

GRAFOS EXISTENCIAIS DE C. S. PEIRCE: UMA INTRODUÇÃO AO SISTEMA ALFA

THE EXISTENTIAL GRAPHS OF CHARLES S. PEIRCE: AN INTRODUCTION INTO THE ALPHA-SYSTEM

Prof. Dr. LAFAYETTE DE MORAES

Prof. JOÃO QUEIROZ

Resumo: Charles S. Peirce (1839-1914) é autor de uma notação lógica de caráter geométrico-topológico, os grafos existenciais (GE), que subdivide-se em três sistemas – Alfa, Beta e Gama – correspondentes, respectivamente, do cálculo sentencial clássico, do cálculo funcional clássico de primeira ordem, e de um tipo de lógica modal. O objetivo deste trabalho é apresentar, introdutoriamente, o sistema Alfa dos GE, e compará-lo com a notação tradicional.

Abstract: Charles S. Peirce (1839-1914) developed a geometric-topological logic notation, “Existential Graphs”, divided into three systems: Alfa, Beta and Gamma. These correspond, respectively, to propositional calculus, first order predicate calculus and a kind of modal logic. The aim of this paper is to present an introduction to the Alfa system and to compare it with the traditional notation.

I. INTRODUÇÃO

Até pelo menos o início da segunda metade do século XX, estudantes de lógica dificilmente eram apresentados aos trabalhos de C.S.Peirce¹. Esta omissão é, no mínimo, surpreendente. Peirce é considerado, com Frege, Russell, Hilbert, um dos fundadores da lógica moderna (Lukasiewicz 1970: 111; Barwise & Etchemendy 1995: 211, Quine 1995: 23; Hintikka & Hilpinen 1997: ix). Ele desenvolveu, com O.H.Mitchell, e independentemente de Frege (Hintikka & Hilpinen: *ibid.*), as nocões de quantificação e quantificador lógicos (Quine 1985: 767; 1995: 31; Putnam 1992: 297), foi autor do termo “lógica de primeira ordem” (Putnam 1988: 28), de uma

Lafayette de Moraes é professor do Departamento de Filosofia da PUC/SP.

João Queiroz é doutorando do Programa de Comunicação e Semiótica da PUC/SP.

noção rudimentar de variável, além de ter antecipado, em mais de trinta anos, a introdução do operador de Sheffer (Sheffer *stroke*) (W 4:218-221; Quine 1995: 30), e a descoberta de Claude Shannon de uma correspondência entre funções de verdade e circuitos elétricos (W 5: 421-422; Houser 1997:3, Quine 1995: 30).²

Mas se há uma notável omissão sobre suas descobertas em aspectos algébricos da lógica, o que não dizer de seus sistemas de grafos lógicos? Certamente ainda foram mais negligenciados. Segundo Jay Zeman (1986: 1), "Peirce desenvolveu, independentemente da tradição Frege-Peano-Russell, todos os resultados da lógica formal desta tradição. Ele primeiro obtém tais resultados em um formato algébrico similar àquele empregado mais tarde no *Principia Mathematica* e então, por razões filosóficas fundadas na teoria do signo, torna-se insatisfeito com a notação algébrica; esta insatisfação resultou no desenvolvimento de uma bem sucedida notação lógico-gráfica."

Os grafos existenciais (GE) de Peirce constituem uma notação lógica de caráter geométrico-topológico. Segundo Gardner (1958: 55-56) é o mais ambicioso sistema diagramático já construído e, para Faris (1981: 226), o sistema de lógica geométrica mais compreensível e versátil já feito. Desenvolvido em diferentes fases, a partir de 1882 (Roberts 1973: 18), este *revolucionário* sistema (Shin 1994: 11), ou conjunto de sistemas (Alfa, Beta e Gama), não apenas superam as limitações dos diagramas de Euler e Venn (Peirce CP 4.356), como permitem a diagramatização de um tipo de lógica modal (Houser 1997: 3). Mais recentemente, propiciaram o desenvolvimento de experimentos com grafos em inteligência artificial nas áreas de redes semânticas, linguística computacional, e *knowledge representation* (Sowa 1986, 1997: 418-444). Para diversos pesquisadores (L. Searle *et al.* 1997: 2), que trabalham com o tratamento computacional dos grafos, os GE são "o primeiro modelo articulado de conhecimento e processamento de informação".

O objetivo deste trabalho é apresentar, introdutoriamente, o sistema Alfa dos GE, equivalente do cálculo sentencial clássico. Para facilitar a leitura dos acostumados com as abordagens tradicionais, comparamos, sistematicamente, a notação dos grafos com aquela usada nos livros clássicos de lógica.

II. GRAFOS EXISTENCIAIS — REGRAS DE FORMAÇÃO

Os GE são classificados em três níveis: (I) o sistema Alfa, um sistema de análise correspondente ao cálculo sentencial clássico; (ii) o sistema Beta, correspondente do cálculo funcional clássico de primeira ordem; (iii) o sistema Gama, equivalente a um sistema de lógica modal. Em termos sumários, os GE são constituídos de alguns princípios e de algumas regras de transformação, que, como no caso da lógica clássica, preservam a verdade – se partimos de sentenças verdadeiras obtemos, por meio das regras de transformação, sentenças verdadeiras.

Como afirmamos, neste trabalho nos restringiremos ao sistema Alfa. Consideraremos válidas as convenções estabelecidas para o cálculo sentencial clássico do

qual retomaremos, sucintamente, algumas. Serão objetos de nossa análise sentenças declarativas, como:

Beatriz é bióloga molecular

Dolly é um clone

Imaginamos, a seguir, uma superfície (e.g., folha de papel, quadro-negro, etc) onde as asserções podem ser escritas. Vamos designar esta superfície, abreviadamente, por SA (superfície de asserção). Convencionalmente usaremos letras maiúsculas de nosso alfabeto para designar sentenças declarativas. Teremos, conforme as sentenças acima:

P: *Beatriz é bióloga molecular*

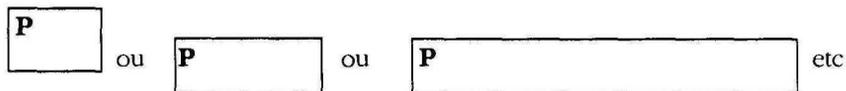
Q: *Dolly é um clone*

Assim como são estabelecidos sinais que designam operações do cálculo sentencial – (\sim) negação, (\wedge) conjunção, (\vee) disjunção, (\rightarrow) implicação, (\leftrightarrow) dupla implicação –, introduziremos convenções que permitem representar estes operadores na linguagem dos GE.

Se representamos por

P

uma sentença declarativa em uma SA, representaremos sua negação por uma curva contínua fechada que cerca P

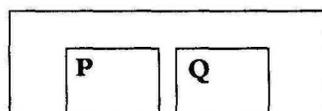


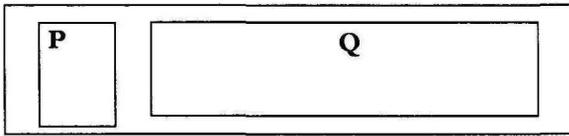
Representaremos a conjunção das sentenças P e Q ($P \wedge Q$) por:

P Q

O leitor pode observar, ao consultar a lista de tautologias do cálculo sentencial (e.g. Kleene 1952), que a disjunção das sentenças P e Q, ($P \vee Q$), pode ser expressa em termos de negação e da conjunção por $\sim (\sim P \wedge \sim Q)$.

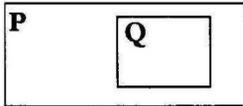
Conforme os GE, a disjunção de P e Q assume a forma:



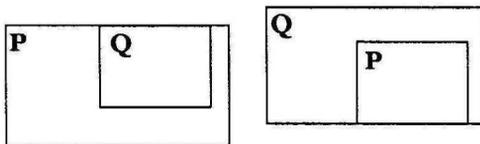


Esta representação não é unívoca podendo ser representada por: ou por qualquer deformação destas curvas. Os GE são *casos* particulares de um paradigma de natureza topológica, *topovisuais*, como afirma Harel (1995:235) – “formas, localizações, distâncias e tamanhos não têm qualquer significado” neste paradigma. Para Faris (1981: 227), as propriedades de deformação de um GE, quando mantidas as *conexões* de suas partes, constituem uma das leis que governa experimentos com grafos lógicos.

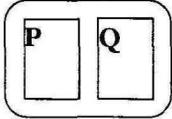
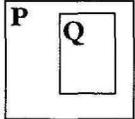
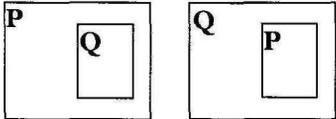
Analogamente, o condicional “se P então Q”, ($P \rightarrow Q$), pode ser escrito em termos de negação e conjunção sob a forma $\sim(P \wedge \sim Q)$, que em GE:



Finalmente, a dupla implicação “P se, e somente se, Q”, ($P \leftrightarrow Q$), pode ser expressa em termos da implicação e da conjunção por $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ que em GE:



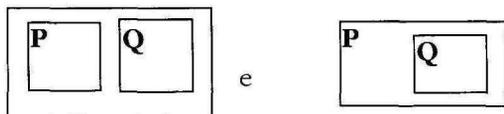
O leitor pode comparar (tabela abaixo) três notações do cálculo sentencial – linguagem natural, notação polonesa, e notação ocidental – com a notação dos GE³:

Linguagem natural	Notação polonesa	Linguagem do cálculo sentencial	Linguagem dos GE
P	p	P	P
Não P	Np	$\sim P$	
P e Q	Kpq	$(P \wedge Q)$	P Q
P ou Q	Apq	$(P \vee Q) \leftrightarrow \sim(\sim P \wedge \sim Q)$	
Se P então Q	Cpq	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \sim(P \wedge \sim Q)$	
P se e somente se Q	Epq	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$	

As linhas que cercam as letras sentenciais, e mesmo as partes de um grafo, são chamadas cortes, ou níveis. Convencionamos que SA, onde escrevemos os grafos, tem nível dois. Embora não tenhamos níveis inferiores a dois, podemos ter níveis de qualquer grandeza maior que dois. Podemos considerar, além disso, que há, em cada um dos pontos de SA, uma sentença básica “invisível”, sempre verdadeira: “Você pode fazer, aqui, uma asserção.” SA não é, portanto, um conjunto vazio de asserções. Esta convenção nos permite considerar um corte, sem qualquer letra sentencial em seu interior, como um grafo. Ele pode ser considerado como a negação de nossa sentença básica. Como esta, por hipótese, é uma sentença verdadeira,

sua negação, e obviamente o grafo a ela correspondente, é uma sentença falsa e segundo nossas convenções de nível três.

A esta altura introduziremos a noção de sub-grafo, cuja utilidade veremos a seguir. Se observarmos os grafos correspondentes às expressões do cálculo sentencial $(P \vee Q)$ e $(P \rightarrow Q)$, que representamos, respectivamente, por

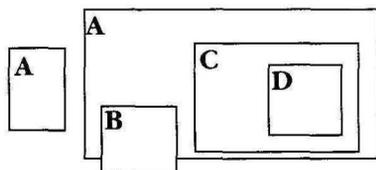


as variáveis P e Q , no primeiro caso, e Q , no segundo, são cercadas por *cortes* que, por sua vez, são cercados por outros cortes de nível superior. Dizemos, então, que

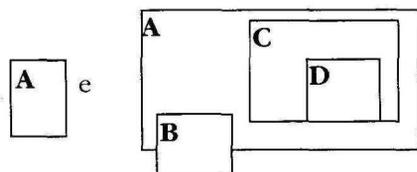


são sub-grafos dos grafos iniciais que correspondem às expressões citadas do cálculo sentencial. Em resumo, um sub-grafo é um grafo de um certo nível, que coexiste com grafos de níveis distintos.

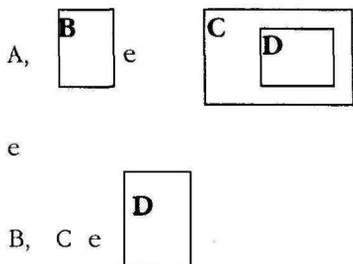
No exemplo abaixo



são de mesmo nível os grafos



assim como



No cálculo sentencial, uma vez conhecidas as regras de formação, por meio das quais distinguimos as expressões da linguagem (fórmulas) das expressões mal formadas, estabelecemos, no caso do método denominado *dedução natural*, uma série de regras básicas: *modus ponens*, *modus tollens*, *silogismo hipotético*, etc. Estas regras nos permitem fazer deduções e analisar argumentos. Nos GE também temos as regras de transformação por meio das quais um grafo pode ser modificado.

III. GRAFOS EXISTENCIAIS — REGRAS DE TRANSFORMAÇÃO

Sabemos, no caso do cálculo sentencial que, se as premissas de uma regra de inferência são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira. Analogamente, se partimos de um grafo que representa uma proposição verdadeira, ao transformá-lo, de acordo com as regras estabelecidas, teremos, ao fim de cada transformação, um grafo que representa uma proposição verdadeira. Segundo Shin (1994: 24), “Peirce foi provavelmente o primeiro lógico que discutiu regras de transformação em um sistema [lógico] diagramático”. Nas palavras de Peirce (CP 4.361), “‘regra’ é aqui utilizada no sentido em que falamos de regra em álgebra, que é, como uma permissão sob condições estritamente definidas”.

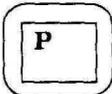
Devemos observar que, como no caso clássico, não afirmamos que necessariamente partimos de premissas ou grafos que representam proposições verdadeiras. Contudo, caso isto aconteça, garantimos que as regras estabelecidas preservam a verdade.

- **Regra 1:** duplo corte (DC): um duplo corte pode ser acrescentado ou removido de um grafo qualquer. (A regra correspondente no cálculo sentencial é a dupla negação.)

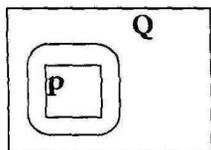
Esta regra pode ser enunciada da seguinte forma: um número finito e par de cortes pode ser acrescentado, ou removido, de qualquer grafo. Analogamente, podemos afirmar, no caso da lógica clássica, que a inserção ou eliminação de um número de negações, par e finito, não altera o valor de verdade de uma sentença. Obviamente, de uma formulação podemos derivar outra, como pode ser verificado.

As expressões: P e $\sim\sim P$

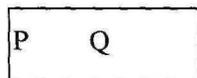
assim como

P e  são equivalentes.

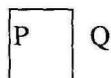
Observação: o nome desta regra parece, à primeira vista, inadequado. A regra não nos permite remover dois cortes quaisquer. O que é permitido fazer é remover dois cortes *concêntricos consecutivos*. Assim o grafo



pode ser transformado em

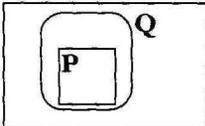


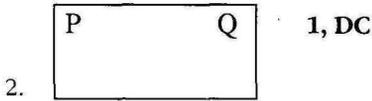
mas não em



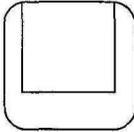
Em ambos os casos eliminamos dois cortes, porém, no segundo, os cortes não são *concêntricos consecutivos*.

Como fazemos na dedução no cálculo sentencial, posicionamos os grafos à esquerda e a justificativa à direita. Temos:

1.  **P (premissa)**



Finalmente devemos observar que a expressão



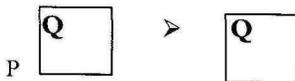
é um grafo em virtude da convenção feita sobre os pontos da SA.

- **Regra 2:** apagamento aos pares (AP): qualquer grafo no interior de um número par de cortes (de nível par) pode ser apagado.

Vejamos alguns exemplos. Consideremos os grafos



Conforme a regra 2 (AP) podemos fazer as seguintes transformações:



onde o sinal \triangleright é empregado com o mesmo significado do sinal de Frege \ulcorner – o que se segue a ele deriva das expressões que o precedem.

Constatamos a correção das expressões acima pelo mesmo método usado no cálculo sentencial. Admitimos, por absurdo, que podemos ter premissas verdadeiras e conclusão falsa. Se a transformação preserva a verdade, devemos chegar a uma contradição. De fato temos:

$$P \quad \sim Q \quad \triangleright \quad P$$

$$\mathbf{V} \quad \quad \quad \mathbf{F}$$

Neste caso, a solução é trivial pois a contradição surge do fato de admitirmos que a premissa P assume o valor V e a conclusão P assume o valor F.

Analogamente para:

$$P \quad \sim Q \quad \triangleright \quad \sim Q$$

$$\mathbf{V} \quad \quad \quad \mathbf{F}$$

Contudo, a transformação

$$P \quad \boxed{Q} \quad \triangleright \quad Q$$

não preserva a verdade, pois é possível, neste caso, que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa, como verificamos em:

$$P \quad \sim Q \quad \triangleright \quad Q$$

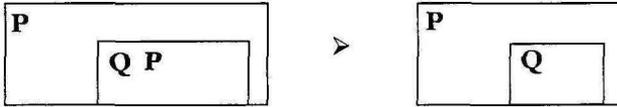
$$\mathbf{V} \quad \mathbf{V} \quad \mathbf{F} \quad \quad \quad \mathbf{F}$$

Neste caso escrevemos

$$P \quad \boxed{Q} \quad \triangleright \! \! \! | \quad Q$$

$$\text{Ou: } P \quad \sim Q \quad \triangleright \! \! \! | \quad Q$$

Consideremos um exemplo mais complexo:



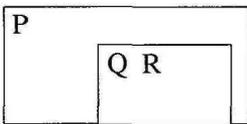
$$\sim (P \wedge \sim (Q \wedge R)) \triangleright \sim (P \wedge \sim Q)$$

$$\underline{V} \quad \underline{V} \quad \underline{F} \quad \underline{F} \quad \underline{V} \quad \underline{V} \quad \underline{F} \quad \underline{V} \quad \underline{V} \quad \underline{V} \quad \underline{V} \quad \underline{F}$$

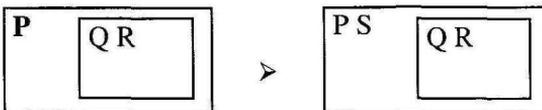
Chegamos a uma contradição: Q assume o valor V na premissa e F na conclusão. Portanto a inferência é correta.

- **Regra 3:** inserção em ímpar (II): no interior de um número ímpar de cortes, qualquer grafo pode ser inserido.

De volta ao exemplo considerado, quando introduzimos a regra 2 (AP)



de acordo com a regra 3 (II) podemos escrever



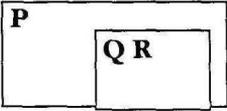
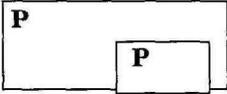
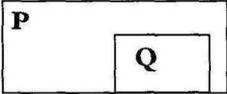
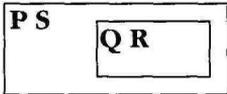
ou na linguagem usual do cálculo sentencial:

$$P \rightarrow (Q \wedge R) \triangleright (P \wedge S) \rightarrow (Q \wedge R)$$

A correção desta inferência pode ser verificada pelo processo usado anteriormente ou pela cadeia de equivalências que segue:

- | | |
|---|----------------------|
| 1. $P \rightarrow (Q \wedge R)$ | P (premissa) |
| 2. $\sim P \vee (Q \wedge R)$ | 1 Def. \rightarrow |
| 3. $(\sim P \vee \sim S) \vee (Q \wedge R)$ | 2 Ad. |
| 4. $\sim(P \wedge S) \vee (Q \wedge R)$ | 3 De Morgan |
| 5. $(P \wedge S) \rightarrow (Q \wedge R)$ | 4 Def. \rightarrow |

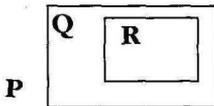
Sintetizando as passagens até aqui obtidas, podemos escrever:

- | | | |
|----|---|---------------------|
| 1. |  | P (premissa) |
| 2. |  | 1. AP |
| 3. |  | 1. AP |
| 4. |  | 1.II |

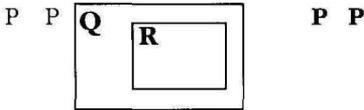
Estamos agora em condições de estabelecer uma nova regra.

- **Regra 4:** Iteração (I): qualquer grafo, em qualquer região de SA, pode ser repetido (iterado) nessa região, ou em qualquer outra no interior de cortes adicionais.

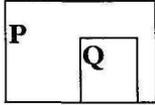
Na forma seguinte, P ocorre em nível SA



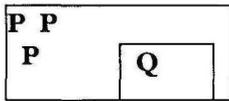
Conforme esta regra, ele pode ser iterado na mesma região, como em



ou

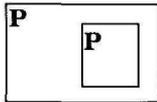


que pode ser iterado em



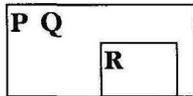
Esta parte da regra é justificada pelas equivalências:
 $(P \wedge P) \leftrightarrow P$, ou, em geral: $(P \wedge P \wedge \dots \wedge P) \leftrightarrow P$

A segunda parte da regra é assim justificada. Temos que a contradição $(P \wedge \sim P)$ é sempre falsa e, portanto, sua negação $\sim(P \wedge \sim P)$ ou em termos dos GE

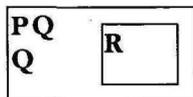


é uma asserção sempre verdadeira (uma tautologia). Assim sendo, ela pode ser inserida em qualquer nível desejado que o valor veritativo da asserção anterior não se altera, já que a nova asserção é equivalente à anterior.

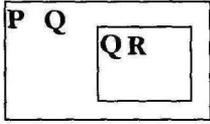
No grafo seguinte:



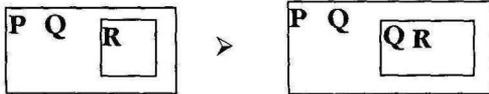
A regra 4 (I) nos permite fazer



ou ainda



que corresponde a



ou:

$$((P \wedge Q) \rightarrow R) \triangleright ((P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge R))$$

que pode ser verificado pelo método das tabelas veritativas, ou pela sequência abaixo:

- | | |
|--|---|
| 1: $(P \wedge Q) \rightarrow R$ | P (premissa) |
| 2: $(P \wedge Q \wedge Q) \rightarrow R$ | 1. Idempotência (imp.) |
| 3: $(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge R)$ | 2. Princípio de exportação-importação (exp-imp) |

Devemos, contudo, notar que a regra não nos permite escrever



que corresponde a

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \triangleright Q \wedge ((P \wedge Q) \rightarrow R)$$

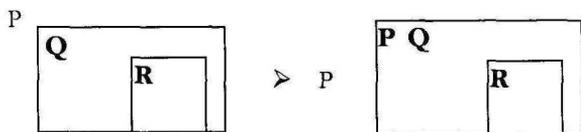
que não é correto pois obtemos

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \triangleright Q \wedge (P \wedge Q \rightarrow R)$$

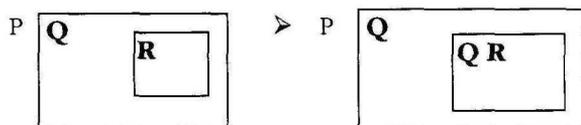
F	<u>V</u>	F	<u>F</u>
---	----------	---	----------

Isto se deve ao fato de que, neste caso, o Q (iterado) não está inserido em cortes adicionais, como a regra 4 exige.

Devemos ainda notar que transformações como

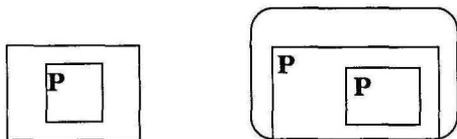


e



podem ser justificadas por iteração (I) ou por inserção em ímpar (II), já que as iterações foram feitas em níveis ímpares. A distinção entre I (iteração) e II (inserção em ímpar) é que a primeira permite inserções em níveis pares e ímpares, uma vez satisfeitas as restrições que ela impõe.

Ainda relativamente às restrições da regra 4 (I), ela impede transformações do tipo:



ou seja:

$$\sim \sim P \triangleright \sim \sim (P \wedge \sim P)$$

ou ainda:

$$P \triangleright P \wedge \sim P$$

evidentemente incorreta.

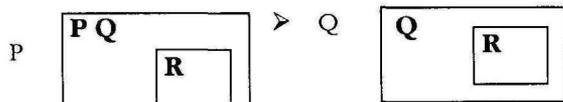
Finalmente a última regra.

- **Regra 5:** deiteração (DI): qualquer grafo, cuja ocorrência pode ser obtida por iteração, pode ser apagado.

Não é necessário que o grafo tenha sido formado por iteração. Basta que as condições para aplicação da regra 4 (II) sejam satisfeitas. Logo, para que possamos

aplicar a regra 5 devem existir, pelo menos, duas instâncias deste grafo envolvidas por um conjunto de cortes e a instância eliminada é a de nível mais alto. Naturalmente se considerarmos instâncias de mesmo nível, apenas uma instância deve permanecer, podendo as demais ser apagadas.

Um exemplo de deiteração é

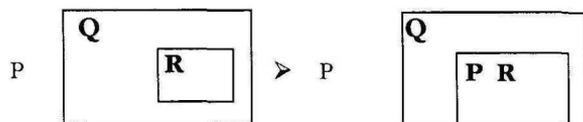


ou seja

$$P \wedge ((P \wedge Q) \rightarrow R) \triangleright P \wedge (Q \rightarrow R)$$

que é válido.

Podemos, ainda, constatar que, por iteração, podemos escrever:



ou seja,

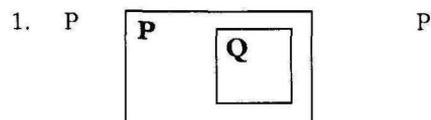
$$(P \wedge (Q \rightarrow R)) \triangleright (P \wedge (Q \rightarrow (P \wedge R)))$$

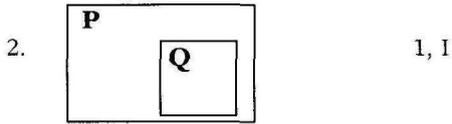
que, como podemos verificar é uma inferência correta.

IV. APLICAÇÕES

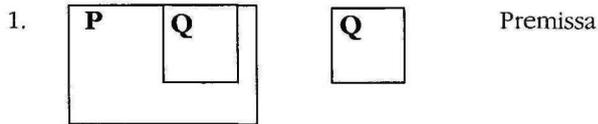
Finalmente, as regras *modus ponens* (MP), *modus tollens* (MT), silogismo hipotético, podem ser justificadas, em GE, por meio das regras de transformação apresentadas.

Modus Ponens:

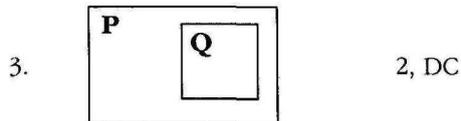
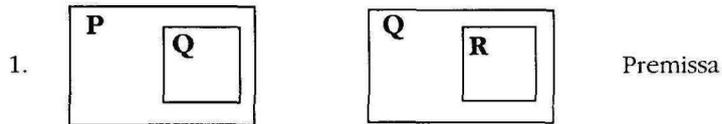




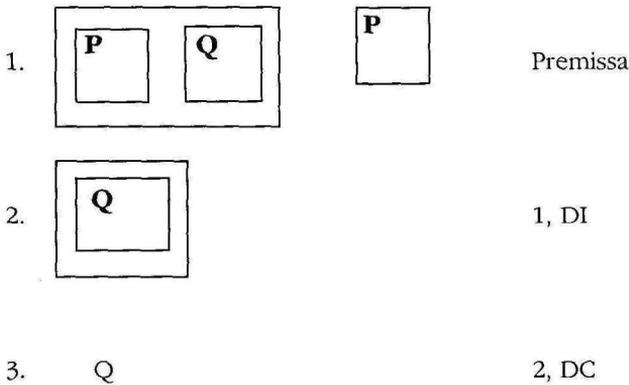
Modus Tollens:



Silogismo hipotético:



Silogismo Disjuntivo:



V. AXIOMÁTICA E TEOREMA NOS GE

Apresentamos, a seguir, a axiomática utilizada em E. Medelson (1964), na qual as letras iniciais maiúsculas de nosso alfabeto são variáveis metalógicas. Em seguida transcrevemos os axiomas, e a demonstração de um teorema, para a notação gráfica dos GE.

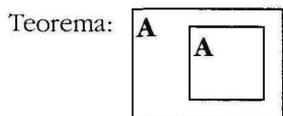
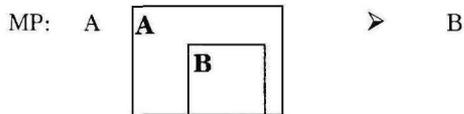
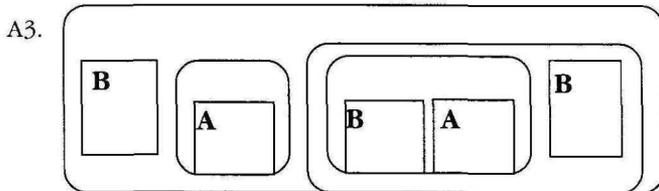
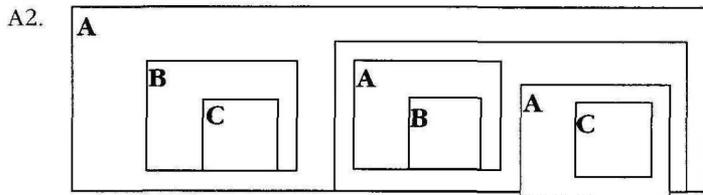
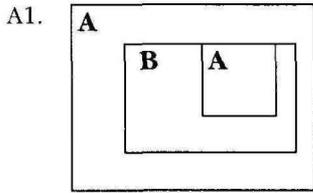
- A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- A3. $(\sim B \rightarrow \sim A) \rightarrow ((\sim B \rightarrow A) \rightarrow B)$

Regra de inferência: $A \quad A \rightarrow B \triangleright B$ (*Modus Ponens*)

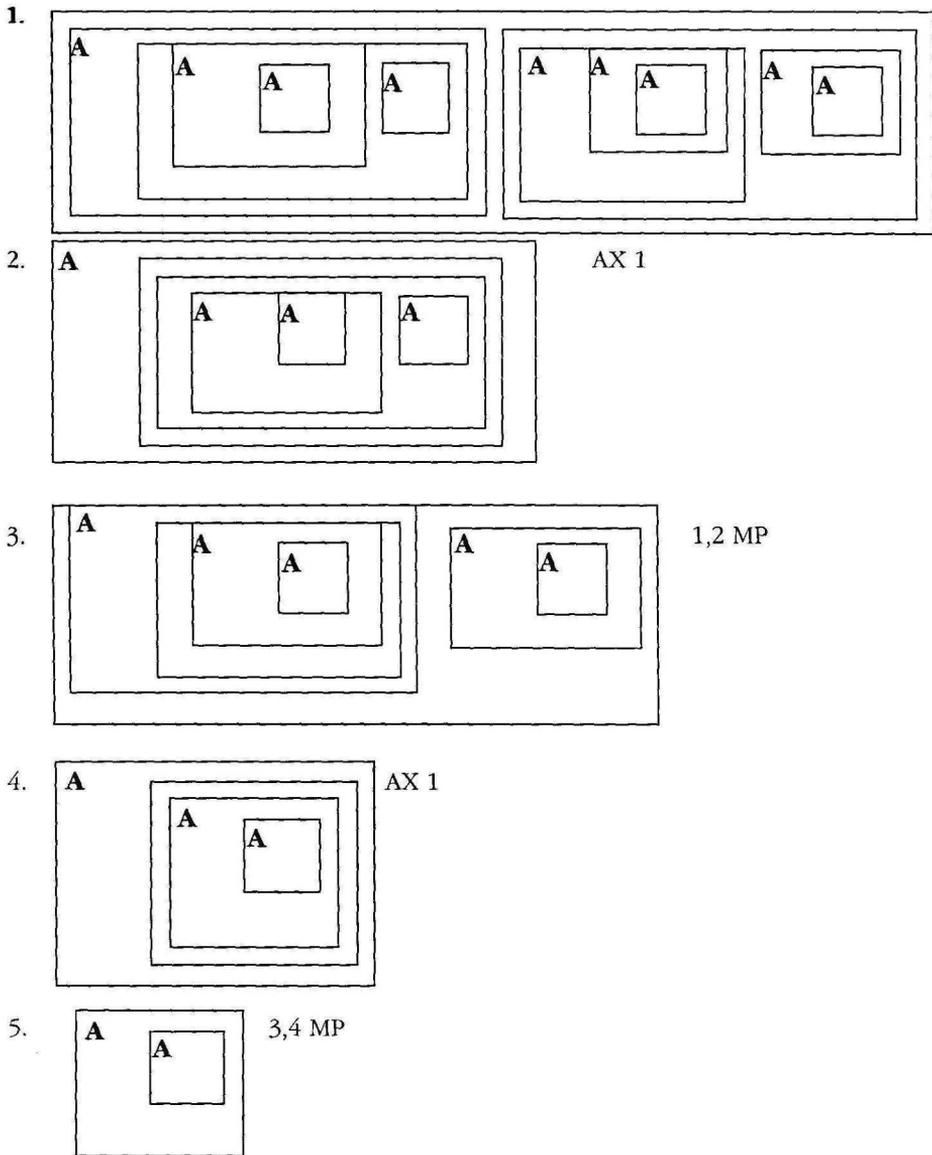
Teorema: $A \rightarrow A$

- | | | |
|----|---|---------|
| 1. | $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ | Ax 2 |
| 2. | $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A))$ | Ax 1 |
| 3. | $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ | 1, 2 MP |
| 4. | $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ | Ax 1 |
| 5. | $A \rightarrow A$ | 3,4 MP |

Axiomática em notação dos GE:



Demonstração:



VI. CONCLUSÃO

É conhecido o descaso que a história da lógica legou aos tratamentos formais geométrico-topológicos. Bochenski, por exemplo, não dedica mais do que um parágrafo de seu clássico *A History of Formal Logic* (1961) aos “diagramas silogísticos”. Entretanto, esta negligência parece aproximar-se do fim. É notável o interesse pelo desenvolvimento de sistemas híbridos de notação – *heterogeneous logic* (Barwise & Etchemendy 1995) – baseados em grafos, diagramas, mapas, redes, *frames*. Testemunhamos a fundação de centros de pesquisas dedicados a criação e desenvolvimento destes sistemas – *Visual Inference Laboratory* (Indiana University), *Center for the Study of Language and Information* (Stanford University) –, a crescente publicação de livros sobre o assunto (Gardner 1951, Shin 1994, Hammer 1995, Allwein & Barwise 1996), artigos em periódicos especializados, além da criação de uma área científica baseada nos GE – *conceptual graphs* (Sowa 1984) – e a realização de congressos dedicados a esta área (Searle 1997).

Introduzimos, neste artigo, o sistema Alfa dos GE correspondente do cálculo sentencial clássico. Em tratamentos futuros, veremos a completude, correção e semântica deste sistema, um trabalho já iniciado por Shin (1995) e Hammer (1994, 1995a, 1995b), e introduziremos os sistemas Beta e Gama, equivalentes, respectivamente, do cálculo de predicado de primeira ordem e de um tipo de lógica modal.

NOTAS

1. Citamos as obras de Peirce através da seguinte convenção: os *Collected Papers* são citados como CP, seguido pelo número do volume e parágrafo. Os *Writings of C.S. Peirce (a chronological edition)* são citados como W seguido pelo número do volume e parágrafo.
2. Sobre os diversos desenvolvimentos de Peirce em Lógica, Semiótica, Fenomenologia, Metafísica, etc. consultar: *Digital Encyclopedia of C.S. Peirce*. Ed. Queiroz, João.
3. Em notação polonesa os conectivos negação, conjunção, disjunção, implicação, e dupla implicação são representados, respectivamente, pelas letras maiúsculas de nosso alfabeto: N, K, A, C, E. Representamos as sentenças pelas letras minúsculas de nosso alfabeto. No caso dos GE, as curvas fechadas que envolvem as letras sentenciais podem ser substituídas por parênteses. Assim, a negação de P pode ser representada por (P), e a implicação de P e Q por (P(Q)) etc.

REFERÊNCIAS

- Barwise, Jon & Etchemendy, John. “Heterogeneous Logic” in: Glasgow, Janice *et al.* (Eds.). *Diagrammatic reasoning – cognitive and computational perspective*. CA: The AAAI Press. 1995.
- Allwein, Gerard & Barwise, Jon. *Logical reasoning with diagrams*. Oxford University Press. 1996.
- Bochenski. *A history of formal logic*. Notre Dame: Indiana. 1961

- Faris, J.A. Charles S. Peirce's Existential Graphs. *Bulletin: The institute of mathematics and its applications*. p. 226-233. 1981.
- Gardner, Martin. *Logic machines and diagrams*. The University of Chicago Press, 1951 [1982].
- Hammer, Eric. Reasoning with sentences and diagrams. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 35 (1) 73-87. 1994.
- _____. Peirce on logical diagrams. *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 31 (4): 807-827. 1995a.
- _____. *Logic and visual information*. CSLI Publications – Stanford: CA. 1995b.
- Harel, David. *On visual formalism*. In: Glasgow, Janice et al. (Eds.). *Diagrammatic Reasoning – cognitive and computational perspective*. CA: The AAAI Press, 1995. p. 235-271.
- Hintikka, Jaakko & Hilpinen, Risto. In: Houser, Nathan, Roberts, Don & Evra, James Van (Eds.). *Studies in the logic of Charles S. Peirce*. Indiana: Indiana University Press, 1997. p. ix-x.
- Houser, Nathan. *Introduction: Peirce as logician*. In: Houser, Nathan, Roberts, Don & Evra, James Van (Eds.). *Studies in the logic of Charles S. Peirce*. Indiana: Indiana University Press, 1997, p. 1-22.
- Kent, Beverly. *Charles S. Peirce: Logic and the classification of the sciences*. McGill-Queen's University Press, 1987
- Kleene, Stephan C. *Introduction to metamathematics*. Amsterdam: North Holland, 1952.
- Lane, Robert *Triadic logic*. In: Queiroz, João. *Digital encyclopedia of Charles S. Peirce*. www.tr3s.com.br/peirce 2001.
- Lukasiewicz, Jan. *Selected works*. (ed.) L. Borkowski. North-Holland: Amsterdam, 1961 [1970].
- Mendelson, Eliot. *Introduction to mathematical logic*. Princeton: New Jersey, 1964.
- Peirce, Charles S. *The collected papers of Charles Sanders Peirce*. Electronic edition. Vols. I-VI. Eds. Hartshorne, C. & Weiss, P.. Charlottesville: Intelix Corporation. Cambridge: Harvard University. 1931-1935. [Citado como CP, seguido pelo número do volume e parágrafo.]
- _____. *The collected papers of Charles Sanders Peirce*. Vols. VII-VIII. Ed. Burks, A. W. Electronic edition. Charlottesville: Intelix Corporation (1994 [1866-1913]). 1958 [Citado como CP, seguido pelo número do volume e parágrafo.]
- Putnam, Hilary. "Peirce the Logician" *História Matemática* 9, 290-301, 1982.
- _____. Enciclopédia EINAUDI – Vol. 13. *Lógica combinatória*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda, 1988.
- Queiroz, João. (ed.). *Digital encyclopedia of Charles S. Peirce*. www.tr3s.com.br/peirce 2001.
- Quine, Willard.V. *Peirce's Logic*. In: Ketner, Ken et al (Ed.). *Proceedings of the Charles S. Peirce Bicentennial International Congress*. Lubbock: Texas Tech Press, 1995. p. 23-31.
- Roberts, Don. *The existential graphs of Charles S. Peirce*. Mouton: The Hage, 1973.
- Searle, Leroy et al. (Eds.) *Conceptual structures: Fulfilling Peirce's dream – Fifth International Conference on Conceptual Structures, ICCS'97*. Springer, 1997.
- Shin, Sun-Joo (1994). *The logical status of diagrams*. Cambridge University Press.
- Sowa, John. *Conceptual structures: Information processing in mind and machine*. Addison Wesley: Reading Mass, 1984.
- Zeman, Jay (1986). *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 22 (1): 1-22.