Semântica Quase-conjuntista e Compromisso Ontológico

Quasi-Set Semantics and Ontological Compromise

Jonas R. Becker Arenhart*
Programa de Pós-Graduação em Filosofia
Grupo de Lógica e Fundamentos da Ciência
Universidade Federal de Santa Catarina
jonas.becker2@gmail.com

Décio Krause**
Programa de Pós-Graduação em Filosofia
Grupo de Lógica e Fundamentos da Ciência
Universidade Federal de Santa Catarina
deciokrause@gmail.com

Dedicado a Lafayette de Moraes pelos seus 80 anos
To Lafayette de Moraes on his 80th Anniversary

Resumo: Neste trabalho apresentaremos uma semântica de estilo tarskiano para linguagens de primeira ordem, utilizando-nos de uma teoria de quase-conjuntos como metalinguagem. O objetivo é permitir que objetos indistinguíveis mas não idênticos, no sentido tratado por esta teoria, figurem no domínio de interpretação e possam ser valores de variáveis no sentido quiniano. Desse modo, além de alterar a interpretação de símbolos como a identidade e as constantes não lógicas da linguagem, esta semântica nos permite discutir de modo rigoroso a possibilidade de relativizarmos o famoso critério de compromisso ontológico de Quine, segundo o qual, grosso modo, uma teoria expressa em linguagem de primeira ordem está comprometida com as entidades que devem estar no domínio de interpretação para que a fórmula em questão seja verdadeira, e que essas entidades devem ser "dotadas de identidade". Como veremos, mudando a teoria da metalinguagem, mudamos os tipos de objetos que podem pertencer ao domínio de interpretação.

Palavras-chave: Semântica. Quase-conjuntos. Identidade.

Abstract: *In this paper we will present a Tarski-like Semantics for first-order languages by resorting to a theory of quasi-sets as meta-language. The objective is to allow that undistinguishable, though not identical, objects – in the sense dealt with by this theory –, appear in the domain of interpretation and may be*

* Bolsista Capes.
** Parcialmente financiado pelo CNPq (processo 304540/2006-4).

values of variables in the Quinean sense. Thus, besides changing the interpretation of symbols as the identity and the non-logical constants of language, this Semantics will allow us to discuss – in a strict manner – the possibility of relativizing the famous criterion of Quine's Ontological Compromise, according to which, without getting into minute details, a theory expressed in first-order language is compromised with the entities that ought to be in the domain of interpretation so that the formula in question is true and that such entities must 'have identity'. As we shall see, by changing this meta-language theory, we will change the kinds of objects that can belong to the domain of interpretation.

Key-words: *Semantics. Quasi-sets. Identity.*

1. Motivação

Em seu livro *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, Newton da Costa (Da COSTA, 1980, p.117 ss.) apresentou um sistema de lógica de primeira ordem que batizou de Lógica de Schrödinger. O objetivo que tinha em mente ao apresentar esta lógica era mostrar que o princípio de identidade, conforme formalizado na lógica clássica de primeira ordem pela fórmula $\forall x\ (x = x)$, pode não valer em geral, ou seja, que se pode conceber um sistema de lógica, a lógica de Schrödinger, no qual nem identidade nem diferença se apliquem a todas as entidades das quais se pretende tratar.[1]

Ainda, como motivação fundamental para propor-se um sistema de lógica desse tipo, Da Costa visava, com a lógica de Schrödinger, captar certas intuições de E. Schrödinger que, falando sobre partículas elementares da física quântica, insistia em que a questão sobre sua identidade ou diferença, em certos contextos quânticos, não faz sentido: "Está fora de dúvida que a questão da 'igualdade', da identidade, real e verdadeiramente não tem sentido" (SCHRÖDINGER, 1952, p. 18). Assim, a lógica de Schrödinger, baseada em concepções como a de Schrödinger sobre a natureza das partículas da física quântica, visava ser um exemplo de sistema de lógica no qual podemos mostrar que a lei da identidade, formulada conforme mencionamos acima, não vale irrestritamente, não valendo em particular para alguns objetos do modelo pretendido.

A formulação de um sistema de lógica que satisfaça essas condições, ou seja, um sistema no qual não seja possível falar de identidade e diferença para certas entidades, foi obtida utilizando-se dois recursos: (i) uma linguagem bissortida, ou seja, uma linguagem com duas espécies de termos individuais, e (ii) uma mudança conveniente na definição de fórmula. Com relação aos termos individuais, temos que os termos da primeira espécie terão como interpretação pretendida objetos macroscópicos, para os quais a identidade (em seu sentido usual descrito pela lógica elementar clássica) supostamente faz sentido, e a outra espécie, a segunda, possui como interpretação pretendi-

[1] Esse tipo de lógica, que viola de alguma forma o princípio de identidade, é chamado de lógica não-reflexiva, ou então de pararreflexiva. Outros sistemas de lógicas desse tipo, ou sugestões sobre seu desenvolvimento, podem ser vistos também em Da COSTA, KRAUSE, 1994; Da COSTA, KRAUSE, 1997; FRENCH, KRAUSE, 2006, cap. 8; Da COSTA, BUENO, 2009.

da as entidades microscópicas, que, seguindo a interpretação de Schrödinger que motivou a construção desse sistema, não podem figurar com sentido na relação de identidade. O segundo ponto mencionado acima, a restrição na definição de fórmulas, foi utilizado para garantir-se que esse aspecto especial do sistema seja capturado pelo formalismo, ou seja, para que a identidade não se aplique a objetos denotados pelos termos de segunda espécie. A restrição que deve ser feita na definição de fórmula é a de impedir que o símbolo identidade origine uma fórmula quando ladeado por pelo menos um termo de segunda espécie. Os axiomas da lógica clássica, respeitadas as diferenças de termos que impõem pequenas restrições em sua formulação nos axiomas da igualdade, completam a apresentação.

Dadas essas motivações, a interpretação pretendida para a lógica de Schrödinger deveria ser feita de modo que essas intuições básicas fossem preservadas. As variáveis de primeira espécie percorreriam um conjunto no sentido usual, e as constantes de primeira espécie nomeariam elementos deste conjunto. Por outro lado, caso queiramos que nossa semântica seja consistente com as nossas motivações, as variáveis de segunda espécie deveriam percorrer um conjunto cujos elementos sejam tais que a identidade ou diferença não fizesse sentido para eles, e as constantes de segunda espécie deveriam, de algum modo, denotar tais elementos.

Esse procedimento, quando realizado da maneira usual, ou seja, tendo uma teoria de conjuntos informal como metalinguagem, conduz a vários problemas filosóficos, pois, em particular, como foi apontado por Da Costa (Da COSTA, 1980; ver também Da COSTA; KRAUSE, 1994) o conjunto no qual se interpretam os termos de segunda espécie não pode ser um *conjunto* na acepção usual, caso queiramos de fato preservar as intuições que deram origem às lógicas de Schrödinger. Isso ocorre porque, nas teorias de conjuntos usuais, a identidade sempre faz sentido para todos os elementos de qualquer conjunto (outros problemas relacionando semânticas para linguagens de primeira ordem com as teorias usuais de conjuntos, quando se tem em mente tratar com partículas quânticas, podem ser vistos em FRENCH; KRAUSE, 2006, cap. 6). Assim, conforme Da Costa,

> ... ao tratarmos de partículas elementares, tudo indica que devamos procurar semânticas fora das teorias clássicas de conjuntos. A lógica não reflexiva, v.g., surgiu dessa circunstância; como já observamos, a igualdade parece carecer de sentido no tocante às partículas atômicas ou subatômicas, de modo que não se pode aplicar diretamente as noções da teoria usual de conjuntos a coleções de partículas elementares. Por conseguinte, a semântica de certas linguagens da física não é suscetível de assentar-se, pura e simplesmente, em qualquer das teorias clássicas de conjunto. (Da COSTA, 1999, p.124)

A solução que se buscou para o problema mencionado acima foi a construção de uma teoria de *quase-conjuntos*, solução que havia sido sugerida por Da Costa ao detectar o problema. A teoria de quase-conjuntos, conforme elaborada por Krause (ver KRAUSE, 1990, 1992), permite que se trate de coleções de objetos indistinguíveis mas não idênticos. Abaixo faremos uma breve apresentação dessa teoria (um desenvolvimento detalhado pode ser visto em FRENCH; KRAUSE, 2006, cap. 7). Vale mencionar também que as Lógicas de Schrödinger não ficam restritas a linguagens de primeira ordem, mas podem ser formuladas, com adaptações convenientes, como sistemas de ordem superior, apresentando, no entanto, os mesmo problemas que o sistema de primeira ordem no que diz respeito à semântica feita tendo-se teorias de conjuntos clássicas como metalinguagem (para essas extensões, ver KRAUSE, 1990; Da COSTA, KRAUSE, 1994; Da COSTA, KRAUSE, 1997; FRENCH, KRAUSE, 2006).

Uma sugestão que se apresenta muito naturalmente nesse contexto é a de se generalizar a sugestão da semântica acima, e utilizar a teoria de quase-conjuntos como metalinguagem para fundamentar semânticas não apenas para a lógica de Schrödinger, mas também para qualquer linguagem de primeira ordem, sendo a semântica para a lógica de Schrödinger apenas um caso particular. Essa sugestão nos parece natural pelos seguintes motivos: conforme notamos acima, o que garantirá que não podemos falar sobre a identidade ou diferença das entidades denotadas pelos termos de segunda espécie da lógica de Schrödinger é uma característica própria da metalinguagem. Assim, não é a linguagem ou mesmo a lógica que se utiliza o que faz com que as entidades com as quais estamos tratando sejam ou não objetos desse tipo peculiar, mas sim a metalinguagem, que fornece em particular o domínio de interpretação.

Considerando com um pouco mais de detalhe a afirmação anterior de que a validade ou não de relação de identidade para as entidades com as quais queremos tratar depende em grande parte do domínio de interpretação, que por sua vez depende da metalinguagem, temos a possibilidade de relativizar as entidades que podem existir nos domínios de interpretação à teoria de conjunto utilizada. Assim, se levarmos a sério o critério de compromisso ontológico de Quine (QUINE, 1948), segundo o qual as entidades com as quais está comprometida uma teoria são aquelas entidades que devem existir para que as sentenças da teoria quantificadas existencialmente sejam verdadeiras quando formuladas em uma linguagem "regimentada", se considerarmos teorias de conjuntos alternativas, teremos que diferentes tipos de entidades podem pertencer ao domínio de interpretação dessas teorias, e assim, de algum modo, a ontologia com a qual a teoria nos compromete fica também relativizada à metalinguagem que estamos utilizando.

Nosso objetivo, nas próximas seções, é mostrar como uma semântica de estilo tarskiano pode ser feita utilizando-se a teoria de quase-conjuntos como metalinguagem. Buscaremos, além de enfatizar como algumas características da semântica mudam quando se utilizar essa teoria de conjuntos, apresentar alguns resultados particulares que se originam essencialmente do fato de estarmos utilizando uma metalinguagem particular e, então, discutir a tese quiniana do comprometimento ontológico, tendo em vista a possibilidade de erigirmos diferentes teorias de conjuntos, não equivalentes entre si, nas quais podemos formular uma semântica para linguagens de primeira ordem. Passamos agora a apresentar um esboço da teoria de quase-conjuntos.

2. A teoria de quase-conjuntos

Nesta seção, apresentaremos em linhas gerais as noções básicas da teoria de quase-conjuntos que serão utilizadas nas discussões a seguir. Os detalhes podem ser encontrados em French e Krause (2006, cap. 7). Nossa exposição não será detalhada; não apresentaremos todos os postulados e definições utilizados no desenvolvimento da teoria, restringindo-nos a dar uma ideia básica de como a teoria pode ser entendida informalmente. A teoria de quase-conjuntos desenvolvida aqui é denominada de $\mathcal{Q}$.

As principais motivações para desenvolver-se uma teoria de quase-conjuntos, além da proposta original de que serviriam para fundamentar-se mais adequadamente uma

Cognitio, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 191-207, jul./dez. 2009

semântica para as lógicas de Schrödinger, consistem em poder dar-se um tratamento formal mais adequado às coleções de objetos que não possam figurar com sentido na relação de identidade, mas que possam ser indiscerníveis em um sentido preciso. A teoria, portanto, pode ser qualificada como proporcionadora dos fundamentos para uma *matemática da indiscernibilidade e da não-individualidade*. Em outros termos, objetiva-se com a teoria superar a necessidade de desenvolver-se uma teoria de "conjuntos" que, diferentemente das teorias clássicas como ZF, possa tratar de coleções de objetos que possam ser absolutamente indistinguíveis mas não idênticos, ou seja, na qual os conceitos de identidade e indistinguibilidade possam ser tratados separadamente como não equivalentes (pois, como se sabe, a identidade é usualmente definida por meio da indistinguibilidade).

Para que a teoria capture essas intuições, temos que garantir dois pontos: que a teoria seja consistente com a existência de objetos que não poderão figurar na relação de identidade e que, para esses objetos, valha uma relação mais fraca, de indistinguibilidade, sem no entanto coincidir com a identidade. A maneira como esses dois objetivos são alcançados está relacionada como segue. Primeiramente, consideramos que a teoria possui dois tipos de átomos, os m-átomos e os M-átomos. Os primeiros, numa interpretação pretendida, representam intuitivamente as partículas microscópicas para as quais identidade e diferença não devem fazer sentido, enquanto os M-átomos representam objetos usuais, macroscópicos, para os quais se supõe que a relação de identidade deve fazer sentido. Estes objetos serão distinguidos na teoria pelos predicados unários m e M respectivamente, que são símbolos primitivos da linguagem de Q.

Os quase-conjuntos, ou q-sets, são por definição objetos que não são átomos. Se x é um quase-conjunto, denotamos isso por meio de um predicado, $Q(x)$. Os quase-conjuntos podem, como nas teorias usuais, conter como elementos tanto átomos de qualquer um dos dois tipos quanto outros quase-conjuntos. Utilizaremos um símbolo primitivo de predicado unário na linguagem da teoria, Z, para designar aqueles quase-conjuntos que representarão os conjuntos "clássicos" de ZFU em Q, ou seja, aquelas coleções que não possuem m-átomos em seu fecho transitivo.[2] Os objetos que satisfazem os predicados M e Z são ditos os objetos "clássicos" da teoria. Assim, se nos restringirmos às coleções que satisfazem Z e aos objetos que satisfazem M, obtemos em Q uma "cópia" de ZFU. Com isso, toda a matemática que pode ser desenvolvida em ZFU pode também ser desenvolvida em Q, e é desse modo que dizemos que Q "contém" ZFU. Do mesmo modo, q-sets que possuem como elementos apenas m-átomos são ditos q-sets "puros".

Assumimos que o símbolo para a relação de identidade ('=') não é um dos símbolos primitivos da teoria, mas que o símbolo de relação binária que representará a indistinguibilidade, $\equiv$, pelo contrário, é um dos primitivos. Os postulados para indistinguibilidade nos garantem que ela é uma relação de equivalência, valendo entre todos os objetos do domínio. A identidade, por outro lado, é um símbolo definido na teoria, nos garantindo que dois quase-conjuntos x e y que possuem todos os mesmo

2 Esse conceito é entendido em seu sentido usual. Isso corresponde a dizer que um "conjunto" (um objeto que satisfaça o predicado Z) é descrito pela parte clássica da teoria Q.

elementos “clássicos” (M-átomos ou conjuntos), e não possuindo m-átomos em seus fechos transitivos, serão idênticos, e que M-átomos ou conjuntos que pertencem a exatamente os mesmos quase-conjuntos serão iguais. Usaremos o símbolo $=_E$ para denotar esta relação, que será chamada *identidade extensional*. Note que essa relação de identidade não está definida para m-átomos, e, assim, eles podem figurar significativamente na relação de indistinguibilidade, mas não na relação de identidade. Os postulados da teoria e a definição de identidade extensional garantem-nos que, para os objetos “clássicos”, as relações de indistinguibilidade e identidade são equivalentes, ou seja, para essas entidades, estas relações colapsam como no caso clássico, mas que isto não ocorre para os m-átomos.

Enfatizando este ponto, resulta dos detalhes formais da teoria que uma expressão da forma $x =_E y$ não é uma fórmula (expressão bem formada da linguagem de *Q*) quando *x* ou *y* satisfazem o predicado *m*. Assim, conforme as intuições que guiaram a construção da teoria, esses objetos são pensados como capazes de representar partículas microscópicas da mecânica quântica não-relativística, segundo uma interpretação razoável (discutida em FRENCH; KRAUSE, 2006). Nas discussões sobre o assunto, os objetos desse tipo são chamados de *não-indivíduos* (ver *ibid*.). Quando utilizamos os axiomas de *Q* para formar coleções de m-átomos, obtemos quase-conjuntos de objetos que não possuem identidade, no sentido que explicamos acima. Essas coleções, no entanto, sempre vão possuir um cardinal, chamado *quase-cardinal*, mas não possuem um ordinal associado. Com efeito, para enfatizar a ideia intuitiva de indiscernibilidade como independente da identidade, esses conceitos devem ser mantidos separados em *Q*, já que coleções de m-átomos não devem poder ser ordenadas ou contadas no sentido usual, uma vez que estas noções fazem uso do conceito de identidade, algo não disponível para os m-átomos. O quase-cardinal de um quase-conjunto é garantido pelos axiomas da teoria, e é denotado por um símbolo funcional unário *qc*, de modo que, dado um quase-conjunto *x*, qc(*x*) denota seu quase-cardinal, que, nos casos em que *x* é (cópia de) um conjunto clássico, coincide com a noção usual de cardinal.

A construção dos quase-conjuntos segue muito de perto o modo de proceder das teorias clássicas. Podemos obter operações entre quse-conjuntos que simulam todas as operações conhecidas nas teorias clássicas, mas devemos lembrar que agora estaremos operando também sobre coleções de m-átomos, e que isso traz diferenças. O resultado dessa “construção quase-conjuntista”, quando temos em mente a interpretação “standard” dos símbolos da teoria, é um universo de quase-conjuntos semelhante ao universo conjuntista de ZFU (veja ENDERTON, 1977, p. 7 ss.). A diferença é que, com dois tipos de átomos, esse universo estará dividido em duas partes, uma “clássica”, e outra que contém coleções de objetos que não possuem identidade, no sentido explicado acima.

Para deixar claro em *Q* que uma coleção de objetos tendo uma propriedade *P* em comum satisfaz o predicado *Z*, e assim possui em seu fecho transitivo apenas objetos clássicos, utilizamos a notação usual para descrever esta coleção, ou seja, esta será a coleção $\{x: P(x)\}$. Do mesmo modo, quando uma coleção de objetos que satisfazem uma propriedade *P* pode ter m-átomos como elementos em seu fecho transitivo, denotaremos esta coleção por $[x: P(x)]$. Esta última, em particular, pode ser uma coleção contendo apenas m-átomos, mas é importante deixar claro que estes m-átomos não precisam ser todos indiscerníveis entre si, ou seja, apesar da relação de indistinguibilidade estar definida para todos os objetos, pode acontecer de existirem diferentes tipos de m-átomos, sem que sejam indiscerníveis entre si. No entanto, isto não implica que serão diferentes, já que a identidade não está definida para este tipo de objetos, mas apenas que serão distinguíveis.

Para esclarecer como q-sets estão relacionados pela relação de indistinguibilidade, adotamos na teoria um *axioma da extensionalidade fraca*. Informalmente, o que este axioma nos garante é que q-sets x e y serão indistinguíveis quando possuírem exatamente a "mesma quantidade" de elementos do mesmo tipo (indistinguíveis entre si). A noção de "a mesma quantidade", aqui, é expressa em termos do quase-cardinal. A ideia é que podemos *quocientar* (passar o quociente) os q-sets em questão pela relação de indistinguibilidade e, dada qualquer classe de equivalência em um deles, teremos uma classe de equivalência correspondente no outro com o mesmo quase-cardinal e tal que os elementos dessas duas classes são indistinguíveis entre si. Esse é um aspecto importante da teoria que usaremos na seção seguinte.

Este axioma da extensionalidade fraca nos permite derivar em Q uma versão quase-conjuntista do postulado da não-observabilidade das permutações na mecânica quântica não-relativista. Nas teorias de conjuntos usuais, se $w \in x$, então

$$(x - \{w\}) \cup \{z\} = x \leftrightarrow z = w,$$

ou seja, só podemos trocar elementos de uma coleção sem alterá-la se trocarmos um elemento pelo mesmo elemento, devido, claro, à presença do axioma da extensionalidade. Em Q, pelo contrário, dado um m-átomo y, chamamos de y' o q-set com quase-cardinal 1 cujo elemento é um m-átomo indistinguível de y (que se pode provar existir), podemos provar o seguinte teorema:

[Permutações não são observáveis] Seja x um q-set finito tal que x não possui como elementos todos indistinguíveis de z, onde z é um m-átomo tal que $z \in x$. Se $w \equiv z$ e $w \notin x$, existe w' tal que $(x - z') \cup w' \equiv x$.

O teorema nos garante que, se x tem n elementos, e se "trocarmos" seus elementos z pelos correspondentes indistinguíveis w (ou seja, se realizamos a operação $(x - z') \cup w'$), então, o quase-conjunto resultante permanece indistinguível daquele com o qual nós começamos. Em certo sentido, não importa se estamos tratando com x ou com $(x - z') \cup w'$. Isso significa que, em Q, podemos expressar que "as permutações não são observáveis", sem introduzir postulados de simetria, como ocorre no caso do tratamento usual na mecânica quântica (na física quântica, esses postulados garantem que os resultados de medida sobre sistemas físicos não se alteram se o sistema tiver "trocados" alguns de — ou todos os — seus elementos quânticos por similares da mesma espécie).

3. Semântica quase-conjuntista para linguagens de primeira ordem

Como vimos, a teoria de quase-conjuntos é suficientemente forte para conter uma "cópia" de ZFU, e permite-nos ainda tratar de coleções de objetos indistinguíveis. Isso nos sugere, como dissemos na introdução, que podemos não apenas esboçar uma semântica que consideramos filosoficamente adequada para a lógica de Schrödinger, como se apresentava o problema original, mas que se vá um pouco mais longe, propondo-se uma maneira geral de se fazer semântica nesta metalinguagem para qualquer linguagem L de primeira ordem (e mesmo de ordens superiores, como feito para certas Lógicas de Schrödinger intensionais em Da COSTA; KRAUSE, 1997), da qual a semântica que consideramos adequada para a lógica de Schrödinger seja um caso especial. Isso fará com que qualquer linguagem de primeira ordem possa "falar" de objetos indistinguíveis, mesmo aquelas que não apresentam as restrições na sintaxe como é o caso das lógicas de Schrödinger e esta, como veremos, é apenas uma das características de nossa semântica, que é influenciada pelo fato de que, agora, nossa metalinguagem é uma teoria de quase-conjuntos. (Enfatizando que, apesar de que aqui nos restringiremos a linguagens de primeira ordem, os resultados podem ser generalizados).

A partir de agora apresentaremos em linhas gerais uma semântica no estilo de Tarski, construída na teoria de quase-conjuntos que servirá para linguagens de primeira ordem em geral. Como veremos, ela é suficientemente geral para "conter" como casos particulares a semântica usual para uma linguagem de primeira ordem, conforme aquelas feitas em ZF, quando se trata apenas com objetos "clássicos" no domínio de interpretação e também, no extremo oposto, uma semântica para linguagens que tratarão apenas de objetos indistinguíveis em seu domínio. Um meio termo será o caso de interpretações em domínios que são o que chamamos acima de q-sets usuais, como é o caso pretendido para a Lógica de Schrödinger, que contém no domínio tanto m-átomos indistinguíveis quanto elementos clássicos.

Queremos, portanto, apresentar uma maneira de interpretar uma linguagem L de primeira ordem que pode conter os seguintes símbolos lógicos e não-lógicos como primitivos:

i) Os conectivos $\rightarrow$ (implicação) e $\neg$ (negação);

ii) O quantificador universal $\forall$ (para todo);

iii) Uma coleção enumerável de variáveis individuais $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$;

iv) Uma coleção qualquer de constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$;

v) Para cada n natural, uma coleção de símbolos de predicados de peso n;

vi) O símbolo = para a identidade;

vii) Símbolos para pontuação, parênteses e vírgulas.

Como é usual, tomamos a identidade como um símbolo lógico, mas sua interpretação, como veremos, será diferente da diagonal do domínio. Além disso, os símbolos não lógicos variam de acordo com a particular teoria que se deseja. Os termos individuais serão as constantes individuais e as variáveis individuais. Para simplificar a exposição, optamos por não utilizar símbolos para funções. Os conectivos restantes, que não foram escolhidos em nossa linguagem como primitivos, podem ser definidos da maneira usual em termos dos conectivos escolhidos, assim como o quantificador existencial. Em geral, valem de modo idêntico ao clássico as definições de termos, fórmulas, ocorrência livre ou ligada de uma variável, entre outras. (As definições podem ser vistas, por exemplo, em MENDELSON, 1987, cap. 2).

Suporemos que as noções sintáticas usuais, como, por exemplo, as de demonstração e teorema, são definidas como na lógica clássica. Também suporemos que quando falarmos em uma teoria tendo por base esta lógica, estaremos nos referindo, de modo semelhante ao que faz Mendelson (1987), ao conjunto de postulados lógicos apresentados na obra citada e aos postulados não lógicos, que variam de acordo com cada teoria particular.

A interpretação será dada por uma estrutura da forma E $=_E$ <*A*, I>. Vale lembrar que estamos utilizando a teoria de quase-conjuntos como metalinguagem, e todos os conceitos que utilizarmos aqui, como os recém-mencionados de par ordenado e igualdade extensional, são os conceitos conforme definidos nesta teoria. Ademais, supomos, como usual, que nossa metalinguagem contém nomes para os símbolos e expressões da linguagem *L*. Temos então que:

i) *A* é um quase-conjunto não vazio, chamado domínio da interpretação;

ii) *I* é uma quase-função denotação, que atribui aos símbolos não-lógicos da linguagem elementos de *A* e subquase-conjuntos de *A* conforme especificado abaixo;

iii) $I(a_i) \in A$, ou seja, às constantes individuais são atribuídos elementos de *A*;

iv) $I(P^n) \subseteq A^n$, ou seja, aos símbolos de predicado de peso *n* atribuímos coleções de n-uplas ordenadas do domínio;

v) $I(=) =_E [< x, y >: x \in A \wedge y \in A \wedge x \equiv y]$

Por estarmos trabalhando na teoria de quase-conjuntos, devemos levar em conta algumas particularidades dessas cláusulas, como as seguintes.

Com relação ao domínio *A*: como se trata de q-set, pode ser de qualquer dos tipos apresentados na segunda seção anterior, ou seja, podemos escolher como domínio um q-set puro, contendo apenas m-átomos, ou um q-set que chamamos de *conjunto,* ou seja, uma cópia de um conjunto de ZFU contendo apenas objetos “clássicos”, ou então um q-set que contenha ambos os tipos de elementos.

É importante perceber que quando se tratar de q-sets clássicos teremos algo equivalente à semântica usual se aplicando à linguagem, inclusive com o símbolo de identidade valendo da maneira usual. A q-função denotação, por estarmos tratando neste caso apenas com q-sets clássicos, passa a funcionar como uma função de uma teoria de conjuntos clássica, atribuindo valores de modo unívoco aos símbolos da linguagem. Nesse caso, como é usual, cada constante individual denota um único elemento do domínio, e cada símbolo de predicados denota um subconjunto bem determinado do domínio.

O símbolo de identidade, vale a pena enfatizar, no caso de o domínio ser um q-set clássico (um conjunto no sentido usual do termo), passa a ser interpretado como identidade usual. Isso decorre da definição de igualdade extensional na teoria de quase-conjuntos, conforme a apresentamos acima, e do fato mencionado de que para os objetos *clássicos* da teoria a relação de indistinguibilidade é equivalente à identidade extensional. Como M-átomos e q-sets clássicos são os únicos elementos do domínio neste caso, devido a este resultado, recuperamos, na interpretação do símbolo de identidade, a diagonal usual, dado que na teoria de quase-conjuntos utilizada a igualdade extensional possui as propriedades da igualdade clássica.

Quando, por outro lado, o q-set domínio for um quase-conjunto puro, contendo apenas m-átomos como elementos, e se, além disso, esses forem ainda indiscerníveis, temos algumas mudanças interessantes. A nossa *quase-função* denotação atribuirá *nomes* aos elementos de *A* de maneira ambígua, pois, dadas as características de uma q-função, ainda que aqui não comentado em detalhes, notamos que será impossível determinar unicamente o elemento nomeado. (Uma q-função mapeia entidades indiscerníveis em entidades indiscerníveis, e coincide com a noção de função em seu sentido usual se há somente elementos "clássicos" envolvidos). Ou seja, um nome não mais denota de maneira inequívoca um só elemento do domínio, mas como que separa o domínio em classes de elementos indistinguíveis — passando-se o quociente pela relação de indistinguibilidade, ao se nomear um elemento de certo tipo, não é mais possível determinar qual, dentre os elementos de A daquele tipo, é aquele particular que estamos nomeando. Assim, os nomes serão aqui *nomes-tipo*, no sentido de que nomeiam elementos de certo tipo no domínio apenas, mas não indivíduos específicos. Ademais, se dois nomes distintos forem atribuídos a elementos que não são indistinguíveis, então eles determinam, seguindo nossa analogia, classes disjuntas de elementos de A, como no caso clássico.

Ainda no caso em que o domínio de interpretação é um q-set puro cujos elementos são indiscerníveis, com relação à extensão dos predicados, deve-se notar nova peculiaridade desta semântica. Estão associados a cada símbolo de predicado de peso n da linguagem subconjuntos de n-uplas do domínio. No entanto, podem existir outros subqsets de A indistinguíveis deste particular q-set denotado (seus elementos seriam indiscerníveis daqueles, e eles tendo o mesmo quase-cardinal). O mais interessante é que qualquer desses q-sets indiscerníveis pode servir como denotação do predicado (há aqui uma inversão com o que acontece com a semântica usual, na qual uma dada extensão pode ter várias intensões; aqui uma dada "intensão" — um dado símbolo de predicados da linguagem — pode ter associados a si vários q-sets com o suas extensões). Para captarmos nossas intuições sobre a relação entre os símbolos de predicados e suas possíveis interpretações como extensões na MQ, teremos que garantir que, dado qualquer dos q-sets indistinguíveis da extensão associada a um símbolo de predicado n-ário P^n, este q-set poderia também fazer o papel de extensão de P^n. A ideia básica é que, se aceitarmos que em contextos envolvendo objetos indistinguíveis as permutações de objetos indistinguíveis não são observáveis, teremos que, permutando elementos da extensão de um predicado, nada altera o valor de verdade da sentença em questão. Esse tipo de resultado depende fortemente de características de nossa metalinguagem, em particular, do Axioma de Extensionalidade Fraca, que apresentamos acima. Em breve, quando definirmos a relação de satisfação de uma fórmula por uma seqüencia de objetos do domínio, voltaremos a discutir este ponto.

Com relação ao símbolo de identidade, ele passa, neste caso particular em que o domínio é um q-set puro, a representar não mais a identidade usual, mas a relação de indistinguibilidade. Como vimos, a relação representada pelo símbolo = se manterá entre elementos indistinguíveis do domínio, que não precisam ser numericamente idênticos (se é que faz algum sentido falar em objetos idênticos neste caso). Há ainda um paralelo interessante com a interpretação clássica do símbolo =, relacionado com o que explicamos acima sobre a extensão de símbolos de predicados, de que permutações de objetos indistinguíveis na extensão não devem alterar o valor de verdade da sentença. Explicaremos apenas intuitivamente, mas isso pode ser mostrado com rigor quando a definição de satisfazibilidade for introduzida. No caso clássico, se $a_i = a_j$ for verdadeira em uma interpretação E, então, dado um símbolo de propriedade unária P, por exemplo, teremos que $P(a_i)$ é verdadeira se e somente se $P(a_j)$ é verdadeira, já que os dois nomes são nomes da mesma entidade por hipótese. No nosso caso, quando tratamos de m-átomos no domínio, o mesmo ainda se mantém, ou seja, se $a_i = a_j$ é verdadeira na interpretação, teremos que os objetos denotados por uma das constantes são denotados pela outra também, então, P(a_i) se e somente se P(a_j), pois agora temos que se as constantes nomeiam objetos que são indistinguíveis, então há um q-set que faz o papel de extensão de P tal que I(a_i) está neste q-set, e, assim, haverá também um q-set indistinguível de I(P) tal que I(a_j) está neste q-set (basta, por exemplo, permutarmos I(a_i) por I(a_j)), e como este último também faz o papel de extensão de P, temos P(a_j). É claro que ainda não dissemos nada sobre a verdade, mas estamos apenas dando uma interpretação intuitiva dessa característica de nossa semântica.

Essa situação pode parecer estranha quando se considera que a indistinguibilidade não é uma congruência, mas podemos explicar o fato da seguinte maneira, supondo por simplicidade que P é símbolo de predicado unário: intuitivamente, se a_i e a_j nomeiam elementos indistinguíveis do domínio, e o elemento nomeado por a_i (estamos supondo, para simplificar a explicação, que podemos fixar um elemento de *A* como a denotação de a_i e "outro" como denotação de a_j) está na extensão de P, então existe um q-set indistinguível desta extensão que possui como elemento a denotação de a_j, de modo que a função denotação atribui ambiguamente (pelo menos) esses dois q-sets indistinguíveis como denotação de P, conforme explicamos anteriormente.

Quando no domínio tivermos um q-set usual, ou seja, contendo tanto m-átomos quanto objetos clássicos, aplicam-se considerações similares às que foram apresentadas anteriormente, com algumas restrições simples, que podem ser compreendidas a partir do que já se explicou para os casos anteriores.

Agora, como é usual ao apresentarmos uma semântica, vamos definir uma relação de satisfazibilidade. Antes, precisamos definir a noção de atribuição de valores para variáveis livres de uma fórmula.

Uma q-função *s* do conjunto de variáveis no domínio *A* de interpretação é dita uma *q-função atribuição*, ou seja, *s* é uma q-função tal que, para qualquer variável x_i temos que $s(x_i) \in A$. A seguir, queremos estender uma q-função atribuição qualquer ao conjunto de todos os termos individuais, obtendo assim o que chamaremos de q-função interpretação. Uma *q-função interpretação s* relativa à atribuição s* é uma q-função do conjunto dos termos individuais de *L* em *A* tal que para qualquer variável individual x_i, $s^*(x_i) \equiv s(x_i)$, e para qualquer constante individual a_i, temos que $s^*(a_i) \equiv I(a_i)$, onde, lembremos, *I* é a q-função denotação da estrutura.

Deve-se notar que não podemos utilizar o símbolo de identidade nas definições acima, pois, em alguns casos, quando houver m-átomos no domínio *A*, a identidade não está definida para todos os elementos de *A*. Assim, não podemos garantir, nestes casos envolvendo m-átomos, que a q-função interpretação denotará *exatamente* o mesmo elemento que a q-função atribuição, no caso das constantes individuais, ou no caso das variáveis, mas podemos garantir que serão elementos do mesmo tipo (indiscerníveis entre eles), e isto é tudo o que precisamos.

Agora, definiremos a relação de satisfação de uma fórmula por uma q-função interpretação s^*. Nesta definição, usaremos na cláusula para o quantificador a noção de uma q-função interpretação s^* diferir de outra interpretação s'^* no máximo em uma variável x_i, significando que, para qualquer variável x_j distinta de x_i, temos que $s^*(x_j) \equiv s'^*(x_j)$, e que esta condição pode eventualmente não ocorrer para a variável x_i, ou seja, as duas interpretações podem diferir no tipo de objeto atribuído a x_i, mas esta possibilidade vale apenas para x_i.

As seguintes cláusulas definem quando uma *fórmula* **F** *é satisfeita por uma q-função interpretação s**:

i) Se **F** é da forma $t_i = t_j$, para termos individuais t_i e t_j, s^* satisfaz **F** se e somente se $s^*(t_i) \equiv s^*(t_j)$;

ii) Se **F** é da forma $P^n(t_1, ..., t_n)$, onde P^n é símbolo de predicado n-ário e os t_i são termos individuais, então s^* satisfaz **F** se e somente se existe um subqset de A^n indistinguível de $I(P^n)$ tal que $< s^*(t_1), ..., s^*(t_n) >$ pertence a este q-set;

iii) Se **F** é da forma $\neg B$, então s^* satisfaz **F** se e somente se s^* não satisfaz B;

iv) Se **F** é da forma $B \rightarrow C$, então s^* satisfaz **F** se e somente se s^* não satisfaz B ou s^* satisfaz C;

v) Se **F** é da forma $\forall x_i B(x_i)$, então s^* satisfaz **F** se e somente se toda s'^* que difere de s^* no máximo em x_i é tal que s'^* satisfaz B.

A cláusula 2 merece alguns comentários, pois desempenha papel fundamental na formalização das intuições que começamos a comentar na interpretação do símbolo de predicados. Como dissemos anteriormente, em contextos envolvendo partículas indistinguíveis, a relação entre o símbolo de predicado e a sua extensão é diferente do caso clássico. Aqui, dado um predicado de peso n, ao qual atribuímos um subqset de A^n como extensão, teremos que, para qualquer permutação dos elementos dessa extensão por uma n-upla indistinguível, o valor de verdade da sentença sendo avaliada não deverá ser alterado. Como se pode perceber, caso a extensão do símbolo de predicado em questão seja um q-set clássico, então sempre vamos recair no caso usual, pois neste caso a indistinguibilidade é equivalente à identidade, e teremos que há um único subqset de A^n que é a extensão do símbolo de predicados em questão.

Dada a definição de satisfazibilidade, podemos definir a noção de verdade em uma estrutura E. Uma fórmula **F** será verdadeira na estrutura $E =_E < A, I >$ se e somente se toda q-função interpretação s^* satisfaz **F**. Usaremos a notação $E \models$ **F** para indicar que **F** é verdadeira em E.

Convencionamos também que uma fórmula aberta é verdadeira se e somente se seu fecho o for, utilizando 'fecho' no sentido usual da palavra. A partir daqui pode-se definir da maneira usual outros conceitos semânticos, como modelo de um conjunto de sentenças, consequência semântica, fórmula válida, entre outros.

É importante notar que facilmente se prova que algum conjunto de axiomas usualmente propostos para a lógica da qual estamos tratando é composto de fórmulas válidas, e que as regras de inferência, quando aplicadas a fórmulas válidas, geram novas fórmulas válidas. Daí se segue imediatamente, e de modo muito similar ao usual, o seguinte

[Teorema da Correção] Se **F** é teorema, então **F** é válida com relação à semântica proposta acima.

Outro ponto a ser observado é que a semântica clássica é um caso particular da semântica que propomos. Assim, a demonstração do *Teorema de Completude* pode ser realizada exatamente como se faz usualmente por meio do *Teorema de Henkin*, segundo o qual toda teoria consistente possui modelo.

Um corolário que podemos derivar das observações acima é que, na construção de um modelo para qualquer conjunto consistente de fórmulas, teremos que há uma estrutura, a estrutura dos termos, que é modelo das sentenças. Assim, em particular, qualquer conjunto de sentenças consistente possui um modelo clássico, ou, como preferimos chamar, um modelo normal. Além disso, através de um procedimento semelhante ao usado na demonstração do teorema da completude, podemos obter, dada uma estrutura E, uma estrutura E' tal que vale o seguinte:

[Teorema do Modelos Normais] Dada E $=_E < A, I >$ na qual interpretamos L, existe pelo menos uma estrutura normal E' $=_E < A', I' >$ na qual se pode interpretar L e tal que para qualquer sentença $\mathbf{F}$ da linguagem temos E $\models \mathbf{F}$ se e somente se E' $\models \mathbf{F}$.

Assim, sempre podemos fornecer, para qualquer conjunto de fórmulas de L, uma interpretação na qual o domínio de interpretação é composto apenas por objetos clássicos. Isso será importante na seção seguinte, na qual discutiremos a relação entre semântica e ontologia, baseando-nos nas propostas de Quine (1948).

Antes de passarmos para a próxima seção, vamos mencionar mais um resultado que pode ser derivado da semântica proposta acima.

Na semântica usual, feita em uma teoria de conjuntos “padrão” como Zermelo-Fraenkel, podemos fixar o cardinal de uma interpretação com domínio finito por meio de certas fórmulas. Por exemplo, para a teoria cujo vocabulário não lógico é vazio, e que consiste somente na fórmula $\exists x \exists y(x \neq y \wedge$ “$z (z = x \vee z = y))$, teremos que qualquer modelo terá apenas dois elementos. Esse raciocínio pode ser generalizado para teorias com apenas n elementos, para qualquer n finito. Por simplicidade, trataremos apenas do caso n = 2. Como é sabido, podemos provar que essas teorias serão categóricas para n fixado, e na lógica de primeira ordem com semântica clássica, teremos que apenas as teorias que possuem apenas modelos com domínio finito serão categóricas. Esse resultado pode ser entendido com o uso dos chamados teoremas de Löwenheim-Skolem ascendentes, que nos garantem que se uma teoria possui modelos com domínio de cardinalidade infinita, então possuirão modelos cujos domínios são de qualquer cardinalidade infinita superior a esta.

Em nossa semântica, no entanto, teremos que nem mesmo as teorias que possuem modelo finito serão categóricas. Note que, para que tenhamos um modelo da sentença acima em nossa semântica, basta que tenhamos um q-set domínio com dois objetos de tipos diferentes, podendo ser até mesmo dois m-átomos que não são indistinguíveis. Para fixar ideias, vamos supor que temos um *M*-átomo e um m-átomo no domínio. Este conjunto será um modelo da sentença acima, pois existem dois objetos que se distinguem, e, para qualquer outro objeto, ele é indistinguível ou de um, ou do outro elemento do domínio.

No entanto, considere agora um domínio com dois m-átomos indistinguíveis e um M-átomo. Este q-set possui cardinalidade 3, e ainda assim pode ser usado para definir um modelo da sentença. A sentença afirma que existem objetos indistinguíveis, e que, dado qualquer outro objeto do domínio, este será indistinguível do M-átomo ou do m-átomo, o que de fato ocorre. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para obter-se modelos dessa mesma sentença com n objetos, com n maior que 1, bastando que eles se dividam em duas classes disjuntas de objetos indistinguíveis.

Apesar de interessante, não vamos continuar explorando esses resultados aqui, e passaremos agora para a discussão da relação entre a semântica proposta e a ontologia.

4. Semântica e comprometimento ontológico

É amplamente conhecido o critério de compromisso ontológico de uma teoria proposto por Quine. De acordo com tal critério, para estabelecermos quais são as entidades com as quais nos comprometeremos ao adotar uma teoria (estamos aqui falando por alto, sem querer comprometer-nos com uma análise exegética das propostas de Quine), devemos primeiro formalizar essa teoria em uma linguagem de primeira ordem, ou seja, regimentar a linguagem da teoria, e, feito isso, a teoria compromete-nos com as entidades que devem estar no domínio de interpretação e ser valores das variáveis de modo que tornassem verdadeiras as fórmulas quantificadas existencialmente da teoria (veja também CHATEAUBRIAND, 2003).

Lembremos que uma das motivações para fazer-se semântica para linguagens de primeira ordem em uma teoria de quase-conjuntos era a possibilidade de termos no domínio de interpretação objetos para os quais a teoria da identidade clássica não se aplica, e que podem ser indistinguíveis, mas não idênticos, objetos estes também chamados de *não indivíduos* na literatura sobre o assunto (FRENCH; KRAUSE, 2006). Ora, flexibilizando o critério de Quine para abarcar também o caso em que a semântica esteja elaborada em uma metalinguagem como a teoria de quase-conjuntos, podemos ter compromisso ontológico com não indivíduos, pois esses objetos agora podem ser valores de variáveis ligadas. Assim, o famoso *slogan* de Quine, de que não há entidades sem identidade poderia ser violado (cf. KRAUSE, 2008).

No entanto, o que os teoremas anteriores parecem sugerir é que, ainda assim, sempre podemos obter uma interpretação clássica para a teoria, ou seja, uma ontologia de não indivíduos pode sempre ser dispensada em favor de uma ontologia de indivíduos.

O caso é similar a uma situação que ocorre na semântica clássica (e que também pode ocorrer na semântica apresentada aqui), em que, segundo uma versão do teorema de Löwenheim-Skolem descendente, podemos sempre garantir a existência de um modelo de cardinalidade $\aleph_0$ para uma teoria de primeira ordem T, caso T tenha modelos cujos domínios são de cardinalidade infinita, e considerando sempre que estamos tratando com linguagens que possuem uma quantidade enumerável de símbolos. Ou seja, aparentemente, sempre podemos ficar com uma ontologia de no máximo $\aleph_0$ objetos. Do mesmo modo, o que ocorre aqui é que nossos teoremas garantem que sempre podemos obter uma ontologia de indivíduos. Note que não estamos querendo dizer com isso que não existam não indivíduos, mas sim que, de um ponto de vista do resultado anterior, estes são dispensáveis nesses contextos, e a necessidade ou vantagem de utilização de modelos cujos elementos são não indivíduos deve ser baseada em argumentação filosófica, embasada em concepções ontológicas prévias.

Para tornar mais claro o que queremos dizer com respeito aos modelos cujos domínios são não indivíduos, podemos ilustrar a situação com outra versão do teorema de Löwenheim-Skolem. Segundo essa versão, se uma teoria possui modelos de cardinalidade infinita, então possui um modelo que lhe é elementarmente equivalente e cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Isso significa que sempre podemos obter um modelo cuja ontologia é constituída pelos números naturais, considerando novamente que estamos tratando apenas com linguagens com uma quantidade enumerável de símbolos. Evidentemente, não estamos em geral dispostos a admitir que tudo o que há são números, e temos de garantir que, apesar de matematicamente possível, a ontologia de grande parte de nossas teorias científicas não é uma ontologia de números (estamos concedendo, para efeitos de argumentação, que pelo menos algumas de nossas teorias científicas relevantes podem ser escritas da forma que Quine propõe, sabendo que se trata de concessão ilusória no que diz respeito a muitas das teorias físicas atuais).

O mesmo que ocorre com a ontologia de números ocorre aqui com a ontologia clássica, ou ontologia de indivíduos. Apesar de ser sempre matematicamente possível, nossas convicções podem ser tais que não acreditamos ou não aceitamos que apenas indivíduos sejam suficientes para a compreensão correta de nossas teorias atuais. Não é preciso ir longe para encontrar proponentes de tais concepções, bastando recordar a posição de Schrödinger, por exemplo, como vimos acima brevemente, ao apresentarmos as motivações para as lógicas de Schrödinger. Na verdade, há um grande número de filósofos da física segundo os quais as entidades quânticas são certo tipo de não indivíduos, mas este não é o momento para apresentar argumentos a favor dessa concepção (no entanto, ver FRENCH; KRAUSE, 2006, para uma discussão, ainda que esses autores salientem também a possibilidade de uma interpretação dos objetos quânticos como indivíduos — ver abaixo). O que a nossa discussão corrobora é que a ontologia, em particular nos casos das teorias físicas atuais, terá que ser determinada em grande parte por argumentos metafísicos.

Esse tipo de resultado está em conformidade com a situação atual da discussão relativamente à ontologia da mecânica quântica não relativista. O formalismo da teoria, conforme se argumenta em French e Krause (2006, cap. 4), não determina a ontologia, de forma que não podemos decidir se estamos tratando com indivíduos ou não indivíduos apenas examinando a teoria. Assim, é preciso tomar uma posição metafísica e argumentar a seu favor em um terreno filosófico, uma vez que a própria teoria quântica não decide a questão. Do mesmo modo, a nossa semântica corrobora essa opinião, pois não permite decidir em geral que tipo de ontologia devemos ter; sabemos que podemos ter uma ontologia de indivíduos, e também que podemos comprometer-nos legitimamente com não indivíduos, mas esta questão não pode ser decidida pela lógica. Isso reflete perfeitamente bem, acreditamos, o que Steven French batizou de *subdeterminação da metafísica pela física* (ver FRENCH, 1998; e FRENCH; KRAUSE, 2006).

5. Conclusão

Conforme discutimos neste artigo, podemos flexibilizar o critério de comprometimento ontológico proposto por Quine de modo que permitisse que entidades sem identidade sejam elementos do domínio de quantificação. Com isso, podemos comprometer-nos ontologicamente com esse tipo de entidades. No entanto, a razoabilidade de adotar-se uma ontologia de indivíduos ou de não indivíduos vai depender de argumentos metafísicos, pois, como é bastante discutido na literatura sobre filosofia da física, a própria mecânica quântica não relativista não nos impõe nenhuma das duas ontologias, e esse fato é refletido na nossa semântica, ao mostrarmos que sempre podemos fornecer uma interpretação na qual a teoria trata apenas com objetos clássicos. A possibilidade de comprometermo-nos ontologicamente com não indivíduos, no entanto, é mais um ponto a favor dessa opção, que parece ser, para muitos estudiosos, a mais natural quando se deseja compreender o que a teoria nos diz sobre o mundo.

6. Bibliografia

CHATEAUBRIAND, O. (2003) Quine on ontology. *Principia*, v. 7, n. 1-2, p. 41-74.

Da COSTA, N. C. A. (1980) *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. São Paulo, Hucitec/EdUSP [2. ed., 1994].

Da COSTA, N. C. A. (1999) *O conhecimento científico*. São Paulo, Discurso Editorial.

Da COSTA, N. C. A.; KRAUSE, D. (1994) Schrödinger logics. *Studia Logica*, v. 53, n. 4, p. 533-550.

Da COSTA, N. C. A.; KRAUSE, D. (1997) An Intensional Schrödinger Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 38, n. 2, p. 179-194.

Da COSTA, N. C. A.; BUENO, O. (2009) Lógicas não-reflexivas. *Revista Brasileira de Filosofia*, v. 58, n. 232, p. 181-196.

ENDERTON, H. B. (1977) *Elements of Set Theory*. New York; San Francisco; London: Academic Press.

FRENCH, S. (1998) On the Withering Away of Physical Objects. In: E. Castellani (ed.). *Interpreting Bodies*: Classical and Quantum Objects in Modern Physics. Princeton, New Jersey, NJ: Princeton University Press. p. 93-113.

FRENCH, S.; KRAUSE, D. (2006) *Identity in Physics*: A Historical, Philosophical, and Formal Analysis. Oxford: Oxford University Press.

KRAUSE, D. (1990) *Não-reflexividade, indistinguibilidade e agregados de Weyl*. Tese (Doutorado em filosofia), Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.

KRAUSE, D. (1992) On a Quasi-set Theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 33, n. 3, p. 402-411.

KRAUSE, D. (2008) Nota sobre o comprometimento ontológico com não-indivíduos. In: MARTINS, R. A. et al. (eds.). *Filosofia e história da ciência do Cone Sul ¾ Seleção de Trabalhos do 5º. Encontro*. Campinas: AFHIC (Associação de Filosofia e História da Ciência do Cone Sul). p. 125-132.

MENDELSON, E. (1987) *Introduction to Mathematical Logic*. 3. ed. Wadsworth & Brooks.

QUINE, W. v. O. (1948) On What There Is. *Review of Metaphysics*, v. 2**,** p. 21-38.

SCHRÖDINGER, E. (1952) *Science and Humanism*. Cambridge: Cambridge University Press.

Endereços / *Addresses*

Jonas R. Becker Arenhart
Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Filosofia
Florianópolis – SC
C. Postal: 476
CEP: 88040-900

Décio Krause
Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Filosofia
Florianópolis – SC
C. Postal: 476
CEP: 88040-900

Data de recebimento: 10/6/2009
Data de aprovação: 15/9/2009