LINDENBAUMOLOGIA I: A TEORIA GERAL

LINDENBAUMOLOGY I: THE GENERAL THEORY

Prof. Dr. EDÉLCIO G. DE SOUZA

Resumo: Apresentamos uma abordagem geral da demonstração de completude de cálculos lógicos abstratos por meio da noção de valoração e de um resultado devido a A. Lindenbaum.

Abstract: We present a general approach to the proof the completeness of abstract logical calculi through the notion of valuation and of a result due to A. Lindenbaum.

1. INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é apresentar uma técnica geral para a demonstração de completude de cálculos lógicos por meio de um importante teorema devido a A. Lindenbaum. Aqui, o leitor não encontrará nenhum resultado novo, mas apenas um modo particular de apresentar técnicas e métodos presentes na literatura. O conceito central é o de *valoração* devido a Newton C. A. da Costa que desenvolveu uma série de trabalhos sobre semânticas de cálculos paraconsistentes visando a demonstração de completude dos mesmos. Nessa primeira parte, apresentamos a teoria geral e deixamos para um próximo artigo o tratamento de algumas aplicações. Essa presente parte foi parcialmente inspirada na Tese de Doutoramento de Jean-Yves Béziau, *Recherches sur la Logique Universelle: excessivité, négation, sequents*, defendida na Universidade de Paris VII. É claro que possíveis enganos são de nossa própria responsabilidade.

2. K-VALORAÇÕES

Seja A um conjunto e K uma família de subconjuntos de A, i.e., $K \subseteq \wp(A)$. Um elemento de K é denominado uma K-**valoração** para A. Utilizamos letras latinas minúsculas para denotar elementos de A e maiúsculas para subconjuntos de A.

Edélcio G. de Souza é professor do Departamento de Filosofia da PUC/SP.

Considere, agora, um subconjunto B de A. Definimos o conjunto dos K-**modelos** de B, denotado por $Mod_K(B)$, por:

$$Mod_K(B) = \{V \in K: B \subseteq V\}.$$

De modo análogo, define-se o conjunto dos K-modelos de um elemento a de A por:

$$Mod_K(a) = Mod_K(\{a\}) = \{V \in K: \{a\} \subseteq V\} = \{V \in K: a \in V\}.$$

Com a noção de K-modelo, define-se, dado um subconjunto B de A, o conjunto das K-**conseqüências** de B, denotado por $Cn_K(B)$, por:

$$Cn_K(B) = \{a \in A: Mod_K(B) \subseteq Mod_K(a)\}.$$

Assim, um elemento a de A é uma K-conseqüencia de B se e somente se todo K-modelo de B é K-modelo de a.

Vamos destacar três propriedades da noção de K-conseqüência enunciadas na:

Proposição 1. Sejam A um conjunto e K uma família de K-valorações para A. Então, valem os seguintes resultados, para todo B,C subconjuntos de A:

(i) $B \subseteq Cn_K(B)$;
(ii) Se $B \subseteq C$, então $Cn_K(B) \subseteq Cn_K(C)$;
(iii) $Cn_K(B) = Cn_K(Cn_K(B))$.

Demonstração. (i) e (ii) são imediatas. Para (iii), repare que de (i) e (ii) tem-se que $Cn_K(B) \subseteq Cn_K(Cn_K(B))$. Suponha que $a \in Cn_K(Cn_K(B))$. É preciso mostrar que $a \in Cn_K(B)$, i.e., $Mod_K(B) \subseteq Mod_K(a)$. Considere, então, $V \in Mod_K(B)$, vamos mostrar que $V \in Mod_K(a)$. Seja $D = Cn_K(B)$. Assim, $Mod_K(B) \subseteq Mod_K(d)$, para todo $d \in D$. Logo, como $V \in Mod_K(B)$, temos que $V \in Mod_K(d)$ para todo $d \in D$, ou seja, $d \in V$ para todo $d \in D$, i.e., $D \subseteq V$. Então, $V \in Mod_K(D)$. Mas, como $a \in Cn_K(Cn_K(B)) = Cn_K(D)$, então $Mod_K(D) \subseteq Mod_K(a)$. Como $V \in Mod_K(D)$, tem-se que $V \in Mod_K(a)$, que é o que queríamos demonstrar. QED

Passemos, agora, ao conceito de cálculo lógico que será relacionado a seguir com a noção aqui desenvolvida de valoração.

3. CÁLCULOS LÓGICOS

Um **cálculo lógico** L é um par $L = (For, Cn_L)$ tal que For é um conjunto não vazio e enumerável cujos elementos são denominados **fórmulas** de L e Cn_L é uma operação, denominada **operador de conseqüência**, definida no conjunto dos subconjuntos de For, ou seja, $Cn_L: \wp(For) \rightarrow \wp(For)$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(1) **Autodedutibilidade**: $B \subseteq Cn_L(B)$;
(2) **Monotonicidade**: Se $B \subseteq C$, então $Cn_L(B) \subseteq Cn_L(C)$;
(3) **Idempotência**: $Cn_L(B) = Cn_L(Cn_L(B))$;
(4) **Compacidade**: $Cn_L(B) = \cup\, Cn_L(B')$ para todo $B' \subseteq B$ finito.

Observe que, com exceção da condição (4), as propriedades de Cn_L e de Cn_K, definidas na seção anterior para uma dada K-valoração, são as mesmas; o que parece indicar que, sob certas condições, eles definem o mesmo conjunto. O objetivo é determinar que classes interessantes de fórmulas, tomadas como K-valorações, são tais que $Cn_L(A) = Cn_K(A)$ para todo subconjunto A de For. Para isso, necessitamos definir mais alguns conceitos.

Seja $T \subseteq For$. Dizemos que T é **consistente** se e somente se $Cn_L(T) \neq For$, em caso contrário T é dito **inconsistente**. Dizemos que T é uma **teoria** se e somente se $T = Cn_L(T)$. Se $a \in For$, dizemos que T é a-**saturado** se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $a \notin Cn_L(T)$;
(ii) $a \in Cn_L(T \cup \{b\})$ para toda $b \notin T$.

T é dito **saturado** se e somente se existe $a \in For$ tal que T é a-saturado.

Vamos utilizar as seguintes abreviações:
TEO para a família das teorias;
SAT para a família dos conjuntos saturados;
CON para a família dos conjuntos consistentes e
$TEO^* = TEO \cap CON$ para a família das teorias consistentes.
Mostremos que todo conjunto saturado é teoria consistente, ou seja:

Proposição 2. $SAT \subseteq TEO^*$.

Lema. Se $B \subseteq Cn_L(A)$ e $a \in Cn_L(B)$, então $a \in Cn_L(A)$.

Demonstração. Suponha que $B \subseteq Cn_L(A)$ e $a \in Cn_L(B)$. Como $B \subseteq Cn_L(A)$, por monotonicidade, temos que $Cn_L(B) \subseteq Cn_L(Cn_L(A))$. Daí, por idempotência, temos que $Cn_L(B) \subseteq Cn_L(A)$. Mas, como $a \in Cn_L(B)$, obtemos que $a \in Cn_L(A)$. QED

Demonstração da proposição 2. Seja $T \in SAT$. Então, existe $a \in For$ tal que T é a-saturado. Assim, temos que: (i) $a \notin Cn_L(T)$ e (ii) $a \in Cn_L(T \cup \{b\})$ para toda $b \notin T$. De (i) segue que $T \in CON$. Suponha por absurdo que T não é teoria, i.e., existe $b \in For$ tal que $b \notin T$ e $b \in Cn_L(T)$. Como $b \notin T$, por (ii), temos que $a \in Cn_L(T \cup \{b\})$. Por outro lado, por autodedutibilidade, $T \subseteq Cn_L(T)$ e, como $b \in Cn_L(T)$, temos que $T \cup \{b\} \subseteq Cn_L(T)$. Segue, então, que $T \cup \{b\} \subseteq Cn_L(T)$ e $a \in Cn_L(T \cup \{b\})$. Assim, pelo lema, $a \in Cn_L(T)$ (contradição!). Logo, T é teoria, i.e., $T \in TEO$. Como vimos que $T \in CON$, temos que $T \in TEO \cap CON = TEO^*$. Portanto, $SAT \subseteq TEO^*$. QED

Passemos, agora, ao conceito de completude. Para as próximas seções fixaremos um cálculo lógico $L = (For, Cn_L)$ dado.

4. SAT-VALORAÇÕES

Seja $L = (For, Cn_L)$ um cálculo lógico e K uma família de K-valorações para For. Dizemos que K é **correto** para L se e somente se $Cn_L(A) \subseteq Cn_K(A)$ para todo $A \subseteq For$. Dizemos que K é **completo** para L se e somente se $Cn_K(A) \subseteq Cn_L(A)$ para todo $A \subseteq For$.

Nosso problema consiste em estudar a correção e completude de L quando K é a classe dos conjuntos saturados, i.e., quando K = SAT. Nesse caso, lembremos que:

$Cn_{SAT}(A) = \{a \in For: Mod_{SAT}(A) \subseteq Mod_{SAT}(a)\}$;

$Mod_{SAT}(A) = \{V \in SAT: A \subseteq V\}$ e

$Mod_{SAT}(a) = \{V \in SAT: a \in V\}$.

A correção é um resultado fácil.

Teorema 1. (Correção de SAT). Seja $L = (For, Cn_L)$ um cálculo lógico e considere as SAT-valorações para For. Então, $Cn_L(A) \subseteq Cn_{SAT}(A)$ para todo $A \subseteq For$.

Demonstração. Seja $a \in Cn_L(A)$. Precisamos mostrar que $a \in Cn_{SAT}(A)$, i.e., $Mod_{SAT}(A) \subseteq Mod_{SAT}(a)$. Considere, então $V \in Mod_{SAT}(A)$, e mostremos que $V \in Mod_{SAT}(a)$, i.e., $a \in V$. Como $V \in Mod_{SAT}(A)$, então temos que $V \in SAT$ e $A \subseteq V$. Como $A \subseteq V$, por monotonicidade, segue que $Cn_L(A) \subseteq Cn_L(V)$. Como $V \in SAT$, então, pela proposição 2, V é teoria, ou seja, $V = Cn_L(V)$. Logo, $Cn_L(A) \subseteq V$. Mas, $a \in Cn_L(A)$ e, portanto, $a \in V$, i.e., $V \in Mod_{SAT}(a)$. Logo, $Cn_L(A) \subseteq Cn_{SAT}(A)$. QED

Para a completude de SAT, a demonstração é mais complicada, de modo que faremos uso de um resultado devido a A. Lindenbaum que será estudado na próxima seção.

5. LINDENBAUMOLOGIA

Sejam $T \subseteq For$ e $a \in For$ tais que $a \notin Cn_L(T)$. Vamos construir a partir de a e T um conjunto $\Lambda_a(T)$ denominado uma **extensão de Lindenbaum** de T com respeito à fórmula a.

Lembrando que For é enumerável, fixemos uma enumeração dos seus elementos, ou seja, $For = \{a_1, a_2, ...\}$.

Vamos construir uma seqüência de conjuntos T_i com $i \in w$ (o conjunto do números naturais). Definimos:

$T_0 = T$
$T_1 = T_0 \cup \{a_1\}$ se $a \notin Cn_L(T_0 \cup \{a_1\})$
$T_1 = T_0$ se $a \in Cn_L(T_0 \cup \{a_1\})$
...
$T_n = T_{n-1} \cup \{a_n\}$ se $a \notin Cn_L(T_{n-1} \cup \{a_n\})$
$T_n = T_{n-1}$ se $a \in Cn_L(T_{n-1} \cup \{a_n\})$
...

Definimos, assim, $\Lambda_a(T) = \cup T_i$, com $i \in \omega$.

Vejamos algumas propriedades imediatas dos T_i's e de $\Lambda_a(T)$ que decorrem da construção acima:

(a) $T \subseteq T_i$ para todo $i \in \omega$;
(b) $T_i \subseteq \Lambda_a(T)$ para todo $i \in \omega$; em particular, $T \subseteq \Lambda_a(T)$;
(c) $T_i \subset T_j$ para todo $i,j \in \omega$, com $i < j$;
(d) $a \notin Cn_L(T_i)$ para todo $i \in \omega$;
(e) Se U é um subconjunto finito de $\Lambda_a(T)$, então existe $k \in \omega$ tal que $U \subseteq T_k$.

Mostremos que $\Lambda_a(T)$ é saturado.

Proposição 3. Sejam $T \subseteq For$ e $a \in For$ tais que $a \notin Cn_L(T)$. Então, $\Lambda_a(T) \in SAT$.

Demonstração. Considere $T \subseteq For$ e $a \in For$ tais que $a \notin Cn_L(T)$. Para mostrar que $\Lambda_a(T) \in SAT$, é preciso mostrar que : (i) $a \notin Cn_L(\Lambda_a(T))$; e (ii) $a \in Cn_L(\Lambda_a(T) \cup \{b\})$ para toda $b \notin \Lambda_a(T)$ Para (i), suponha, por absurdo, que $a \in Cn_L(\Lambda_a(T))$. Assim, por compacidade, existe um subconjunto finito U de $\Lambda_a(T)$ tal que $a \in Cn_L(U)$. Pela propriedade (e) acima, existe $k \in \omega$ tal que $U \subseteq T_k$. Por monotonicidade, temos que $Cn_L(U) \subseteq Cn_L(T_k)$. Como $a \in Cn_L(U)$, tem-se que $a \in Cn_L(T_k)$ contradizendo a propriedade (d) acima. Logo, $a \notin Cn_L(\Lambda_a(T))$, estabelecendo (i). Para (ii), considere $b \notin \Lambda_a(T)$. Seja $b = a_k$ na enumeração fixada. Como $a_k \notin \Lambda_a(T)$, então, pela construção acima, $a \in Cn_L(T_{k-1} \cup \{a_k\})$. Como, pela propriedade (b), $T_{k-1} \subseteq \Lambda_a(T)$, temos que $T_{k-1} \cup \{a_k\} \subseteq \Lambda_a(T) \cup \{a_k\}$ e, por monotonicidade, obtemos $Cn_L(T_{k-1} \cup \{a_k\}) \subseteq Cn_L(\Lambda_a(T) \cup \{a_k\})$. Assim, como $a \in Cn_L(T_{k-1} \cup \{a_k\})$, segue que $a \in Cn_L(\Lambda_a(T) \cup \{a_k\})$, i.e., $a \in Cn_L(\Lambda_a(T) \cup \{b\})$, estabelecendo (ii). Portanto, $\Lambda_a(T) \in SAT$. QED

Corolário. (O lema de Lindenbaum). Para todo conjunto consistente, existe um conjunto saturado que o contém.

Demonstração. Seja $T \subseteq For$ consistente, i.e., existe $a \in For$ tal que $a \notin Cn_L(T)$. Considere $\Lambda_a(T)$, a extensão de Lindenbaum de T com respeito à fórmula a. Pela propriedade (b), $T \subseteq \Lambda_a(T)$ e pela proposição 3, $\Lambda_a(T) \in SAT$. QED

Temos, agora, todas as ferramentas para a demonstração da completude de SAT.

Teorema 2. (Completude de SAT). Seja L = (For, Cn_L) um cálculo lógico e considere as SAT-valorações para For. Então, $Cn_{SAT}(A) \subseteq Cn_L(A)$ para todo $A \subseteq For$.

Demonstração. Seja $a \in Cn_{SAT}(A)$, i.e., $Mod_{SAT}(A) \subseteq Mod_{SAT}(a)$. Suponha, por absurdo, que $a \notin Cn_L(A)$. Assim, pelo lema de Lindenbaum, $\Lambda_a(T) \in SAT$ e $T \subseteq \Lambda_a(T)$. Então, $\Lambda_a(T) \in Mod_{SAT}(A)$. Mas, pela proposição 3, $a \notin Cn_L(\Lambda_a(T))$ e como $\Lambda_a(T)$ é teoria (proposição 2), temos que $a \notin \Lambda_a(T)$. Assim, $\Lambda_a(T) \notin Mod_{SAT}(a)$, o que mostra que $Mod_{SAT}(A)$ não é um subconjunto de $Mod_{SAT}(a)$, contradizendo nossa hipótese. Logo, segue o resultado. QED

6. OBSERVAÇÕES FINAIS

A noção de valoração aqui apresentada é devida a N. C. A. da Costa e pode ser consultada nos trabalhos de Da Costa e colaboradores que constam nas referências bibliográficas. Para um apanhado geral do conceito de valoração, bem como uma aplicação na demonstração de completude do cálculo proposicional clássico, ver Da Silva (2000).

Sobre cálculos lógicos, o leitor pode consultar os trabalhos clássicos de A. Tarski em Tarski (1983a,b). Para um estudo extensivo de Tarski (1983a) o leitor pode recorrer à dissertação de mestrado de Patrícia Velasco defendida na PUC-SP (ver Velasco (2000)).

O teorema de Lindenbaum aparece em Tarski (1983b), teorema 56, os trabalhos de Jean-Yves Béziau consultados podem ser encontrados nas referências bibliográficas.

Esse trabalho foi redigido com base em uma série de seminários que ministramos no Grupo de Lógica e Teoria da Ciência do Departamento de Filosofia da Universidade de São Paulo. As notas desses seminários foram redigidas pelo Alexandre Luís de Mello, a quem desejamos nossos agradecimentos. Agradecemos também a Juliano Maranhão e Patrícia Velasco por críticas e sugestões à versão preliminar do artigo.

BIBLIOGRAFIA

Béziau, J.-Y. Logiques construites suivant les méthodes de da Costa I. *Logique et Analyse, 33* (131-2), p. 259-72, 1990.

Béziau, J.-Y. *Recherches sur la Logique Universelle: excessivité, négation, sequents.* Tese de Doutorado. U. F. R. de Mathématique. Université Denis Diderot (Paris VII). Paris, 1995.

Béziau, J.-Y. Recherches sur la Logique Abstraite: les logiques normales. *Acta Universitatis Wratislaviensis, Serie Logika, 18,* p. 105-14, 1998.

Da Costa, N. C. A. *Sistemas Formais Inconsistentes.* Tese de Cátedra. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 1963.

Da Costa, N. C. A. On the Theory of Inconsistent Formal Systems. *Notre Dame Journal of formal Logic, 15* (4), p. 495-510, 1974.

Da Costa, N. C. A. e E. H. Alves. A Semantical Analysis of the Calculi Cn. *Notre Dame Journal of formal Logic, 18* (4), p. 621-30, 1977.

Da Costa, N. C. A. e J.-Y. Béziau. Théorie de la valuation. *Logique et Analyse, 37* (146), p. 95-117, 1994.

Da Costa, N. C. A. e A. Loparic. Paraconsistency, Paracompleteness and Valuations. *Logique et Analyse, 27* (106), p. 119-31, 1984.

Da Silva, J. A. *Sistemas formais e valorações: sobre um teorema geral de completude.* Dissertação de Mestrado. Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000.

Loparic, A. A Semantical Study of some Propositional Calculi. *The Journal of Non-Classical Logic 3* (1), p. 73-95. 1986.

Tarski, A. On some Fundamental Concepts of Metamathematics. *Logic, Semantics, Metamathematics.* Ed. J. Corcoran, 2nd ed. Hackett, 1983a.

Tarski, A. Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences. *Logic, Semantics, Metamathematics.* Ed. J. Corcoran, 2nd ed. Hackett, 1983b.

Velasco, P del N. *Estudos em lógica abstrata: sobre um artigo inaugural de A. Tarski.* Dissertação de Mestrado. Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000.