Cogito ergo sum non machina! Sobre o Reconhecimento Humano de Verdades da Aritmética e Máquinas de Turing

Cogito ergo sum non machina! *On the Human Recognition of Truths in Arithmetic and Turing Machines*

Ricardo Pereira Tassinari[1]
Departamento de Filosofia
Universidade Estadual Paulista - UNESP / Campus Marília – SP
ricardo@marilia.unesp.br

Itala M. Loffredo D'Ottaviano
Grupo de Lógica Teórica e Aplicada
Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência
Departamento de Filosofia
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP – SP
itala@cle.unicamp.br

Resumo: O objetivo deste artigo é discutir sobre a existência de limites para a possibilidade de modelagem do comportamento humano por sistemas formais ou algoritmos computacionais. Mais especificamente, o artigo trata da impossibilidade de modelagem completa por algoritmos ou teorias formais da capacidade humana de estabelecer a veracidade de fórmulas da aritmética de primeira ordem. A resposta aqui apresentada, baseada em uma nova análise feita a partir do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel, busca apresentar o porquê e como esse teorema implica na impossibilidade de construção de tal modelagem.

Palavras-chave: Sistemas formais. Algoritmos. Teoremas de Gödel.

Abstract: *The objective of this paper is to discuss the existence of limits in the possibility of modeling human behavior by formal system or computational algorisms. More specifically, we will discuss herein the impossibility of completely modeling by algorisms or formal theories the human capability of establishing the truth of first order arithmetical formula. The answer exposed here is based on a new analysis of the consequences of Gödel's First*

[1] Este artigo corresponde a parte dos resultados da Tese de Doutorado Incompletude e auto-organização: sobre a determinação de verdades lógicas e matemáticas do primeiro autor, sob a orientação do segundo, defendida no Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da UNICAMP, em dezembro de 2003.

Incompleteness Theorem and we will show here why and how this Theorem implies the impossibility of such a modelling.

Keywords: *Formal systems. Algorithms. Gödel's theorems.*

1. Introdução

Conhece-te a ti mesmo!

Podemos expressar por teorias formais, ou modelar por algoritmos, de forma completa, a capacidade humana de identificar verdades aritméticas? Alguns autores, como Lucas (1961) e Penrose (1989; 1995), insistem em que a resposta a essa questão é negativa. Penrose (1989; 1995) busca argumentar a favor da não mecanicidade do pensar humano, a partir de uma extensa análise do Problema da Parada. Lucas (1961) busca mostrar a impossibilidade de simular-se a capacidade humana de reconhecimento de verdades aritméticas, não de forma direta, mas a partir de um "esquema de refutação": dado um programa computacional qualquer que avalie verdades da aritmética tal como os seres humanos conseguiriam fazer, Lucas mostra como se pode utilizar o Primeiro Teorema de Gödel para exibir-se uma fórmula que deveria ser reconhecida como verdadeira, mas não estaria dentro desse modelo. Porém, será que podemos apresentar, de forma mais resumida que a de Penrose (1989; 1995) e de uma forma mais direta que a de Lucas (1961), uma resposta à questão inicial? É o que buscamos desenvolver no presente trabalho.

A perspectiva aqui adotada é a de um teórico que visa descrever por algoritmos ou teorias formais a capacidade cognitiva humana, a quem a questão inicial necessariamente se coloca. Trata-se, assim, da análise de algumas das formas em que se apresenta a capacidade humana de verificação de fórmulas da aritmética de primeira ordem[2], a partir de uma análise epistemológica e metamatemática, e de saber se essa forma pode ser expressa por uma teoria formalizada ou modelada por um algoritmo.

A primeira dificuldade para responder à questão proposta é a de definir o que seja a capacidade humana de verificação de uma fórmula da aritmética de primeira ordem. Podemos, de início, admitir que a questão surge no âmbito da Lógica Matemática, ou mais exatamente, da Metamatemática, já que é nesse contexto em que são definidas as teorias aritméticas de primeira ordem. Nesse caso, temos uma definição precisa do que seja a veracidade de uma fórmula, introduzida rigorosamente por Tarski (em 1936-7, cf. tradução em 1983) e utilizada comumente nos livros introdutórios de Lógica Matemática. Entretanto, não temos, à primeira vista, uma definição do que seja *a capacidade humana* de reconhecimento da veracidade, segundo a definição tarskiana, de uma fórmula da aritmética de primeira ordem.

---

[2] Entendemos, neste trabalho, que uma fórmula da aritmética de primeira ordem é uma fórmula da linguagem da aritmética de primeira ordem cujos símbolos não lógicos são: a constante 0 (que representa o zero); o símbolo de função unário S (que representa a função sucessor); os símbolos de função binários + e . (representando as operações soma e multiplicação); e os predicados binários < e = (representando a relação menor que e a igualdade). Para detalhes, cf. TASSINARI, 2003, p.36-37.

Por outro lado, para o teórico que se coloca a questão do que seja o reconhecimento da veracidade de uma fórmula da aritmética de primeira ordem, a questão pode ser analisada a partir de casos em que se consegue, em princípio, determinar o valor de verdade das fórmulas. Por exemplo, em princípio, o teórico sabe que se poderia determinar a veracidade de qualquer fórmula fechada livre de quantificadores: basta fazer o cálculo estabelecido pelas funções sucessor, adição e multiplicação sobre os termos aos quais elas se aplicam, caso as funções apareçam na fórmula dada, e verificar a igualdade do resultado desses cálculos.

Notemos que a consideração da capacidade humana de verificação de fórmulas da aritmética de primeira ordem, tomada *em princípio*, exclui as limitações de memória e de tempo para realizar-se a verificação, pois, como se está buscando expressar essa capacidade por teorias formais ou por algoritmos computacionais, podemos supor haver tanto espaço e tempo quanto o necessário, como se supõe ocorrer na execução ideal de um programa ou na dedução ideal de teoremas de teorias. A posição aqui é clara: como se trata de averiguar se, *em princípio*, é possível uma modelagem da capacidade humana de verificação de fórmulas, como, *em princípio*, não existe um limite máximo de passos *para todas* as demonstrações em uma teoria e como, também, *em princípio*, uma máquina de Turing ideal pode executar um algoritmo tendo tanta memória e tempo quanto precisar (cf. TURING, 1965), então assumiremos que, *em princípio*, dispomos de tanta memória e tempo quanto precisarmos para averiguar a veracidade de uma fórmula.

Assim, o contexto em que se coloca a reflexão sobre a capacidade humana de estabelecer verdades da aritmética de primeira ordem e de sua comparação com as possibilidades de dedução em um sistema formal ou com as possibilidades permitidas por algoritmos é o contexto metamatemático, no qual o Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel constitui um dos resultados mais importantes. De uma forma geral, trata-se do como se faz Matemática, ou melhor, uma pequena parte dela, a que se expressa na linguagem da aritmética de primeira ordem. É, portanto, a partir de análises *epistemológicas e metamatemáticas* sobre as implicações do Primeiro Teorema de Gödel para o fazer Matemática, que os argumentos gödelianos, aqui apresentados, são utilizados para buscar mostrar que máquinas de Turing não podem fazer Matemática como (pelo menos alguns) seres humanos o fazem, ou, ainda, que existe algo no fazer Matemática que não é mecânico no sentido de Turing.

2. A Impossibilidade de Teorias Formais Completas em Relação ao Reconhecimento de Verdades da Aritmética de Primeira Ordem

> *Note that the results mentioned in this postscript do not establish any bounds for the powers of human reason, but rather for the potentialities of pure formalism in mathematics.* Gödel (1965, p. 72-73)[3]

[3] Notemos que os resultados mencionados neste pós-escrito não estabelecem nenhuma fronteira para os poderes da razão humana, mas antes para as potencialidades do puro formalismo em matemática.

Em um primeiro momento, podemos tentar verificar se se pode construir uma teoria formal **T** de primeira ordem cujos teoremas sejam exatamente as fórmulas que podem ser reconhecidas, em princípio, por seres humanos, como verdadeiras, no Modelo Padrão dos Números Naturais.[4] Para simplificar a exposição, consideremos a seguinte convenção.

Convenção de Notação. Se **A** é uma fórmula da aritmética de primeira ordem, denotamos por $\boldsymbol{\psi}$**(A)** o fato de a fórmula **A** ser verdadeira no Modelo Padrão dos Números Naturais *e poder ser* reconhecida como tal, em princípio, por um lógico ou matemático.

Notemos, então, que "$\boldsymbol{\psi}$" denota um predicado unário da Metamatemática. Além disso, admitimos que $\boldsymbol{\psi}$ é um predicado parcial, ou seja, não precisa estar definido para toda fórmula **A** da linguagem da aritmética de primeira ordem, o que equivale a dizer que não consideramos ser obrigatório o reconhecimento da veracidade ou falsidade de todas as fórmulas da aritmética de primeira ordem.

Consideremos, então, a seguinte versão do Metateorema da Incompletude de Gödel:

Metateorema de Gödel. Se **T** é uma teoria formal axiomática consistente dos números naturais, cuja linguagem é uma extensão da linguagem da aritmética de primeira ordem e na qual as funções recursivas são representáveis, então existe e se pode exibir uma fórmula $\mathbf{G_T}$ de primeira ordem, tal que:

(1) $\mathbf{G_T}$ é verdadeira no Modelo Padrão dos Números Naturais;

(2) $\mathbf{G_T}$ não é teorema de **T**.

Notemos que a fórmula $\mathbf{G_T}$ tem a forma:[5]

$$\Pi v\, [\sim B(v,\ S(w,\ w))]$$

na qual $\boldsymbol{\Pi}$ é o quantificador universal, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são variáveis individuais, $\boldsymbol{B}$ é um símbolo de predicado binário e $\boldsymbol{S}$ é um símbolo de função binária que designam, respectivamente, a relação $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ recursiva primitiva e a função $\boldsymbol{\gamma}$ recursiva primitiva, definidas em Gödel (1965) e das quais falaremos mais adiante. Assim, $\mathbf{G_T}$ é uma fórmula de primeira ordem. Notemos que, tal como são definidas, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ é uma relação entre números naturais e $\boldsymbol{\gamma}$ é uma função de pares de números em números (e não uma relação entre fórmulas e uma função de pares de fórmulas em fórmulas, respectivamente, como alguns costumam erroneamente pensar), definidas por meio de composição e recursão primitiva das funções constantes, projeções e sucessor.

Na demonstração do teorema, Gödel mostra: (1) que a cada fórmula se pode associar um número, hoje chamado *número de Gödel da fórmula*; (2) que a cada sequência de fórmulas se pode também associar um número, hoje chamado de *número*

[4] O Modelo Padrão dos Números Naturais é a estrutura para a linguagem aritmética de primeira ordem cujo domínio são os números naturais e na qual os símbolos 0, S , +, . , < e = são interpretados da forma usual.

[5] Conservaremos, aqui, os símbolos usados por Gödel (1965), cujo significado é indicado a seguir.

de Gödel da sequência de fórmulas; (3) que a relação $\mathcal{B}$ recursiva primitiva, designada no sistema formal por B, é tal que $\mathcal{B}(x, y)$ ocorre entre os números x e y se, e somente se, x é o número da sequência de fórmulas que constitui uma demonstração da fórmula cujo número é y; e (4) que a função recursiva primitiva γ, designada no sistema por S, é tal que, dados dois números x e y, seu resultado $\gamma(x, y)$ é o número de Gödel da fórmula que resulta de se substituir, na fórmula de número x, todas as ocorrências livres da variável w pelo termo que é o numeral que representa o número y.

A partir daí, denotando por z_p o numeral, no sistema formal, que representa o número p, introduzido a seguir, Gödel (1965, p 60) conclui:

> Seja $U(w)$ a fórmula $\Pi v[\sim B(v, S(w, w))]$ e seja p o número de $U(w)$. Assim, $U(z_p)$ é a fórmula que resulta de substituirmos todas as ocorrências livres de w por z_p, na fórmula cujo número é p, e, então, tem o número $\gamma(p, p)$. Assim, se $U(z_p)$ é demonstrável, existe um k tal que $k\mathcal{B}\gamma(p, p)$. Mas, desde que $S(u, v)$ representa $\gamma(p, p)$ e $B(u, v)$ representa $x\mathbf{B}y$, segue que $B(z_k, S(z_p, z_p))$ é demonstrável. É uma propriedade de nosso sistema, também, que, se $\mathbf{P}\, v\, F(v)$ é demonstrável, então $F(z_l)$ é demonstrável para todo l; conseqüentemente, se $U(z_p)$ é demonstrável, $\sim B(z_k, S(z_p, z_p))$, bem como $B(z_k, S(z_p, z_p))$, é demonstrável, e o sistema contém uma contradição. Portanto, concluímos que $U(z_p)$ não pode ser demonstrado a menos que o sistema contenha uma contradição.

Interpretando a fórmula de Gödel $\Pi v[\sim B(v, S(w, w))]$, temos que $\Pi v[\sim B(v, S(w, w))]$ ocorre se, e somente se, não existe um número de Gödel k tal que $k\mathcal{B}\gamma(p, p)$, o que equivale a afirmar que não existe demonstração, no sistema formal considerado, da fórmula de número de Gödel p. Ora, essa é a própria fórmula de Gödel $\Pi v[\sim B(v, S(w, w))]$, assim, se o sistema for consistente, sua veracidade equivale à sua indemonstrabilidade no sistema. Logo, se o sistema é consistente, a fórmula de Gödel é verdadeira e indemonstrável no sistema.

De nossa compreensão dessa demonstração do Primeiro Teorema de Gödel, podemos dizer que, em princípio, se conseguimos reconhecer que uma teoria **T** é consistente, então conseguimos reconhecer que a fórmula de Gödel $\mathbf{G_T}$ é verdadeira.

Por outro lado, por um resultado simples da Teoria de Modelos, temos que se uma teoria **T** tem modelo, i.e., se seus axiomas são verdadeiros em uma estrutura para a linguagem de **T**, então **T** é consistente. Ora, por esse resultado, temos que, se reconhecemos que os axiomas de uma teoria aritmética **T** são verdadeiros no Modelo Padrão dos Números Naturais, então reconhecemos que **T** é consistente. Assim, combinando esse resultado com a análise da demonstração do Primeiro Teorema de Gödel feita acima, temos que, se reconhecemos que todo axioma **A** de uma teoria aritmética **T** é verdadeiro no Modelo Padrão dos Números Naturais, i.e., $\psi(\mathbf{A})$, então reconhecemos que **T** é consistente e, daí, reconhecemos que $\mathbf{G_T}$ é verdadeira no Modelo Padrão dos Números Naturais, i.e. $\psi(\mathbf{G_T})$.

Podemos então admitir que, em relação ao problema principal desta seção, que consiste em exibir uma teoria axiomática **T** cujos teoremas são todas as fórmulas que reconhecemos como verdadeiras, a capacidade humana de reconhecer verdades aritméticas, representadada pelo predicado ψ, segue o seguinte princípio:

Princípio de Gödel-Autossuperação. Dada uma teoria **T** axiomática sobre os números naturais, cuja linguagem seja uma extensão da linguagem da aritmética de primeira ordem, na qual as funções recursivas são representáveis, tal que $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{A})$ para todo axioma **A** de **T**, então existe, e podemos, em princípio, exibir, uma fórmula $\mathbf{G_T}$ de primeira ordem, tal que:

(1) $\mathbf{y}(\mathbf{G_T})$;

(2) $\mathbf{G_T}$ não é teorema de **T**.

Desse principio segue, então, a resposta à nossa questão inicial.

Consequência 1 do Princípio de Gödel-Autossuperação. Não existe uma teoria **T** axiomática sobre os números naturais, cuja linguagem seja uma extensão da linguagem da aritmética de primeira ordem, na qual as funções recursivas são representáveis, tal que $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{A})$ se, e somente se, **A** é teorema de **T**; ou seja, tal que os teoremas de **T** sejam todas as fórmulas que reconhecemos como verdadeiras no Modelo Padrão dos Números Naturais.

Com efeito, se houvesse uma teoria **T** nessas condições, então, pelo Princípio de Gödel-Autossuperação, existiria uma fórmula $\mathbf{G_T}$, tal que $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{G_T})$, que não seria teorema de **T**, o que contradiz a nossa hipótese inicial de que **T** satisfaz as condições da asserção acima.

3. A Impossibilidade de Algoritmos que Simulem Completamente o Reconhecimento de Verdades da Aritmética de Primeira Ordem

> *We now define the notion, already discussed, of an effectively calculable function of positive integers by identifying it with the notion of a recursive function of positive integers (or of a l-definable function of positive integers). This definition is thought to be justified by the considerations, which follow, so far as positive justification can ever be obtained for the selection of a formal definition to correspond to an intuitive notion.*
> Church (1965, p.100)[6]

Podemos agora estudar as implicações da Consequência 1 quanto à existência de um algoritmo executável por uma máquina de Turing que simule completamente o reconhecimento humano da verdade de fórmulas aritméticas de primeira ordem no Modelo Padrão dos Números Naturais.

6 Definimos agora a noção, já discutida, de uma função efetivamente calculável de inteiros positivos, identificando-a com a noção de função recursiva de inteiros positivos (ou de função l-definível de inteiros positivos). Essa definição é pensada para ser justificada pelas considerações que seguem, tanto quanto justificações positivas podem ser obtidas pela seleção de uma definição formal para corresponder a uma noção intuitiva.

Primeiramente, lembremos que existe uma máquina de Turing que calcula o resultado da aplicação de um predicado se, e somente se, o predicado é recursivo, como podemos demonstrar a partir de Turing (1936-7, Apêndice, cf. reimpressão de 1965) e de Church (1936, Teoremas XVI-XVII, cf. reimpressão de 1965); e que, analogamente, existe uma máquina de Turing que calcula um predicado parcial P (claro que somente para os casos em que P está definido) se, e somente se, o predicado P é recursivo parcial.

Consideremos, então, as seguintes definições e o resultado obtido por Kleene (1965, p. 271).

> Seja $P(x_1, ..., x_n)$ um predicado que pode não estar definido para todas as n-uplas de números naturais, no seu argumento. Pelo *completamento* de P entendemos um predicado Q, tal que, se $P(x_1, ..., x_n)$ está definido, então $Q(x_1, ..., x_n)$ está definido e tem o mesmo valor, e se $P(x_1, ..., x_n)$ não é definido, então $Q(x_1, ..., x_n)$ está definido. Em particular, ao completamento $P^+(x_1, ..., x_n)$ que é falso quando $P(x_1, ..., x_n)$ é indefinido, e ao completamento $P(x_1, ..., x_n)$ que é verdadeiro quando $P(x_1, ..., x_n)$ é indefinido, chamamos, respectivamente, de *completamento positivo* e *completamento negativo* de $P(x_1, ..., x_n)$. (Em P e P^+, a "parte positiva" coincide; em P e P^-, a "parte negativa" coincide.)
>
> Teorema Vi. O completamento positivo $P^+(x_1, ..., x_n)$ de um predicado recursivo parcial $P(x_1, ..., x_n)$ é expressável na forma $(Ey)R(x_1, ..., x_n, y)$, na qual R é uma relação recursiva primitiva; e, conversamente, qualquer predicado expressável na forma $(Ey)R(x_1, ..., x_n, y)$, na qual R é recursiva geral é o completamento positivo $P^+(x_1, ..., x_n)$ de um predicado recursivo parcial $P(x_1, ..., x_n)$.

A partir dessas definições e resultados, podemos mostrar que, se existe um predicado recursivo parcial (ou equivalentemente um algoritmo executável por uma máquina de Turing) que desempenha o papel de **Ψ**, i.e., da capacidade humana de reconhecimento de verdades da aritmética de primeira ordem**,** então existe uma teoria axiomática **T** de primeira ordem, tal que **Ψ(A)** se, e somente se, **A** é teorema de **T**. Ou seja, podemos mostrar o que segue.

Asserção. Se **Ψ** é recursivo parcial, então existe uma teoria **T** axiomática de primeira ordem dos números naturais, tal que: **Ψ(A)** se, e somente se, **A** é teorema de **T**.

Com efeito, denotando por **[A]** o número de Gödel da fórmula **A**, temos, pelo teorema acima, que existe um predicado recursivo geral ***R*** tal que **Ψ⁺([A])** se, e somente se, ***EyR*([A], *y*)**, e, portanto, **Ψ(A)** é verdadeiro se, e somente se, ***EyR*([A], *y*)**. Seja **T** a teoria cujos axiomas são as fórmulas de primeira ordem da forma $\mathbf{A} \wedge (x_i = x_i)$, tal que ***R*([A], *i*)**. Primeiramente, **T** é uma teoria de primeira ordem, já que tem apenas fórmulas da linguagem aritmética de primeira ordem e **T** é axiomática, pois existe um procedimento recursivo para reconhecer os axiomas de **T**. Além disso, temos que, se **y(A)**, então existe *i* tal que $\mathbf{A} \wedge (x_i = x_i)$ é axioma de **T** e, assim, pela Regra de Inferência de Simplificação, temos que **A** é teorema de **T**. Logo, se **Ψ(A)**, então **A** é teorema de **T**. Por outro lado, se **A** é teorema de **T**, então **A** pode ser obtida por regras de inferências lógicas a partir dos axiomas de **T**, ou seja, de fórmulas $\mathbf{A_i}$ tais que $\mathbf{\Psi(A_i)}$. Ora, mas se supõe que a capacidade de reconhecimento de fórmulas de ***L*** é tal que: se **A** é uma fórmula que segue por regras de inferência lógica de fórmulas que podem ser identificadas como verdadeiras, então a própria fórmula **A** pode ser identificada como verdadeira, ou seja, **ψ(A)**; portanto, temos que, se **A** é teorema de **T**, então **ψ(A)**. Concluímos, então, que se **ψ** é recursivo parcial, então existe uma teoria **T** axiomática de primeira ordem sobre os números naturais tal que: **ψ(A)** se, e somente se, **A** é teorema de **T**.

Da asserção acima e da Consequência 1, temos imediatamente que:

Consequência 2 do Princípio de Gödel-Autossuperação. ψ não é recursivo parcial e, portanto, não existe algoritmo executável por uma máquina de Turing que simule completamente a capacidade humana de reconhecimento da veracidade de fórmulas aritméticas de primeira ordem.

Assim, certamente, pelo que foi exposto acima, as máquinas de Turing não podem satisfazer o Princípio de Gödel-Autossuperação. É esse princípio que, se atribuído aos seres humanos, e parece poder necessariamente ser atribuído já que foram os seres humanos que o descobriram pela análise do próprio pensar, leva a considerar que mentes não são apenas e tão somente máquinas de Turing.

4. Conclusão

…minds cannot be explained as machines.
John R. Lucas (1961, p.1)[7]

Os resultados obtidos nas seções anteriores mostram então que, devido ao Princípio de Gödel-Autossuperação, que foi estabelecido em relação à capacidade humana de identificação da verdade de fórmulas da aritmética de primeira ordem, a partir de uma análise epistemológica e metamatemática do Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel, pudemos mostrar que não existe uma teoria de primeira ordem sobre números naturais que seja completa em relação à referida capacidade e que não existe algoritmo ou máquina de Turing que simule completamente tal capacidade.

Tais resultados são importantes não apenas do ponto de vista epistemológico e metodológico, mas também têm importantes implicações ontológicas que não serão analisadas aqui (cf., e.g., LUCAS, 1961, que conclui que o "mecanicismo é falso"). Tais implicações, bem como a consideração de como se pode estender esse resultado de incompletude para teorias formais que sejam extensões de teorias de primeira ordem, serão desenvolvidas em trabalhos posteriores.

[7] ... mentes não podem ser explicadas como máquinas.

Referências Bibliográficas

CHURCH, Alonzo. *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory. In*: DAVIS, 1965, p. 88-107. [Apresentado para a American Mathematical Society, em 19 de abril de 1935 e impresso, pela primeira vez, no *American Journal of Mathematics*, v. 58, p.345-363, 1936.]

DAVIS, Martins. *The Undecidable.* Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions**.** New York: Raven Press, 1965.

GÖDEL, Kurt. *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems. In*: DAVIS, 1965, p. 39-74. [Notas de lições dadas por Gödel no Institute for Advanced Study, durante a primavera de 1934, que trata tópicos muito similares aos do artigo original de Gödel de 1931.]

KLEENE, Stephen Cole. *Recursive Predicates and Quantifiers. In*: DAVIS, 1965, p. 254-287. [Reimpressão de *Transactions*, v.53, n.1, p. 41-73. American Mathematical Society, 1943.]

LUCAS, John Randolph. *Minds, Machines and Gödel***.** Disponível em: <http://users.oc.ax.uk/~jrlucas/index.html>. Acesso em: 20 dez. 2001. [Impresso primeiramente em *Philosophy*, XXXVI, p.112-127, 1961.]

PENROSE, Roger. *The Emperor's New Mind*: Concerning Computers, Minds and Laws of Physics. Oxford: Oxford University Press, 1989.

________. *Shadows of the Mind*: a Search for the Missing Science of Consciousness. Oxford: Oxford University Press, 1995.

TARSKI, Alfred. *Logic, Semantic, Metamathematics.* 2. ed. Indianapolis: Hackett Publishing Co., 1983.

TASSINARI, Ricardo Pereira. *Incompletude e auto-organização*: Sobre a determinação de verdades lógicas e matemáticas. Tese (Doutorado em Filosofia), orientada por Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano. Campinas: IFCH/UNICAMP, Dezembro de 2003.

TURING, Alan Mathison. *On Computable Numbers, with Application to the* Entscheidungsproblem. *In*: DAVIS, 1965, p. 115-154. [Reimpresso de *Proceedings of the London Mathematical Society*, Ser. 2, v. 42, 1936-7, p. 230-265.]

Endereços / *Addresses*

Ricardo Pereira Tassinari
Departamento de Filosofia
Universidade Estadual Paulista - UNESP / Campus Marília – SP
Faculdade de Filosofia e Ciências
Av. Hygino Muzzi Filho, n.º 737
Marília – SP
CEP 17525-900

Itala M. Loffredo D'Ottaviano
Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP
Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência — CLE
Cidade Universitária "Zeferino Vaz"
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 251
Barão Geraldo – Campinas – SP
Caixa Postal 6133
CEP 13083-970

Data de recebimento: 10/8/2008
Data de aprovação: 20/10/2008