Completude diz-se em Vários Sentidos

Completeness can be said in Several Meanings

Edelcio Gonçalves de Souza
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
edelcio@pucsp.br

Resumo: A partir de um raciocínio equivocado acerca do significado dos teoremas de completude e incompletude de Gödel, apresentamos alguns importantes conceitos de lógica matemática e, com base em uma análise dos teoremas acima, concluímos mencionando a existência de modelos não *standard* da Aritmética de Peano.

Palavras-chave: Completude. Incompletude. Teoremas de Gödel

Abstract: *From a mistaken reasoning about the completeness and incompleteness Gödel's theorems, we show important concepts of mathematical logic and, based on above theorems, we conclude showing the existence of non standard models for Peano's Arithmetic.*

Keywords: *Completeness. Incompleteness. Gödel's theorems*

O objetivo desta nota[1] é apresentar algumas dificuldades que um aluno de lógica matemática pode ter nos seus primeiros anos de estudo dessa disciplina, e como essas dificuldades podem ser superadas por meio de um entendimento global e apropriado de certas noções importantes.

Um dos problemas com que um estudioso pode deparar-se é o seguinte:

> 1. A aritmética usual, aquela que se aprende na escola primária, pode ser formalizada em lógica de primeira ordem, isto é, pode ser sistematizada como uma teoria de primeira ordem[2] que denominaremos *Aritmética de Peano*.
>
> 2. Em 1929, em sua tese de doutoramento, K. Gödel demonstrou que a lógica de primeira ordem é completa[3], isto é, para teorias de primeira ordem vale o *teorema de completude*.
>
> 3. Em 1931, o mesmo Gödel assombrou a comunidade matemática demonstrando que a Aritmética de Peano é incompleta. Estava estabelecido o *teorema de incompletude*.

---

[1] Este pequeno texto é a transcrição de uma comunicação apresentada no Sexto Encontro Internacional Sobre o Pragmatismo, em novembro de 2003, na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

[2] A noção de teoria de primeira ordem pode ser encontrada em SHOENFIELD (1967).

[3] O doutoramento foi em 1929, mas o trabalho foi publicado em 1930; ver GÖDEL (1930).

Cognitio, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 200-204, jul./dez. 2004.

Ora, um raciocínio um tanto apressado, com base nos três pontos acima, parece levar a uma flagrante contradição: a Aritmética de Peano é completa e incompleta!

A fim de desfazer tal equívoco, é necessário estabelecer precisamente os significados dos conceitos envolvidos derivando, com um pouco de reflexão mais aprofundada, algumas conseqüências interessantes e importantes.

Em primeiro lugar, é preciso ficar claro que a Aritmética de Peano é uma teoria que pode ser formalizada em uma linguagem de primeira ordem.

Assumimos que o leitor esteja familiarizado com o conceito de linguagem de primeira ordem[4] e lembramos que a linguagem da aritmética possui símbolos funcionais para as operações de sucessor, adição e multiplicação, um símbolo de predicado para a igualdade e um símbolo de constante individual para interpretar o número zero.

Dada uma linguagem de primeira ordem, facilmente se define o conjunto de fórmulas dessa linguagem, e, com base nesse conjunto, pode-se definir duas relações entre fórmulas e conjuntos de fórmulas.

A primeira dessas relações é o conceito de conseqüência semântica, definido com base na noção de interpretação de linguagens de primeira ordem.

Uma *interpretação* é simplesmente um conjunto não vazio, denominado *domínio* da interpretação, e um conjunto de *regras* que atribuem a cada símbolo de constante individual um elemento do domínio; a cada símbolo funcional, uma função apropriada definida no domínio; e a cada símbolo de predicado, uma relação apropriada no domínio.

Por exemplo, podemos fornecer uma interpretação para a linguagem da aritmética tomando como domínio o conjunto dos números naturais, os símbolos funcionais sendo interpretados como as funções usuais de sucessor, adição e multiplicação, e o símbolo de constante individual interpretado como o zero. Essa interpretação é denominada o *modelo standard* da aritmética.

Ora, dada uma interpretação, define-se facilmente quando uma sentença (fórmula sem variáveis livres) é verdadeira na interpretação, e dizemos que uma interpretação é um modelo de um conjunto de sentenças se todas as sentenças do conjunto são verdadeiras na dada interpretação.

Por outro lado, considerando que uma teoria é um conjunto de sentenças, dizemos que uma sentença é conseqüência semântica de uma teoria (ou que ela é *válida* na teoria) se ela é verdadeira em todos os modelos da teoria. Obtemos, assim, a primeira das relações acima mencionada.

Para a segunda das relações, é preciso relembrar o conceito de sistema axiomático, com o qual também supomos que o leitor possua familiaridade[5] .

Um sistema axiomático, ou uma teoria de primeira ordem, é simplesmente dado por um conjunto de sentenças de uma dada linguagem de primeira ordem, denominado o conjunto dos *axiomas* da teoria, e um conjunto de *regras de inferência* que permitem derivar sentenças a partir de sentenças dadas.

Assim, uma dedução em uma teoria é uma seqüência finita de sentenças tal que cada elemento da seqüência ou é um axioma da teoria, ou é inferido por uma regra a partir de sentenças anteriores na seqüência. Dizemos, então, que uma sentença é con-

---

4 Ver, por exemplo, MENDELSON (1987).
5 Ver SHOENFIELD (1967).

seqüência sintática de uma teoria (ou que é um *teorema* da teoria) se existe uma dedução na teoria, tal que a sentença é o último elemento da dedução.

Como dito anteriormente, a Aritmética de Peano pode ser apresentada como uma teoria de primeira ordem. Isso pode ser feito por meio de uma adaptação dos famosos axiomas estabelecidos por G. Peano[6] :

1. Zero é um número natural.
2. O sucessor de um número natural é um número natural.
3. Zero não é sucessor de nenhum número natural.
4. Se os sucessores de dois números naturais são iguais, os números naturais são iguais.
5. (Princípio de indução.) Se um subconjunto de números naturais contém o zero e também o sucessor de qualquer um de seus elementos, então esse conjunto é todo o conjunto de números naturais.

Temos, agora, todos os instrumentos para apresentar de modo razoavelmente preciso o Teorema de Completude[7] :

> **Teorema** (GÖDEL, 1929). *Uma sentença é válida em uma teoria se, e somente se, ela é teorema da teoria.*

Note que esse é um resultado que relaciona as duas noções de conseqüência acima delineadas e, o que é importante, o conceito de teoria completa nem sequer é mencionado.

A noção de teoria completa é puramente sintática, isto é, diz respeito apenas à segunda das relações acima descritas. Uma teoria é dita *completa* se, para toda sentença da linguagem da teoria, tem-se que ela ou sua negação é conseqüência sintática da teoria. Contrariamente, uma teoria é dita *incompleta* se existe uma sentença, tal que nem ela nem sua negação são conseqüências sintáticas da teoria.

É claro que uma teoria que possua como teorema uma sentença bem como sua negação, isto é, uma teoria *inconsistente*, possui também como teorema toda e qualquer sentença da linguagem da teoria. Essa é uma propriedade básica da lógica clássica.

Assim, o Teorema de Incompletude de Gödel (na versão de Rosser) afirma que[8] :

> **Teorema** (GÖDEL, 1931). *Toda extensão axiomática e consistente da Aritmética de Peano é incompleta.*

---

6 De fato, os postulados de Peano podem ser mais bem compreendidos em uma axiomática da teoria de conjuntos. Uma vez estabelecida a existência do conjunto dos números naturais, esses postulado são, na realidade, teoremas da referida teoria.

7 A versão apresentada aqui é a que aparece em SHOENFIELD (1967). Ela é equivalente ao enunciado: *uma teoria é consistente se, e somente se, ela possui um modelo*. Aqui, *consistente* significa que existe uma sentença da linguagem da teoria que não é teorema da mesma, ou, ainda, que não existe sentença na linguagem da teoria, tal que ela e sua negação são ambas teoremas da teoria.

8 Também aqui a versão utilizada é a que aparece em SHOENFIELD (1967).

A noção de extensão axiomática precisa ser um pouco mais bem elaborada. Uma teoria é extensão de outra teoria se ela possui entre seus teoremas todos os teoremas daquela. Além disso, dito de modo informal, uma teoria é denominada *axiomática* se existe um procedimento efetivo para determinar se uma sentença é ou não um axioma da teoria. Em particular, a própria aritmética é uma extensão axiomática de si mesma e, portanto, o teorema afirma a incompletude da aritmética.

Com um pouco de reflexão, pode-se perceber que os dois teoremas são perfeitamente compatíveis.

O que poderia atrapalhar a correta compreensão dos resultados seria o seguinte raciocínio:

> 1. O Teorema da Incompletude afirma a existência de uma sentença, tal que nem ela nem sua negação são conseqüências sintáticas da aritmética.
>
> 2. Por outro lado, uma dessas sentenças deve ser verdadeira no modelo *standard* da aritmética.
>
> 3. Logo, pelo Teorema da Completude, a sentença verdadeira deveria ser conseqüência sintática da aritmética.

Raciocínio incorreto!

O fato de a sentença ser verdadeira no modelo *standard* da aritmética não significa que ela seja conseqüência semântica da teoria. Para que isso ocorra, ela deveria ser verdadeira em TODOS os modelos da aritmética, e não apenas no modelo *standard*.

Ora, essa discussão possui como resultado o interessante fato de que a aritmética não possui apenas um modelo, o *standard*. Ao contrário, os resultados mostram que existem modelos da aritmética que são essencialmente diferentes do modelo *standard*; e, nesses modelos, as sentenças verdadeiras são diferentes das sentenças verdadeiras do modelo usual.

Por outro lado, o resultado não deve ser mal compreendido. Ele não afirma que existem verdades aritméticas que não podem ser demonstradas. Isso é falso, pois bastaria que essas verdades fossem acrescentadas à aritmética como novos axiomas, que elas seriam obviamente demonstradas. Mas, nesse caso, a teoria obtida seria uma extensão axiomática da aritmética, e novamente o teorema se aplicaria gerando incompletude. Em outras palavras, e dito de modo não rigoroso, a aritmética é incompleta e incompletável.

Bibliografia

DAVIS, M. (1965) *The Undecidable*: basic papers on undecidable propositions, unsovable problems, and computable functions. New York, NY: Raven Press.

GÖDEL, K. (1930) Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik* (37), p. 349-360.

_________ (1931) Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik* (38), p. 173-198. [Tradução inglesa em DAVIS (1965).]

MENDELSON, E. (1987) *Introduction to Mathematical Logic*. Pacific Grove, CA: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software.

SHOENFIELD, J. R. (1967) *Mathematical Logic*. Natick, MA: Association for Symbolic Logic.

SMULLYAN, R. M. *Gödel's Incompleteness Theorems*. New York, NY: Oxford University Press.

Cognitio, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 200-204, jul./dez. 2004.