Lindenbaumologia II: Cálculos Lógicos Abstratos

Lindenbaumology II: Abstract Logical Calculi

Edelcio Gonçalves de Souza
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
edelcio@pucsp.br

Patrícia Del Nero Velasco
Doutoranda em filosofia na
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

Resumo: Neste artigo, damos prosseguimento à análise do conceito de cálculo lógico, cuja primeira parte foi apresentada no número anterior desta revista. Apresentamos, também, uma versão do Teorema de Lindenbaum para teorias consistentes completas.

Palavras-chave: lógica, cálculo, Lindenbaum, consistência, compacidade.

Abstract: In this article, we continue our analysis on the concept of logical calculus, the first part of which was published in the previous issue of this magazine. We also offer a version of Lidenbaum's theorem for whole consistent theories.

Key-words: logic, calculus, Lindenbaum, consistence, compacity.

1. Introdução

Este trabalho, que constitui o segundo de uma série de três, tem por objetivo continuar o estudo sobre as diversas versões do Teorema de Lindenbaum e suas aplicações. Nessa parte, aprofundaremos o conceito de cálculo lógico já apresentado na parte 1, estudando uma nova versão do resultado de Lindenbaum para teorias consistentes completas (lembramos o leitor que na primeira parte tratamos da *extensão saturada* de Lindenbaum). Para a presente parte, utilizamos como base os trabalhos inaugurais de A. Tarski sobre lógica abstrata (ver Tarski (1983a, 1983b)).

2. Cálculos lógicos

Em "Lindenbaumologia I: a teoria geral" (ver De Souza (2001)), definimos a noção de cálculo lógico que é reproduzida aqui com uma pequena modificação cujo motivo ficará claro no primeiro resultado a ser demonstrado.

Um **cálculo lógico** L é um par L = (For, Cn_L) tal que For é um conjunto não vazio e enumerável cujos elementos são denominados **fórmulas** de L e Cn_L é uma operação, denominada **operador de conseqüência**, definida no conjunto dos subconjuntos de For, ou seja, Cn_L: $\wp(For) \rightarrow \wp(For)$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(1) Autodedutibilidade: $B \subseteq Cn_L(B)$;
(2) Idempotência: $Cn_L(B) = Cn_L(Cn_L(B))$;
(3) Compacidade: $Cn_L(B) = \cup\, Cn_L(B')$ para todo $B' \subseteq B$ finito.

Vamos utilizar a, b, c, ... para elementos de For e A, B, C, ... para subconjuntos de For. No que segue, consideraremos um cálculo lógico fixo L = (For,Cn).

Proposição 1. (Monotonicidade) Se $B \subseteq C$, então $Cn(B) \subseteq Cn(C)$.

Demonstração. Suponha que $B \subseteq C$ e $a \in Cn(B)$. Assim, pela condição (3), $a \in \cup\, Cn(B')$ para todo $B' \subseteq B$ finito. Logo, existe $B' \subseteq B$ finito tal que $a \in Cn(B')$. Assim, existe $B' \subseteq C$ finito tal que $a \in Cn(B')$. Portanto, usando novamente a condição (3), obtemos $a \in Cn(C)$. QED

Corolário. Se $B \subseteq Cn(C)$, então $Cn(B) \subseteq Cn(C)$.

Demonstração. Seja $B \subseteq Cn(C)$. Pela proposição 1, temos $Cn(B) \subseteq Cn(Cn(C))$. Logo, pela condição (2), obtemos $Cn(B) \subseteq Cn(C)$. QED

Fica claro então que no texto anterior não precisaríamos postular a monotonicidade. Cabe aqui lembrar que em estudos posteriores de lógica abstrata a monotonicidade é postulada ao invés da compacidade. No entanto, o cálculo assim definido é mais fraco que o cálculo do presente texto, pois a compacidade não é dedutível da monotonicidade com as outras condições postuladas.

Proposição 2. $Cn(B \cup C) = Cn(B \cup Cn(C)) = Cn(Cn(B) \cup Cn(C))$.

Demonstração. A idéia é mostrar, utilizando o teorema 1, que: $Cn(B \cup C) \subseteq Cn(B \cup Cn(C)) \subseteq Cn(Cn(B) \cup Cn(C)) \subseteq Cn(B \cup C)$. Para a primeira inclusão temos que se $C \subseteq Cn(C)$ então $B \cup C \subseteq B \cup Cn(C)$ e, portanto, $Cn(B \cup C) \subseteq Cn(B \cup Cn(C))$. Para a segunda inclusão temos que se $B \subseteq Cn(B)$ então $B \cup Cn(C) \subseteq Cn(B) \cup Cn(C)$ e, portanto, $Cn(B \cup Cn(C)) \subseteq Cn(Cn(B) \cup Cn(C))$. Para a terceira inclusão temos que se $B \subseteq B \cup C$ então $Cn(B) \subseteq Cn(B \cup C)$ e se $C \subseteq B \cup C$ então $Cn(C) \subseteq Cn(B \cup C)$. Logo, $Cn(B) \cup Cn(C) \subseteq Cn(B \cup C)$ e, assim, $Cn(Cn(B) \cup Cn(C)) \subseteq Cn(Cn(B \cup C)) = Cn(B \cup C)$. QED

Vejamos alguns resultados úteis que serão mais tarde utilizados no estudo de certas classes de fórmulas.

Proposição 3. Se C é finito e $C \subseteq Cn(A)$, então existe um conjunto B finito tal que $B \subseteq A$ e $C \subseteq Cn(B)$.

Demonstração. Seja $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ e, por hipótese, $C \subseteq Cn(A)$. Então $c_i \in Cn(A)$. Assim, pela condição (3), existe um conjunto $A_i \subseteq A$ finito tal que $c_i \in Cn(A_i)$. Seja, agora, $\cup_{1 \leq i \leq m} A_i = B$. Portanto, temos que:

(i) B é finito, pois B é (por definição) união de finitos;

(ii) $B \subseteq A$, pois $A_i \subseteq A$ $(1 \leq i \leq m)$;

(iii) $C \subseteq Cn(B)$. Isso porque temos que $c_i \in C$, e por conseguinte, $c_i \in Cn(A_i)$. Como $A_i \subseteq B$, pela proposição 1, $Cn(A_i) \subseteq Cn(B)$, e assim, $c_i \in Cn(B)$, $\forall c_i$. Portanto, segue o resultado. QED

Proposição 4. Seja $\mathcal{R} \subseteq \wp(For)$ uma classe que satisfaça a seguinte condição: (α) Para toda subclasse finita L de R existe um conjunto $Y \in R$ tal que $\cup_{X \in L} X \subseteq Y$. Então, $Cn(\cup_{X \in R} X) = \cup_{X \in R} Cn(X)$.

Demonstração. Considere $x \in Cn(\cup_{X \in R} X)$. Definimos $A = \cup_{X \in R} X$. Então, $x \in Cn(A) = \cup_{A' \subseteq A \text{ finito}} Cn(A')$. Logo, existe $A' \subseteq A$ finito tal que $x \in Cn(A')$. Assim, $A' \subseteq \cup_{X \in R} X$ finito. Seja $L = \{X \in R: X \cap A' \neq \emptyset\}$. Como A' é finito, existe $L \subseteq R$ finito tal que $A' \subseteq \cup_{X \in L} X$. Como L é finito, por hipótese, existe $Y \in R$ tal que $\cup_{X \in L} X \subseteq Y$. Logo, $A' \subseteq Y$ e, então, $Cn(A') \subseteq Cn(Y)$. Portanto, $x \in Cn(Y)$ e como $Y \in R$, temos que $x \in \cup_{X \in R} Cn(X)$. Considere agora $x \in \cup_{X \in R} Cn(X)$. Então, existe $X' \in R$ tal que $x \in Cn(X')$. Como $X' \subseteq \cup_{X \in R} X$, então $Cn(X') \subseteq Cn(\cup_{X \in R} X)$. Logo, $x \in Cn(\cup_{X \in R} X)$. QED

Corolário. Seja $R \subseteq \wp(For)$ uma classe que satisfaça a seguinte condição: (α) $R \neq \emptyset$ e para quaisquer dois conjuntos X e Y pertencentes a R, ou $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$. Então $Cn(\cup_{X \in R} X) = \cup_{X \in R} Cn(X)$.

Demonstração. Suponha (α). Logo, para toda subclasse finita L de R existe um conjunto $Z \in R$ tal que $\cup_{X \in L} X \subseteq Z$. Como $R \subseteq \wp(For)$, então, pela proposição 4, $Cn(\cup_{X \in R} X) = \cup_{X \in R} Cn(X)$. QED

3. Teorias

Seja $X \subseteq For$. Dizemos que X é **teoria** se e somente se $Cn(X) \subseteq X$ (e, nesse caso, $X = Cn(X)$, em virtude da autodedutibilidade). Vamos utilizar a abreviação TEO para a família das teorias.

Proposição 5. Seja $A \subseteq For$. Cn(A) é teoria e é a menor teoria que inclui A.

Demonstração. Seja $B = Cn(A)$. Então, $Cn(B) = Cn(Cn(A)) = Cn(A) = B$ e, portanto, B é teoria. Como $A \subseteq Cn(B)$, $A \subseteq B$. Suponha que exista uma teoria B' tal que $A \subseteq B' \subseteq B$. Logo, por monotonicidade, $Cn(A) \subseteq Cn(B') \subseteq Cn(B)$. Mas $Cn(B) = Cn(A)$. Assim, $Cn(B') = Cn(B)$. Como B e B' são teorias, $Cn(B) = B$ e $Cn(B') = B'$. Então $B = B'$ e segue o resultado. QED

Proposição 6. Se $F \subseteq TEO$ então $\cap F \in TEO$, isto é, a intersecção de qualquer família de teorias é teoria.

Demonstração. Sabemos que $\cap F \subseteq F$ para todo $F \in F$. Por monotonicidade, $Cn(\cap F) \subseteq Cn(F)$. Como $F \in TEO$, $Cn(\cap F) \subseteq F$ (para todo $F \in F$). Logo, $Cn(\cap F) \subseteq \cap F$ e, portanto, $\cap F \in TEO$. QED

Embora a intersecção de teorias seja uma teoria, o mesmo não ocorre com a união. Nesse caso, temos que impor condições adicionais.

Proposição 7. Se $R \subseteq$ TEO satisfaz a condição (α) da proposição 4, então $\cup_{X \in R} X \in$ TEO.

Demonstração. Da hipótese $R \subseteq$ TEO segue-se que $R \subseteq \wp$(For). Assim, pela proposição 4, $Cn(\cup_{X \in R} X) = \cup_{X \in R} Cn(X)$. Como $X \in R$ e $R \subseteq$ TEO, $X \in$ TEO, ou seja, $X = Cn(X)$. Logo, $Cn(\cup_{X \in R} X) = \cup_{X \in R} X$ e, por conseguinte, $\cup_{X \in R} X \in$ TEO. QED

4. Conjuntos consistentes

Seja $X \subseteq$ For. Dizemos que X é **consistente** se e somente se $Cn(X) \neq S$. Em outras palavras, um conjunto de fórmulas é dito consistente se e somente o conjunto de suas conseqüências não contém como elementos todas as sentenças. Em caso contrário, o conjunto é dito **inconsistente**.

Vejamos uma interessante relação entre compacidade e consistência.

Proposição 8. O conjunto A é inconsistente se e somente se todo subconjunto finito de A é inconsistente.

Demonstração. Seja $A \subseteq$ For inconsistente. Logo, Cn(A) = For. Por compacidade, escrevemos For = $\cup$ Cn(A') para todo A' $\subseteq$ A finito. Considere a condição de trivialização: existe $a \in$ For tal que Cn({a}) = For. Assim, existe A' $\subseteq$ A finito tal que $a \in$ Cn(A'). Temos então {a} Í Cn(A') e, portanto, For = Cn({a}) $\subseteq$ Cn(Cn(A')) = Cn(A'). Logo, Cn(A') = For e A' $\subseteq$ A finito. Considere agora A' inconsistente tal que A' $\subseteq$ A. Assim, Cn(A') = For e Cn(A') $\subseteq$ Cn(A). Obtemos então For = Cn(A') $\subseteq$ Cn(A) $\subseteq$ For. Logo, Cn(A) = For, ou seja, A é inconsistente. QED

Como no caso das teorias, é obvio que a união de conjuntos consistentes não pode ser um conjunto consistente. Para que isso ocorra temos que novamente impor condições.

Proposição 9. Se R é uma família de conjuntos consistentes e satisfaz a condição (α) da proposição 4, então $\cup_{X \in R} X$ é consistente.

Demonstração. Por absurdo, suponha que $\cup_{X \in R} X$ é inconsistente. Pela proposição 8, existe $A \subseteq \cup_{X \in R} X$ finito e inconsistente. Como A é finito, existe uma subclasse $L \subseteq R$ finita tal que $A \subseteq \cup_{X \in L} X$. Pela condição ($\alpha$), existe $Y \in R$ consistente tal que $\cup_{X \in L} X \subseteq Y$. Logo, $A \subseteq Y$ e novamente pela proposição 8, Y é inconsistente (contradição!). QED.

5. Conjuntos completos

Dizemos que X é **completo** se e somente se para todo Y consistente que inclui X, Cn(X) = Cn(Y).

Vejamos uma caracterização de conjuntos completos que nos será útil a seguir.

Proposição 10. X é completo se e somente se para todo $x \notin Cn(X)$, $Cn(X \cup \{x\}) = For$.

Demonstração. Seja $X \subseteq For$. Se X é inconsistente, não há nada a demonstrar, visto que os dois lados da equivalência são satisfeitos. Seja, então, X consistente, ou seja, $Cn(X) \neq For$. Suponha que X é completo e $x \notin Cn(X)$. Por absurdo, suponha que $Cn(X \cup \{x\}) \neq For$. Temos então que $X \cup \{x\}$ é consistente e $X \subseteq X \cup \{x\}$. Como X é completo, $Cn(X) = Cn(X \cup \{x\})$. Mas $x \in Cn(X \cup \{x\})$ e, assim, $x \in Cn(X)$ (contradição!). Agora, suponha que para todo $x \notin Cn(X)$, $Cn(X \cup \{x\}) = For$. Considere Y consistente tal que $X \subseteq Y$. Por absurdo, suponha que $Cn(X) \neq Cn(Y)$. Por monotonicidade, $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$. Assim, existe $x \in Cn(Y)$ tal que $x \notin Cn(X)$ e, por hipótese, $Cn(X \cup \{x\}) = For$. Mas $X \cup \{x\} \subseteq Cn(Y)$ e, portanto, $Cn(X \cup \{x\}) \subseteq Cn(Cn(Y)) = Cn(Y)$. Logo, $For \subseteq Cn(Y)$ e, assim, $Cn(Y) = For$ (contradição!). QED

Proposição 11. X é teoria consistente e completa se e somente se X é consistente e para toda $x \in For$, ou $x \in X$ ou $Cn(X \cup \{x\}) = For$.

Demonstração. Seja X uma teoria consistente e completa. Em particular, X é consistente. Se $x \in X$, então segue o resultado. Se $x \notin X$, como X é teoria, $x \notin C(X)$. Como X é completo, pela proposição 10, $Cn(X \cup \{x\}) = For$. Suponha, agora, X consistente tal que para toda $x \in For$, ou $x \in X$ ou $Cn(X \cup \{x\}) = For$. Por hipótese, X é consistente. Por absurdo, suponha que X não é teoria, ou seja, $X \neq Cn(X)$. Assim, existe $x \in Cn(X)$ tal que $x \notin X$. Portanto, $Cn(X \cup \{x\}) = For$. Sabemos, pela proposição 2, que $Cn(X \cup \{x\}) = Cn(Cn(X) \cup \{x\})$. Logo, $Cn(Cn(X) \cup \{x\}) = Cn(Cn(X)) = Cn(X)$ e, assim, $Cn(X) = For$ (contradição!). Portanto, X é teoria. Por fim, mostremos que X é completo. A proposição 10 afirma que X é completo se e somente se para todo $x \notin Cn(X)$, $Cn(X \cup \{x\}) = For$. Suponha que $x \notin Cn(X)$. Como X é teoria, $x \notin X$ e, por hipótese, $Cn(X \cup \{x\}) = For$. Logo, X é completo. QED

Enfim, obtemos a partir dos resultados anteriores, a versão do teorema de Lindenbaum, principal objeto de estudo desse trabalho.

Teorema de Lindenbaum. Se X é consistente, então existe um conjunto Y que inclui X que é teoria consistente e completa.

Demonstração. Lembrando que For é enumerável, fixemos uma enumeração dos seus elementos, ou seja, $For = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Construiremos, a partir de um conjunto consistente X, uma seqüência infinita de conjuntos X_i com $i \in w$, o conjunto dos números naturais. Definimos:

$X_0 = X$
$X_1 = X_0 \cup \{a_1\}$ se $X_0 \cup \{a_1\}$ é consistente
$X_1 = X_0$ em caso contrário
...
$X_n = X_{n-1} \cup \{a_n\}$ se $X_{n-1} \cup \{a_n\}$ é consistente
$X_n = X_{n-1}$ em caso contrário
...

Definimos, assim, $R = \{X_0, X_1, \ldots\}$ e $Y = \cup X_i$, com $i \in \omega$.

Vejamos alguns resultados imediatos que decorrem da construção acima:

(a) $X_i \subseteq X_{i+1}$ para todo $i \in \omega$;
(b) $X_i \subset X_j$ para todo $i,j \in \omega$, com $i < j$;
(c) $X_i \subseteq Y$ para todo $i \in \omega$; em particular, $X \subseteq Y$;
(d) Se L é um subconjunto finito de R, então existe $k \in \omega$ tal que $\cup L \subseteq X_k$.
(e) X_i é consistente para todo $i \in \omega$;

Portanto, R é consistente. Por (d), (e) e a proposição 9, $\cup R = \cup X_{1\ (\text{para todo } i} \in \omega)$ = Y é consistente. Suponha agora, por absurdo, que $x \notin Y$ e $Cn(Y \cup \{x\}) \neq For$. Logo, $x \notin X_i$ e por construção, $Cn(X_{i-1} \cup \{x\}) = For$. Mas $X_{i-1} \cup \{x\} \subseteq Y \cup \{x\}$ e portanto, $Cn(X_{i-1} \cup \{x\}) \subseteq Cn(Y \cup \{x\})$. Assim, $For = Cn(X_{i-1} \cup \{x\})$ Í $Cn(Y \cup \{x\}) \neq For$ (contradição!). Logo, $x \in Y$ ou $Cn(Y \cup \{x\}) = For$. Usando a proposição 11, obtemos que Y é uma teoria consistente e completa. QED

6. Observações finais

Um estudo bastante completo dos trabalhos de Tarski citados na introdução pode ser encontrado em Velasco (2000). Também podem ser consultados alguns textos sobre lógica abstrata, ver Béziau (1995, 1998) e Wójcicki (1988). Na próxima parte dessa série vamos aplicar todas as ferramentas até aqui construídas na demonstração de completude de dois cálculos lógicos particulares: o cálculo proposicional clássico e o cálculo proposicional paraconsistente C_1 de da Costa (ver Béziau (1990), Da Costa (1963, 1974)). Esperamos que com essa parte final o leitor possa ter um panorama de certas técnicas para a demonstração de teoremas de completude.

Bibliografia

BÉZIAU, J.-Y. Logiques construites suivant les méthodes de da Costa I. *Logique et Analyse, 33* (131-2), pp 259-72. 1990.

——— . *Recherches sur la Logique Universelle: excessivité, négation, sequents.* Tese de Doutorado. U. F. R. de Mathématique. Université Denis Diderot (Paris VII). Paris. 1995.

——— . Recherches sur la Logique Abstraite: les logiques normales. *Acta Universitatis Wratislaviensis, Serie Logika, 18*, pp. 105-14. 1998.

DA COSTA, N. C. A. *Sistemas Formais Inconsistentes.* Tese de Cátedra. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 1963.

——— . On the Theory of Inconsistent Formal Systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 15 (4), p. 495-510, 1974.

DE SOUZA, E. G. Lindenbaumologia I: A teoria geral. *Cognitio*. Revista de Filosofia nº II. Departamento de Filosofia da PUC-SP. São Paulo. EDUC/Editora Angra. 2001, pp. 213-219.

TARSKI, A. On some fundamental concepts of metamathematics. *Logic, Semantics, Metamathematics*, J. Corcoran (ed.), second edition. Hackett Publishing Company. 1983a.

——— . Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences. *Logic, Semantics, Metamathematics*, J. Corcoran (ed.), second edition. Hackett Publishing Company. 1983b.

VELASCO, P. D. N. *Estudos em Lógica Abstrata: sobre um artigo inaugural de A. Tarski*. Dissertação de Mestrado. Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2000.

WÓJCICKI, R. *Theory of logical calculi*. Kluwer. Dordrecht. 1998.