisfazem a proposição $\varphi$ e se todo indivíduo que satisfaz $\varphi$, satisfaz também $\psi$, então $\psi$ também é satisfeita por muitos indivíduos do universo;

ii) Se muitos indivíduos do universo satisfazem a proposição $\varphi$, então existe alguém que satisfaz $\varphi$;

iii) O conjunto universo contém muitos indivíduos.

O operador modal da lógica proposicional para “muitos” introduzida por Feitosa, Nascimento e Grácio (2009) também satisfaz estas três propriedades.

Seria possível estabelecer, neste trabalho, o conceito de “poucos” como dual ao conceito de “muitos”. Entretanto, quando se afirma, por exemplo, que “Muitas pessoas são felizes”, mesmo que todas as pessoas do meu universo de discurso sejam felizes, isso não parece contrariar a noção intuitiva que temos de “muitos”.

Já em relação à noção de “poucos”, a afirmação: “poucas pessoas gostam de sorvete”, não parece ter sentido em um universo de discurso em que nenhum indivíduo gosta de sorvete. Por isso, a noção intuitiva de “poucos”, abordada aqui considerará que o vazio não contém poucos elementos e, portanto, a abordagem do termo “poucos” feita neste trabalho será uma adaptação não dual à abordagem feita por Feitosa, Nascimento e Grácio (2009) para o termo “muitos”.

Assim como Grácio (1999) fez para a noção de “muitos”, assumiremos que a noção de “poucos” possui três propriedades essenciais, são elas:

i) Se poucos indivíduos do universo satisfazem a proposição $\varphi$ e se todo indivíduo que satisfaz $\psi$, satisfaz também $\varphi$, então $\psi$ também é satisfeita por poucos indivíduos do universo;

ii) Se poucos indivíduos do universo satisfazem a proposição $\varphi$, então existe alguém que satisfaz $\varphi$;

iii) O conjunto universo não contém poucos indivíduos.

Baseada nestas três propriedades, apresentaremos abaixo à lógica proposicional para “poucos” em um sistema de tableaux.

## 2. Origens do método de *tableaux*

O método dos *tableaux* é um método de prova baseado em refutação, isto é, na busca por contraexemplos. A sua origem foi influenciada pelos trabalhos de Gerhard Gentzen em relação à dedução natural.

A análise feita por Gentzen em relação ao cálculo de predicados por meio da dedução natural influenciou outros desenvolvimentos em lógica, um deles foi a reformulação dada por Beth ao sistema de dedução natural de Gentzen, por um sistema de *tableaux* semânticos (GENTZEN, 1969, p. 7).

Esse novo método é baseado na construção de contraexemplos e satisfaz o *princípio da subfórmula* de Gentzen (1969, p. 7). Os *sistemas de provas* de Gentzen eram caracterizados por admitirem esse princípio, ou seja, se uma fórmula $\varphi$ é demonstrável, então $\varphi$ tem uma demonstração em que ocorrem apenas subfórmulas de $\varphi$.

Segundo Fitting (1999, p. 13), a motivação de Gentzen, ao desenvolver os sistemas de dedução natural e de cálculo de sequentes, foi o desenvolvimento de uma teoria da prova. Ele não estava preocupado em tentar estabelecer a correção e a completude de seus sistemas, mas em mostrar a equivalência entre eles. Beth, ao contrário de Gentzen, foi motivado por conceitos semânticos e em 1955, introduziu os chamados *tableaux semânticos*.

Os trabalhos de Beth e de Hintikka sobre *tableaux* ocorreram simultaneamente. Como é dito em Fitting (1999, p. 17), o primeiro artigo de Hintikka apareceu em 1955, no mesmo ano em que apareceu o artigo de Beth. Entretanto, semelhante a Beth e diferente de Gentzen, Hintikka foi motivado por interesses semânticos. Hintikka defende que a ideia oculta na prova de $\varphi$ é que se a tentativa sistemática de construir um modelo em que $\neg\varphi$ é verdadeira falhar, então $\varphi$ é válida.

Beth e Hintikka, ambos, contribuíram para o desenvolvimento dos *tableaux*. Beth propôs uma representação gráfica por *tableaux*, enquanto Hintikka usou uma estrutura de árvores com conjuntos de formulas em nós. Entretanto, essas duas formas de se apresentar o sistema de *tableaux* eram demasiadamente complicadas e trabalhosas.

Ainda Fitting (1999, p. 19) afirma que um requisito essencial no desenvolvimento dos *tableaux* foi a exigência de uma notação simplificada. Exigência essa alcançada, independentemente, por duas pessoas: Zbigniew Lis e Raymond Smullyan.

Lis publicou suas ideias em 1960, mas devido ao grande abismo fixado entre o ocidente e o oriente da Europa, elas não se tornaram conhecidas. As ideias de Lis foram posteriormente redescobertas por Smullyan, culminando com a publicação de seu livro *First-Order Logic* em 1968. Foi com esse completo trabalho de Smullyan que os *tableaux* se tornaram bastante conhecidos e o trabalho de Lis só voltou a receber atenção nos últimos anos (FITTING,1999, p. 19).

Smullyan chamou sua versão de *tableaux* de “*tableaux* analíticos”. Ele utiliza os *tableaux* como base de um tratamento geral para a lógica clássica, incluindo, também, uma análise das possíveis variações das demonstrações de completude (FITTING, 1999, p. 20).

## 3. O método dos *tableaux*

O método dos *tableaux* analíticos é baseado em refutação, isto é, para verificar a validade de uma fórmula $\varphi$ em um sistema lógico, se constrói um *tableau* para a negação da fórmula em questão, ou seja, para $\neg\varphi$ e, então, utilizando uma estrutura que se assemelha a uma árvore, aplica-se regras do sistema de *tableau*. O objetivo desse método é encontrar modelos contraditórios para a negação da fórmula testada, $\neg\varphi$. Quando o objetivo é alcançado, pode-se concluir que a hipótese $\neg\varphi$ é falsa e, portanto, a fórmula original $\varphi$ é verdadeira. Entretanto, se após a utilização de todas as regras possíveis não é obtida uma contradição, significa que existe uma valoração que torna $\neg\varphi$ verdadeira e, portanto, $\varphi$ falsa.

O sistema de *tableaux* apresentado para o cálculo proposicional clássico neste capítulo está de acordo com o livro *Lógica de Primeira Ordem* de Raymond Smullyan (2009).

Agora serão apresentadas algumas definições importantes e necessárias à definição de *árvore ordenada diádica*.

Uma *árvore não ordenada* T é uma estrutura $\langle \Gamma, L, R \rangle$, tal que:

i) $\Gamma$ representa um conjunto de elementos $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n\}$ chamados *pontos*.

ii) L é uma função que associa a cada ponto $\varphi$, um inteiro positivo $L(\varphi)$ chamado *nível* de $\varphi$.

iii) R é uma relação definida em $\Gamma$, na qual se $\varphi$ R $\psi$, então $\varphi$ é chamado *antecessor* de $\psi$ e $\psi$ é chamado *sucessor* de $\varphi$. Essa relação deve obedecer as seguintes condições:

$C_1$: Há um único ponto $\varphi_1$ de nível 1, chamado *origem* da árvore.

$C_2$: Todos os pontos de $\Gamma$, menos a origem (a origem não têm antecessor), tem um único antecessor.

$C_3$: Para quaisquer pontos $\varphi$ e $\psi$, se $\psi$ é um sucessor de $\varphi$, então $L(\psi) = L(\varphi) + 1$.

Se um ponto tem exatamente um sucessor é chamado de *ponto simples* e se um ponto possui mais que um sucessor é chamado de *ponto de junção*.

Um *ponto final* é um ponto que não possui pontos sucessores.

Uma *árvore ordenada* é uma árvore não ordenada acrescida de uma função h que atribui a cada ponto de junção $\gamma$ uma sequência $h(\gamma)$ que não contém repetições, e cujo conjunto de termos consiste em todos os sucessores de $\gamma$.

Uma *árvore diádica* é uma árvore ordenada em que cada ponto junção tem no máximo dois sucessores.

Uma fórmula é dita do tipo $\alpha$ se puder ser escrita como uma conjunção, com componentes denominados $\alpha_1$ e $\alpha_2$. As fórmulas do tipo $\alpha$ e seus respectivos componentes são apresentados na tabela abaixo:

| $\alpha$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|---|---|---|
| $\varphi \wedge \psi$ | $\varphi$ | $\psi$ |
| $\neg(\varphi \vee \psi)$ | $\neg\varphi$ | $\neg\psi$ |
| $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ | $\varphi$ | $\neg\psi$ |
| $\neg\neg\varphi$ | $\varphi$ | |

Uma fórmula é dita do tipo $\beta$ se puder ser escrita como uma disjunção, com componentes denominados $\beta_1$ e $\beta_2$. As fórmulas do tipo $\beta$ e seus respectivos componentes são apresentados na tabela abaixo:

| $\beta$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|
| $\neg(\varphi \wedge \psi)$ | $\neg\varphi$ | $\neg\psi$ |
| $\varphi \vee \psi$ | $\varphi$ | $\psi$ |
| $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\varphi$ | $\psi$ |

A fórmula $\neg\neg\varphi$ é uma exceção, pois ela possui apenas um componente, assim ela pode ser tanto uma fórmula do tipo $\alpha$ quanto uma fórmula do tipo $\beta$, foi uma escolha arbitrária classifica-la como uma fórmula do tipo $\alpha$.

Um *ramo* é qualquer conjunto finito ou infinito de pontos tal que:

i) A origem da árvore está no ramo;

ii) Cada termo do ramo, exceto (se houver) o último, é antecessor do próximo;

iii) Se $\alpha$ está no ramo, então, também $\alpha_1$ e $\alpha_2$ estão no ramo;

iv) Se $\beta$ está no ramo, então, somente um dos dois $\beta_1$ ou $\beta_2$ está no ramo.

Quando um ramo tem um número finito de pontos um último ponto do ramo é o *ponto* final do ramo (da árvore) e esse ramo é *finito*, caso contrário ele é *infinito*.

Agora será dada uma definição precisa de *tableau* analítico. Para não causar confusão é necessário ressaltar que por *um tableau para uma fórmula* $\varphi$*,* entende-se um *tableau* que começa com uma determinada fórmula $\varphi$ e, para demonstrar que $\varphi$ é uma tautologia, constrói-se um *tableau*, não para a fórmula $\varphi$, mas para a sua negação $\neg\varphi$.

Um *tableau analítico* para uma fórmula $\varphi$ é uma árvore ordenada diádica, cujos pontos são fórmulas, e que é construída como se segue. Inicia-se colocando $\varphi$ na origem. Supõe-se que $\mathfrak{I}$ já é um *tableau* construído para $\varphi$ e $\psi$ é um ponto final. Então se pode estender $\mathfrak{I}$ por meio de uma das seguintes operações:

i) Se alguma fórmula do tipo $\alpha$ ocorre no ramo $\theta_\psi$ (ramo que contém $\psi$), então se pode adicionar ou $\alpha_1$ ou $\alpha_2$ como único sucessor de $\psi$;

ii) Se alguma fórmula do tipo $\beta$ ocorre no ramo $\theta_\psi$ (ramo que contém $\psi$), então se pode simultaneamente adicionar $\beta_1$ como sucessor da esquerda de $\psi$ e $\beta_2$ como sucessor da direita de $\psi$.

Um ramo de *tableau* é *fechado* quando existem neste ramo pontos que correspondam às fórmulas $\gamma$ e $\neg\gamma$.

Um *tableau* para uma determinada fórmula $\varphi$ é *fechado* quando todos os seus ramos são fechados.

Seja $\Gamma$ um conjunto de fórmulas de L. O conjunto $\Gamma$ é dito *fechado* quando é possível a construção de um *tableau* fechado para a conjunção das fórmulas de $\Gamma$, caso contrário $\Gamma$ é dito *aberto*.

Seja $\Gamma$ um conjunto de fórmulas de L. Uma fórmula $\varphi$ é *consequência lógica* de $\Gamma$ e denota-se tal fato por $\Gamma \Vdash \varphi$, quando $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é um conjunto fechado de fórmulas.

Uma *demonstração* por *tableau* da fórmula $\varphi$ é um *tableau* fechado para $\neg\varphi$. Se uma fórmula $\varphi$ tem uma demonstração por *tableau*, então é dito que $\varphi$ é demonstrável por *tableaux* e denota-se tal fato por $\Vdash\varphi$.

As fórmulas do tipo $\alpha$ junto com as fórmulas do tipo $\beta$ formam as chamadas *regras* do sistema de tableaux e podem ser nomeadas e escritas como segue:

$[R\wedge]$: $\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\begin{matrix}\varphi\\ \psi\end{matrix}}$  $[R\neg\vee]$: $\dfrac{\neg(\varphi\vee\psi)}{\begin{matrix}\neg\varphi\\ \neg\psi\end{matrix}}$  $[R\neg\rightarrow]$: $\dfrac{\neg(\varphi\rightarrow\psi)}{\begin{matrix}\varphi\\ \neg\psi\end{matrix}}$  $[R\neg\neg]$: $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$

$[R\neg\wedge]$: $\dfrac{\neg(\varphi\wedge\psi)}{\neg\varphi \mid \neg\psi}$  $[R\vee]$: $\dfrac{\varphi\vee\psi}{\varphi \mid \psi}$  $[R\rightarrow]$: $\dfrac{\varphi\rightarrow\psi}{\neg\varphi \mid \psi}$

Para exemplificar o que é uma demonstração utilizando o método dos *tableaux*, será demonstrado a seguir que: $\Vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)$.

(1) $\neg(((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma))$
(2) $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \gamma)$ [1, $R\neg\rightarrow$]
(3) $\neg(\varphi \rightarrow \gamma)$ [1, $R\neg\rightarrow$]
(4) $\varphi \rightarrow \psi$ [2, $R\wedge$]
(5) $\psi \rightarrow \gamma$ [2, $R\wedge$]
(6) $\varphi$ [3, $R\neg\rightarrow$]
(7) $\neg\gamma$ [3, $R\neg\rightarrow$]

| | | |
|---|---|---|
| (8) $\neg\varphi$ [4, $R\rightarrow$] | (9) $\psi$ [4, $R\rightarrow$] | |
| $\times$ | (10) $\neg\psi$ [5, $R\rightarrow$] | (11) $\gamma$ [5, $R\rightarrow$] |
| | $\times$ | $\times$ |

## 4. A lógica proposicional para "poucos" em *tableaux*

A lógica proposicional para "poucos" em *tableaux* terá o acréscimo de um novo operador "$\odot$" à linguagem $L(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow)$ da lógica proposicional clássica.

A *lógica proposicional para "poucos" em um sistema de "tableaux"* ($LPP_T$), de linguagem $L_P(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \odot)$ é definida por meio do acréscimo das seguintes regras às regras do tipo $\alpha$:

$R_{P1}$: $\dfrac{\odot\bot}{\bot}$

$R_{P2}$: $\dfrac{\odot\top}{\bot}$

$R_{P3}$: $\dfrac{\neg(\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi)}{\perp}$ Só se aplica se $\nVdash \psi \rightarrow \perp$ e $\Vdash \psi \rightarrow \varphi$

Ao se deparar com uma fórmula do tipo $\neg(\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi)$ o tableau deverá aplicar primeiro a regra ($R_{P3}$) e a regra ($R\neg\rightarrow$) só deverá ser aplicada na impossibilidade de se aplicar a regra ($R_{P3}$).

$R_{P4}$: $\dfrac{\neg((\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi) \wedge (\circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi))}{\perp}$ Só se aplica se $\Vdash(\varphi \rightarrow \psi)\wedge(\psi \rightarrow \varphi)$

Intuitivamente, a regra ($R_{P1}$) diz que o fato de uma contradição ter poucas evidências gera uma contradição no sistema de tableaux e a regra ($R_{P2}$) diz que o fato de uma tautologia ter poucas evidências também gera uma contradição no sistema de tableaux, ou seja, nesse sistema uma contradição não tem poucas evidências e uma tautologia também não tem poucas evidências. A regra ($R_{P3}$) diz que se $\psi$ implica $\varphi$, $\psi$ não é uma contradição e se $\varphi$ tem poucas evidências, então $\psi$ também tem poucas evidências. Por fim, a regra ($R_{P4}$) serve, apenas para tornar possível a demonstração dos teoremas de correção e completude.

Tais noções intuitivas estão de acordo com as propriedades assumidas para o termo “poucos” na seção 1 deste trabalho.

Algumas deduções no sistema $LPP_T$:

a) $\Gamma \Vdash \neg\circledcirc\perp$

(1) $\Gamma$

(2) $\neg\neg\circledcirc\perp$

(3) $\circledcirc\perp$ [2, $R\neg\neg$]

(4) $\perp$ [3, $R_{P1}$]

$\times$

b) $\Gamma \Vdash \circledcirc(\varphi \vee \psi) \rightarrow \circledcirc\varphi$

(1) $\Gamma$

(2) $\neg(\circledcirc(\varphi \vee \psi) \rightarrow \circledcirc\varphi)$

(3) $\perp$ [2, $R_{P3}$]*

$\times$

* Para aplicar $R_{P3}$ é preciso verificar se $\nVdash \varphi \rightarrow \perp$ e se $\Vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$:

$\nVdash \varphi \rightarrow \perp$

(1) $\neg(\varphi \rightarrow \perp)$

(2) $\varphi$ [1, R$\neg\rightarrow$]

(3) $\neg\bot$ [1, R$\neg\rightarrow$]

Tableau aberto

$\Vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

(1) $\neg(\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$

(2) $\varphi$ [1, R$\neg\rightarrow$]

(3) $\neg(\varphi \vee \psi)$ [1, R$\neg\rightarrow$]

(4) $\neg\varphi$ [3, R$\neg\vee$]

(5) $\neg\psi$ [3, R$\neg\vee$]

$\times$

c) $\Gamma \Vdash \circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc(\varphi \wedge \psi)$

(1) $\Gamma$

(2) $\neg(\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc(\varphi \wedge \psi))$

(3) $\bot$ [2, $R_{P3}$]*

$\times$

* Para aplicar $R_{P3}$ é preciso verificar se $\nVdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \bot$ e se $\Vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$:

$\nVdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \bot$

(1) $\neg(\varphi \wedge \psi \rightarrow \bot)$

(2) $\varphi \wedge \psi$ [2, R$\neg\rightarrow$]

(3) $\neg\bot$ [2, R$\neg\rightarrow$]

(4) $\varphi$ [2, R$\wedge$]

(5) $\psi$ [2, R$\wedge$]

Tableau aberto.

$\Vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$

(1) $\neg( (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi)$

(2) $\varphi \wedge \psi$ [1, R$\neg\rightarrow$]

(3) $\neg\varphi$ [1, R$\neg\rightarrow$]

(4) $\varphi$ [2, R$\wedge$]

(5) $\psi$ [2, R$\wedge$]

$\times$

**Nota:** Uma variante do resultado acima é: $\Gamma \Vdash \circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc(\varphi \wedge \neg\varphi)$

(1) $\Gamma$

(2) $\neg(\circledcirc\varphi \to \circledcirc(\varphi \wedge \neg\varphi))$

(3) $\neg\circledcirc(\varphi\wedge\neg\varphi)$ [2, $R\neg\to$]

(4) $\circledcirc\varphi$ [2, $\neg\to$]

Tableau aberto.

* Para aplicar $R_{P3}$ é preciso verificar se $\nVdash \varphi \wedge \neg\varphi \to \bot$ :

(1) $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi \to \bot)$

(2) $\varphi \wedge \neg\varphi$ [2, $R\neg\to$]

(3) $\neg\bot$ [2, $R\neg\to$]

$\times$

Tableau fechado.

Portanto, não podemos aplicar a regra $R_{P3}$ no tableau construído para $\Gamma \cup \{\neg(\circledcirc\varphi \to \circledcirc(\varphi \wedge \neg\varphi))\}$. Logo, este tableau será aberto e, consequentemente, $\Gamma \nVdash \circledcirc\varphi \to \circledcirc(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

d) $\Gamma \Vdash \neg\circledcirc\top$

(1) $\Gamma$

(2) $\neg\neg\circledcirc\top$

(3) $\circledcirc\top$ [2, $R\neg\neg$]

(4) $\bot$ [3, $R_{P2}$]

$\times$

## Considerações finais

O que são poucos? Quantos elementos são necessários a certo conjunto para que seja possível dizer que este conjunto possui poucos elementos?

Claramente, para responder a tais questões é necessário definir em qual universo de discurso elas estão sendo abordadas. Entretanto, apesar da dependência que o conceito de “poucos” parece ter de um contexto, é possível estabelecer algumas propriedades universais (isto é, válidas em qualquer universo de discurso) para o conceito de “poucos”.

Por exemplo, na afirmação “Na sala há poucas crianças”, apesar de não ser possível saber quantas crianças há na sala e nem quantas crianças seriam necessárias para encher a sala, é possível dizer que existe alguém na sala. Também parece razoável dizer que a sala não está cheia (não está com todas as crianças que caberiam na sala).

Em termos conjuntistas, parece legítimo concluir três propriedades fundamentais associadas à noção intuitiva de “poucos” que independem do contexto. São elas: “Se um conjunto tem poucos elementos, então ele não é vazio”, “O universo de discurso não possui poucos elementos” e “se um conjunto A tem poucos elementos, então um conjunto B contido em A e não vazio também tem poucos elementos”.

Tais noções intuitivas deram suporte ao desenvolvimento de uma lógica para tratar do termo “poucos” em ambiente proposicional, tal lógica foi denominada: lógica proposicional para “poucos”.

A lógica proposicional para “poucos” foi apresentada via sistema de *tableaux*. Em geral, o método dos *tableaux* é considerado eficiente, pois, na medida em que o *tableau* é expandido, as fórmulas têm sua complexidade cada vez menor, até que nos ramos restem apenas fórmulas atômicas ou a negação de fórmulas atômicas, as quais não poderão mais ser expandidas. Assim, observa-se que, em uma dedução por *tableaux*, há um decréscimo no grau de complexidade das fórmulas. Já para fazer uma dedução em um sistema hilbertiano, é necessária a colocação de axiomas o que torna a dedução um pouco mais longa e demorada se comparada a uma dedução por *tableaux*.

Além deste método dedutivo, há ainda outros, como os dois sistemas dedutivos de Gentzen (1969): o cálculo de sequentes e a dedução natural e o conhecido método hilbertiano. Como sugestão para um trabalho futuro coloca-se a questão de apresentar a lógica proposicional para “poucos” em um sistema de cálculo de sequentes e também em um sistema de dedução natural.

* * *

**Referências**

BETH, E. W. *The foundations of mathematics.* Amsterdam: North Holland.1959.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M.C.C. Algebraic elements for the notion of 'many'. *CLE e-Prints* (Online), v. 9, 2009.

FITTING, M. C. Introduction. In: D´AGOSTINO, M; GABBAY, D.V.; HAHNLE, R.; POSEGGA, J. (Eds.). *Handbook of Tableaux Methods.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

FRÁPOLLI, M. J. Quantificadores, in *Filosofía de la lógica.* Madrid, Tecnos, , 2007.

FREGE, G. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nach gebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle, 1879. English translation in *From Frege to Godel, a source book in mathematical logic* (J. van Heijenoort, Editor), Harvard University Press, Cambridge, 1967.

GENTZEN, G. *The collected papers of Gerhard Gentzen.* Editor M. E. Szabo. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969.

GRÁCIO, M. C. C. *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza.* Tese de doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência), Instituto de Filosofia e Ciências

Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

MOSTOWSKI, A. On a generalization of quantifiers. *Fund. Mathematical*, v. 44, 1957.

SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A.; VELOSO, P. *An alternative view of default reasoning and its logic.* In: HAUESLER, E. H., PEREIRA, L. C. (Eds.) Pratica: Proofs, types and categories. Rio de Janeiro: PUC, 1999.

SMULLYAN, R. M. *First-order logic.* New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.

SMULLYAN, R. M. *Lógica de Primeira Ordem*. Editora Unesp, 2009.