Conseqüência Lógica e Invariância

Logical Consequence and Invariance

Edelcio G. de Souza
Departamento de Filosofia – PUC-SP
edelcio@pucsp.br

Resumo: Apresentamos definições informais do conceito de conseqüência lógica e outros conceitos correlatos e extraímos algumas propriedades das mesmas. A seguir, utilizando-se a noção de estrutura valorativa, os conceitos são precisamente redefinidos e provamos que eles são invariantes pelo grupo de automorfismos dessas estruturas. Finalmente, discutimos a noção de invariância em estruturas mais gerais de primeira ordem.

Palavras-chave: Conseqüência lógica. Valorações. Automorfismos. Invariância.

Abstract: *We present informal definitions of the concept of logical consequence and other correlate concepts and we show some properties of them. In the following, using the notion of valuation structure, we redefine those concepts and prove that they are invariant under the group of automorphism of these structures. Finally, we discuss the notion of invariance in first order general structures.*

Keywords: *Logical consequence. Valuation. Automorphism. Invariance.*

1. Conseqüência Lógica

Se definíssemos a noção de argumento válido como aquele em que a conclusão segue necessariamente das premissas, estaríamos diante de uma definição no mínimo incompleta, pois, nesse caso, a noção de validade teria sido apenas substituída pela de conseqüência necessária.

Quando fornecemos uma definição, pretendemos que aquilo que se deseja definir, o *definiendum*, seja-o por meio de conceitos mais compreensivos que ocorrem na definição propriamente dita, o *definiens*. Assim, quando dizemos que um número é par se e somente se ele é divisível por dois; se a noção de "ser divisível" e a noção de "dois" já estão bem definidas, então estamos diante de uma definição aceitável.

A fim de focar a discussão na noção de conseqüência, vamos supor que argumentos são constituídos por sentenças, e o problema se resume em definir quando uma sentença é conseqüência de um conjunto de sentenças.

Tomamos aqui a noção de sentença como um conceito primitivo que não exige maiores explicações. A noção de conseqüência que será discutida não dependerá de uma possível estrutura interna do conceito de sentença, de modo que tomá-lo como primitivo é suficiente e, além disso, desejável.

Posto isso, vamos, em um primeiro momento, avaliar uma definição mais aceitável de conseqüência, extraindo algumas de suas propriedades.

> Dizemos que uma sentença é *conseqüência* de um conjunto de sentenças se e somente se qualquer situação que torne verdadeira as sentenças do conjunto torna também verdadeira a sentença dada.

Dito de outra forma: que uma sentença é conseqüência de um conjunto de sentenças se e somente se não houver situação em que as sentenças do conjunto são verdadeiras e a sentença dada, falsa.

Um rápido exame da definição acima parece apresentar mais problemas que a definição anterior, uma vez que temos agora mais conceitos envolvidos, a saber, o conceito de situação e o conceito de sentença verdadeira em uma dada situação.

Temos, assim, duas questões a serem examinadas:

1. Em que consiste uma situação?
2. Dada uma sentença e uma situação, o que significa dizer que a sentença é verdadeira na situação dada?

Em vez de abordar essas questões, vamos assumir que elas estão bem compreendidas e passemos à análise de algumas de suas conseqüências. Observemos primeiramente a seguinte propriedade:

Propriedade 1. *Qualquer sentença de um dado conjunto de sentenças é conseqüência do mesmo.*

De fato, para que uma sentença de um conjunto não fosse conseqüência dele, teria de haver uma situação em que as sentenças do conjunto são verdadeiras e a sentença dada, falsa; mas isso é impossível, pois uma vez que pertence ao conjunto, a sentença é verdadeira nessa situação.

Notemos que estamos assumindo verdadeiro e falso como antônimos, i.e., uma sentença é falsa em uma dada situação se ela não é verdadeira nessa situação. Vejamos uma propriedade um pouco menos intuitiva:

Propriedade 2. *Se uma sentença é conseqüência de um conjunto, então ela é conseqüência de qualquer outro conjunto que contenha o primeiro. Dito de modo muito informal, a validade de um argumento não pode ser destruída acrescentando novas premissas ao mesmo.*

De fato, considere uma sentença que é conseqüência de um conjunto de sentenças e um segundo conjunto de sentenças que contenha o primeiro. Para que a sentença não fosse conseqüência desse segundo conjunto, teria de haver uma situação em que as sentenças do segundo conjunto são verdadeiras e a sentença dada, falsa. Mas, nessa situação, como o primeiro conjunto está incluído no segundo, teríamos que as sentenças do primeiro conjunto são verdadeiras e a sentença dada, falsa, i.e., a sentença dada não é conseqüência do primeiro conjunto, o que contraria a hipótese.

Antes de continuarmos nossa análise das propriedades da noção de conseqüência, reparemos que as justificativas que estabelecem as duas propriedades acima são muito similares. Em ambos os casos, supõem-se o contrário do que desejamos mostrar e obtemos assim uma contradição com nossas hipóteses. Esse recurso argumentativo, denominado *reductio ad absurdum*, será amplamente utilizado em considerações posteriores.

A fim de continuar explorando a noção de conseqüência, vamos introduzir outros conceitos definidos em função dos conceitos já utilizados. O conceito definido revelar-se-á útil à medida que pudermos, a partir do mesmo, estabelecer novos resultados na teoria desenvolvida.

> Dizemos que um conjunto de sentenças é *consistente* se existir uma situação tal que as sentenças do conjunto são todas verdadeiras. Dizemos também que um conjunto de sentenças é *inconsistente* se ele não é consistente, i.e., se não houver situação que torne verdadeiras todas as sentenças do conjunto.

Uma propriedade imediata da definição acima é o fato de que:

Propriedade 3. *Todo subconjunto de conjuntos consistentes é consistente.*

É claro que qualquer situação que estabeleça a consistência de um dado conjunto de sentenças estabelece também a consistência de qualquer de seus subconjuntos.

Novamente, uma propriedade menos intuitiva é a seguinte:

Propriedade 4. *Qualquer sentença é conseqüência de um conjunto inconsistente de sentenças.*

Considere um conjunto de sentenças inconsistente e uma sentença qualquer. Se a sentença dada não fosse conseqüência do conjunto, teria de haver uma situação que tornasse verdadeira todas as sentenças do conjunto e falsa a sentença dada. Mas isso é impossível, porque o conjunto é inconsistente.

Passemos em revista os conceitos desenvolvidos até o momento. Definimos a noção de conseqüência que estabelece uma relação entre sentenças e conjuntos de sentenças. Desse conceito extraímos as propriedades 1 e 2. A seguir, introduzimos o conceito de consistência, que é uma propriedade exclusiva de conjuntos de sentenças. Temos, então, a propriedade 3, que é uma propriedade de conjuntos de sentenças, e a propriedade 4, que relaciona os conceitos de conseqüência e consistência.

Vejamos agora uma noção exclusiva de sentenças particulares.

> Dizemos que uma sentença é *válida* se ela é verdadeira em todas as situações, i.e., se não existe uma situação em que ela é falsa.

Temos, então, o seguinte resultado:

Propriedade 5. *Toda sentença válida é conseqüência de qualquer conjunto de sentenças.*

De fato, considere uma sentença válida e um conjunto de sentenças qualquer. Se a sentença não fosse conseqüência do conjunto dado, teria de haver uma situação tal que as sentenças do conjunto são verdadeiras e a sentença dada, falsa. Mas isso é impossível, pois a sentença dada é válida.

Mostremos, agora, como esses conceitos podem ser definidos de modo mais elegante por meio de uma nova noção, a saber, a noção de modelo.

> Dado um conjunto de sentenças e uma situação, dizemos que a situação é *modelo* do conjunto de sentenças se e somente se todas as sentenças do conjunto são verdadeiras na dada situação.

Assim, dizemos que uma sentença é conseqüência de um conjunto de sentenças se todo modelo do conjunto é também modelo da sentença dada. Dizemos também que um conjunto é consistente se ele possui um modelo, e uma sentença é valida se toda situação é modelo da sentença. Assim, os conceitos de conseqüência, consistência e validade ficam todos reduzidos ao conceito de modelo.

Poderíamos continuar apresentando inúmeras propriedades dos conceitos definidos. Mas, ao em vez disso, voltemos à análise da definição inicial de conseqüência.

A análise das questões mencionadas no início do texto não é tarefa das mais fáceis. Dizer o que é uma situação e como avaliar o valor de verdade em uma dada situação nos envolveria em uma teia de problemas, com uma literatura proveniente das mais variadas maneiras de abordar questões filosóficas específicas. O que fazer diante de tal situação?

Nosso problema é definir e avaliar as relações entre as três seguintes noções: sentenças, situações e verdade.

A noção de sentença não se apresenta problemática se a tomamos como conceito primitivo e, portanto, não passível de análise (pelo menos no contexto que estamos investigando). Resta, então, os conceitos de situação e verdade.

Para a abordagem desses conceitos, vamos adotar uma estratégia de economia de noções, o que em filosofia se resume na famosa navalha de Okcham: *entia non sunt multiplicanda praeter necessitaten*. As entidades não devem ser multiplicadas para além da necessidade. Não se deve fazer com mais o que se pode fazer com menos.

Avaliando, então, os conceitos que temos em mãos, surge a seguinte questão: será que as noções de situação e verdade não podem ser definidas diretamente a partir do conceito de sentença?

Uma observação importante é que qualquer resposta que pudermos fornecer à questão formulada deve, em última instância, preservar as propriedades estabelecidas para os conceitos de conseqüência, consistência e validade.

Posto isso, formulamos finalmente as noções pertinentes.

> Uma *situação* consiste simplesmente de um conjunto de sentenças, e uma sentença é *verdadeira* em uma situação se ela pertence à dada situação.

No que se segue, apresentaremos um tratamento formal para os conceitos ventilados nessa seção, formulando uma estrutura matemática em que podem ser definidos os conceitos de conseqüência, consistência e validade com as propriedades acima enunciadas.

2. Estruturas Valorativas

Uma *estrutura valorativa* é um par (S,K) tal que S é um conjunto não vazio, cujos elementos são denominados *sentenças*. Elementos e subconjuntos de S são denotados por letras latinas minúsculas e maiúsculas, respectivamente. K é uma família não vazia de subconjuntos de S, que não contém S, cujos elementos são denominados K-*valorações*.

Seja A um conjunto de sentenças. Definimos o conjunto dos K-*modelos* de A, denotado por Mod(A), como o conjunto das K-valorações que incluem A, isto é,

$$\mathrm{Mod}(A) = \{V \in K: A \subseteq V\}.$$

De modo análogo, se a é uma sentença, o conjunto dos K-*modelos* de a é o conjunto das K-valorações que contém a como elemento. Assim, tem-se:

$$\text{Mod}(a) = \text{Mod}(\{a\}) = \{V \in K: \{a\} \subseteq V\} = \{V \in K: a \in V\}.$$

Temos os seguintes resultados preliminares:

Teorema 1. Mod(∅) = K e Mod(S) = ∅.

Prova. Mod(∅) = {V ∈ K: ∅ ⊆ V} = K. Além disso, Mod(S) = {V ∈ K: S ⊆ V}. Como S ∉ K, Mod(S) = ∅. □

Teorema 2. Sejam A,B ⊆ S. Valem os seguintes resultados:

a) Se A ⊆ B, então Mod(B) ⊆ Mod(A);

b) B) Mod(A) = n{Mod(*a*): *a* ∈ A}.

Prova. a) Suponha A ⊆ B e considere V ∈ Mod(B). Então, V ∈ K e B ⊆ V. Logo, V ∈ K e A ⊆ V, isto é, V ∈ Mod(A).

b) V ∈ ∩{Mod(*a*): *a* ∈ A} ⇔ V ∈ Mod(*a*), para todo *a* ∈ A ⇔ V ∈ K e *a* ∈ V, para todo *a* ∈ A ⇔ V ∈ K e A ⊆ V ⇔ V ∈ Mod(A). □

Estruturas valorativas, embora muito simples, são importantes porque com elas se pode definir o conceito de conseqüência entre sentenças e conjuntos de sentenças. Posto isso, definimos o conjunto das K-*conseqüências* de um conjunto de sentenças A, denotado por Cn(A), como o conjunto das sentenças *a*, tais que todo K-modelo de A é também um K-modelo de *a*. Em símbolos,

$$\text{Cn}(A) = \{a \in S: \text{Mod}(A) \subseteq \text{Mod}(a)\}.$$

Pode-se considerar Cn um objeto que opera no conjunto de todos os subconjuntos de S, fornecendo, para cada subconjunto A de S, o conjunto Cn(A) das K-conseqüências de A.

Teorema 3. Para A,B ⊆ S, Cn(A) = B se e somente se Mod(A) ⊆ Mod(B).

Prova. Usando o teorema 2b, temos: Cn(A) = B ⇔ Mod(A) ⊆ Mod(*b*) para todo *b* ∈ B ⇔ Mod(A) ⊆ ∩{Mod(*b*): *b* ∈ B} ⇔ Mod(A) ⊆ Mod(B). □

Teorema 4. O operador de conseqüência possui as propriedades de inclusão, monotonicidade e idempotência.

Prova. *Inclusão* significa que A ⊆ Cn(A). Seja *a* ∈ A e temos de mostrar que *a* ∈ Cn(A), isto é, Mod(A) ⊆ Mod(*a*). Para isso, considere V ∈ Mod(A). Então, A ⊆ V e, portanto, *a* ∈ V, isto é, V ∈ Mod(*a*). Logo, Mod(A) ⊆ Mod(*a*).

Monotonicidade significa que A ⊆ B implica Cn(A) ⊆ Cn(B). Suponha que A ⊆ B e considere *a* ∈ Cn(A). Temos de mostrar que *a* ∈ Cn(B), isto é, Mod(B) ⊆ Mod(*a*). Seja, então, V ∈ Mod(B) e mostremos que V ∈ Mod(*a*). De fato, B ⊆ V e, portanto, A ⊆ V, isto é, V ∈ Mod(A). Como *a* ∈ Cn(A), temos que Mod(A) ⊆ Mod(*a*). Logo, V ∈ Mod(*a*).

Idempotência significa que Cn(A) = Cn(Cn(A)). Reflexividade implica que Cn(A) $\subseteq$ Cn(Cn(A)). Resta, então, mostrar a inclusão contrária. Suponha que $a \in$ Cn(Cn(A)) e temos de mostrar que a $\in$ Cn(A), isto é, Mod(A) $\subseteq$ Mod(a). Seja V $\in$ Mod(A) e considere D = Cn(A). Assim, pelo teorema 3, Mod(A) $\subseteq$ Mod(D) e, portanto, V $\in$ Mod(D). Como $a \in$ Cn(Cn(A)) = Cn (D), temos que Mod(D) $\subseteq$ Mod(a). Então, V $\in$ Mod (a) e, assim, Cn(Cn(A)) $\subseteq$ Cn(A). □

Considere uma estrutura valorativa (S,K) e A $\subseteq$ S. Dizemos que A é K-*consistente* se e somente se Mod(A) $\neq \varnothing$, isto é, quando A possui ao menos um K-modelo. Caso contrário, A é dito K-*inconsistente*. Decorre diretamente da definição que S é K-inconsistente (teorema 1).

Teorema 5. Seja A $\subseteq$ S. Então, A é K-inconsistente se e somente se Cn(A) = S.

Prova. Pelo teorema 3, Cn(A) = S se e somente se Mod(A) $\subseteq$ Mod(S). Como Mod(S) = $\varnothing$ (teorema 1), então Mod(A) = $\varnothing$, isto é, A é K-inconsistente. □

Teorema 6. Sejam A,B $\subseteq$ S. Então, se A é K-consistente e B $\subseteq$ A, então B é também K-consistente.

Prova. Suponha A K-consistente, B $\subseteq$ A e considere V $\in$ Mod(A). Assim, V $\in$ K e A $\subseteq$ V. Como B $\subseteq$ A, B $\subseteq$ V e tem-se que V $\in$ Mod(B), isto é, B é K-consistente.

Considere uma estrutura valorativa (S,K) e $a \in$ S. Dizemos que a é K-*válida* se e somente se Mod(a) = K, isto é, quando todo elemento de K é um K-modelo de a.

Teorema 7. Seja $a \in$ S. Valem os seguintes resultados:

a) a é K-válida se e somente se a $\in$ Cn($\varnothing$);

b) a é K-válida se e somente se a $\in$ Cn(A) para todo A $\subseteq$ S.

Prova. a) Segue-se do fato de que Mod($\varnothing$) = Mod(a) = K (teorema 1).

b) Como Mod(a) = K, segue-se que Mod(A) $\subseteq$ Mod(a), para todo A $\subseteq$ S, isto é, a $\in$ Cn(A) para todo A $\subseteq$ S. □

Antes de passar para o problema dos automorfismos de estruturas valorativas, faremos um breve sumário das definições dos conceitos vistos até aqui.

Considere uma estrutura valorativa (S,K), e sejam A $\subseteq$ S um subconjunto de sentenças da estrutura, e $a \in$ S, uma sentença da mesma.

- Mod(A) = {V $\in$ K: A $\subseteq$ V};
- Mod(a) = {V $\in$ K: $a \in$ V};
- Cn(A) = {$a \in$ S: Mod(A) $\subseteq$ Mod(a)};
- A é K-consistente se e somente se Mod(A) $\neq \varnothing$;
- a é K-válida se e somente se Mod(a) = K.

3. Automorfismos e Invariância

Uma *permutação* de S é qualquer bijeção s de S em S. Seja $\Sigma(S)$ o conjunto de todas as permutações de S e considere um subconjunto A de S. Dizemos que uma permutação σ de S *preserva* A se e somente se $\sigma[A] = A$, em que $\sigma[A] = \{\sigma(a) \in S: a \in A\}$, isto é, $\sigma[A]$ é a imagem de A por σ.

Um *grupo* é uma estrutura formada por um par $(G,\cdot)$, em que G é um conjunto não vazio e $\cdot$ é uma operação binária em G, isto é $\cdot: G \times G \to G$, $(x,y) \to x\cdot y$, tal que as seguintes propriedades são satisfeitas: (i) *associatividade*: $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$, para todo $x,y,z \in G$; (ii) *elemento neutro*: existe $e \in G$ tal que $x\cdot e = e\cdot x = x$, para todo $x \in G$; (iii) *inverso*: para todo $x \in G$, existe $x^{-1} \in G$ tal que $x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = e$. É bem conhecido o fato de que $\Sigma(S)$ constitui um grupo com respeito à composição de funções com o elemento neutro, sendo a permutação identidade Id. Um *subgrupo* de um grupo $(G,\cdot)$ é qualquer subconjunto $S \subseteq G$ tal que $\cdot$ restrito a S satisfaz as propriedades de grupo. Assim, para verificar que $S \subseteq G$ é um subgrupo de $(G,\cdot)$ basta que as seguintes condições sejam satisfeitas: (a) $e \in S$; (ii) se $x,y \in S$, então $x\cdot y$ S e (iii) se $x \in S$, então $x^{-1} \in S$.

Considere, agora, uma estrutura valorativa (S,K), e seja Aut(S,K) o subconjunto de $\Sigma(S)$ composto pelas permutações de S que preservam todos os elementos de K, isto é,

$$\mathrm{Aut}(S,K) = \{\sigma \in \Sigma(S): \sigma[V] = V, \text{ para todo } V \in K\}.$$

Elementos de Aut(S,K) são denominados *automorfismos* da estrutura (S,K). Se $A \subseteq S$ é tal que $\sigma[A] = A$ para todo $\sigma \in \mathrm{Aut}(S,K)$, dizemos que A é um *invariante* da estrutura (S,K). A família de subconjuntos de S que são invariantes de (S,K) é denotada por Inv(S,K).

Teorema 8. Aut(S,K) é um subgrupo de $\Sigma(S)$.

Prova. De fato, considere um elemento V de K e dois elementos $\sigma_1,\sigma_2 \in \mathrm{Aut}(S,K)$. Assim, $(\sigma_1\cdot\sigma_2)[V] = \sigma_1[\sigma_2[V]] = \sigma_1[V] = V$ e, portanto, $\sigma_1\cdot\sigma_2$ é elemento de Aut(S,K). Por outro lado, a permutação identidade Id pertence obviamente a Aut(S,K), pois Id[V] = V. Além disso, se $\sigma \in \mathrm{Aut}(S,K)$, tem-se que $V = \mathrm{Id}[V] = (\sigma^{-1}\cdot\sigma)[V] = \sigma^{-1}[\sigma[V]] = \sigma^{-1}[V]$ e, portanto, σ^{-1} é elemento de Aut(S,K). □

Aut(S,K) é dito o *grupo de automorfismos* da estrutura (S,K).

Considere, agora, E uma família qualquer de subconjuntos de S. Dizemos que E é *fechado* se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

1. Se A é um elemento de E, então o complementar de A com respeito a S também é elemento de E;
2. Se E' é uma subfamília de E, então $\cup E'$ e $\cap E'$ também são elementos de E.

Em outras palavras, E é fechado se é fechado por uniões, intersecções e complementos. Dito ainda de outra forma, E é fechado se e somente se é uma sub-álgebra de Boole completa da álgebra formada por todos os subconjuntos de S.

A intersecção de uma família qualquer de conjuntos fechados é fechado. Assim, se E é uma família de subconjuntos de S, definimos o fecho de E, denotado por Ê, como a menor (no sentido da inclusão) família fechada de subconjuntos de S que contém E, isto é,

$$\hat{E} = \cap\{E' \subseteq S: E \subseteq E' \text{ e } E' \text{ é fechado}\}.$$

Note que Ê é a sub-álgebra de Boole completa gerada por E. Temos, então, o seguinte resultado:

Teorema 9. Os automorfismos de uma estrutura valorativa preservam todos os elementos do fecho da classe de suas valorações. Isto é, tem-se que Inv(S,K) $\subseteq$ Aut(S,K).

Prova. Procedemos por indução na definição de fecho. Os elementos de K são invariantes por definição. Por outro lado, se um conjunto é invariante, seu complementar também o é. Suponha que $\mathbf{A} \subseteq$ Inv(S,K), e seja $\sigma \in$ Aut(S,K) e $a \in \cup\mathbf{A}$. Logo, existe $A \in \mathbf{A}$ tal que $a \in A$. Como A é invariante, $\sigma(a) \in A$, isto é, $\sigma(a) \in \cup\mathbf{A}$. Logo, $\cup\mathbf{A}$ é invariante. Considere, agora $b \in \cap\mathbf{A}$. Assim, $b \in A$ para todo $A \in \mathbf{A}$. Como todos esses A's são invariantes, $\sigma(b) \in A$ para todo $A \in \mathbf{A}$, isto é, $\sigma(b) \in \cap\mathbf{A}$. Logo, $\cap\mathbf{A}$ é invariante.

A inclusão contrária segue de um teorema mais geral sobre invariância em estruturas de primeira ordem que será apenas enunciado, e cuja demonstração será apenas esboçada, pois envolve questões mais técnicas que fogem do escopo do presente trabalho.

Dado um conjunto não vazio D e um ordinal α, uma função p: $\alpha \rightarrow D$ é uma α-upla de elementos de D, dita um α-*ponto* de D. O conjunto dos α–pontos de D é denotado por D^α e uma α–*relação* em D é qualquer subconjunto de D^α. Além disso, dado um ordinal infinito μ, definimos o μ–universo sobre D, denotado por $U_\mu(D)$, como o conjunto das α–relações em D para todo $\alpha < \mu$. Uma μ-*estrutura de primeira ordem* é uma tripla $E=(D,\mu,\mathfrak{R})$ tal que $\mathfrak{R}$ é um subconjunto de $U_\mu(D)$. Elementos de $\mathfrak{R}$ são denominados *relações primitivas* de E, e Uμ(D) é dito o *universo* de E.

Considere os ordinais $\alpha,\beta < \mu$ e uma função ξ: $\alpha \rightarrow \beta$. A função ξ pode ser estendida para ξ': $D^\beta \rightarrow D^\alpha$ tal que se p: $\beta \rightarrow D$ é um elemento de D^β, então $\xi'(p) = p\circ\xi$ (a composição de p com ξ) que é um elemento de D^α. Além disso, ξ' pode ser naturalmente estendida para uma função ξ^* no conjunto das partes de D^β, tal que ξ^*: $\wp(D^\beta) \rightarrow \wp(D^\alpha)$ com $\xi^*(R) = \{\xi'(p): p \in R\}$ em que R é uma β-relação em D. Da mesma forma, dada a função ξ': $D^\beta \rightarrow D^\alpha$, consideramos a função inversa $(\xi')^{-1}$: $\wp(D\alpha) \rightarrow \wp(D^\beta)$, definida como usual e que será denotada por $(\xi^*)^{-1}$ para unificar a notação. Definimos, também, para cada ordinal $\alpha < \mu$, a aplicação C_α: $\wp(D^\alpha) \rightarrow \wp(D^\alpha)$, tal que a cada α–relação R em D, atribui seu complemento $C_\alpha(R)$ com respeito a D^α, isto é, D^α-R. Seja K_μ o conjunto de todas as aplicações $\xi^*,(\xi^*)^{-1}$ e C_α tal que ξ: $\alpha\rightarrow\beta$ correspondente a todas as escolhas de $\alpha,\beta < \mu$.

Seja $E=(D,\mu,\mathfrak{R})$ e considere $\Delta=\{(x,x):x\in D\}$, a diagonal de D. Dizemos que um conjunto de relações $S \subseteq U_\mu(D)$ é E-*fechado* se e somente se:

(i) $\Delta \in S$;

(ii) $\mathfrak{R} \subseteq S$;

(iii) Para todo $R \in S$ e $f \in K_\mu$, tal que f(R) está definida, $f(R) \in S$;

(iv) Se S' é um subconjunto de S, então $\cap S' \in S$.

Definimos o *fecho* de E, denotado por Ê, como a intersecção de todos os subconjuntos E-fechados de $U_\mu(D)$.

Considere uma aplicação g: $D \rightarrow D$, e um ordinal $\alpha < \mu$. Estendemos g para uma função g^α: $D \rightarrow D$ tal que se p: $\alpha \rightarrow D$, temos $g^\alpha(p) = g \circ p$. Analogamente, pode-se considerar a função g^α, que será denotada pelo mesmo símbolo, estendida ao conjunto das partes de D, isto é, g^α: $\wp(D) \rightarrow \wp(D)$ com $g^\alpha(R) = \{g^\alpha(p): p \in R\}$ em que R é uma α-relação em D. Um *automorfismo* de $E=(D,\mu,\mathfrak{R})$ é uma bijeção $g:D \rightarrow D$ tal que para toda α-relação primitiva $R \in \mathfrak{R}$, tem-se que $g^\alpha(R)=R$. Seja G o grupo de automorfismos de E, isto é, G é o subgrupo do grupo de todas as bijeções em D tal que $g^\alpha(R)=R$ para todo $R \in \mathfrak{R}$ e todo $g \in G$. Um *invariante* de $E=(D,\mu,\mathfrak{R})$ é uma α-relação $R \in U_\mu(D)$ que é fixa por G, isto é, $g^\alpha(R) = R$ para todo $g \in G$. Denotamos por $\mathfrak{I}(E)$ o conjunto das relações invariantes de E. Temos o seguinte resultado:

Teorema 10. Considere uma μ-estrutura de primeira ordem $E = (D,\mu,\mathfrak{R})$, seja d o cardinal de D e assuma que $\mu \geq \delta+2$. Então, $\hat{E}=\mathfrak{I}(E)$.

A. Tarski, em um artigo publicado postumamente, advoga a idéia de que conceitos lógicos são aqueles que são invariantes por alguma classe de transformações:

> *Now suppose we continue this idea, and consider still wider classes of transformations. In the extreme case, we would consider the class of all one-one transformations of the space, or universe of dicourse, or "world", onto itself. What will be the science which deals with the notions invariant under this widest class of transformation? Here we will have very few notions, all of a very general character. I suggest that they are the logical notions, that we call a notion ``logical'' if it is invariant under all possible one-one transformation of the world onto itself.* (TARSKI 1986, p. 445)

Com base nessas sugestões, podemos demonstrar que os conceitos aqui estudados são de fato noções lógicas. Isso pode ser precisamente formulado da seguinte maneira:

Teorema 11. Seja (S,K) uma estrutura valorativa e considere $A \subseteq S$ e $a \in S$. Assim, valem os seguintes resultados:

1. Se $a \in Cn(A)$, então $\sigma(a) \in Cn(\sigma[A])$;
2. Se A é K-consistente, então $\sigma[A]$ é também K-consistente.
3. Se a é K-válida, então $\sigma(a)$ é também K-válida.

Prova. Os resultados seguem diretamente do fato de que, para $A \subseteq S$, $a \in S$ e $\sigma \in Aut(S,K)$, tem-se que $Mod(A) = Mod(\sigma[A])$ e $Mod(a) = Mod(\sigma(a))$. □

4. Considerações finais

O presente resultado está relacionado também com a noção de definibilidade em linguagens infinitárias: ver KARP (1964). ROGERS (1966) mostrou que $\mathfrak{I}(E) = F_{\alpha\beta}(E)$, tal que $F_{\alpha\beta}(E)$ é o conjunto das relações definíveis em uma linguagem $L_{\alpha\beta}(E)$, apropriada para a estrutura E, com certas escolhas dos cardinais α e β que regulam os comprimentos das disjunções e blocos de quantificados permitidos. O estudo das inter-relações desses resultados pode ser encontrados em RODRIGUES *et al.* (2004), que trata dos conceitos de definibilidade em linguagens infinitárias, invariância e operações de fecho em estruturas de primeira ordem. A generalização para estruturas de ordem superior é um projeto a ser desenvolvido.

O resultado acerca da noção de invariantes de estruturas de primeira ordem é produto de um projeto de pesquisa desenvolvido por Alexandre A. M. Rodrigues (Departamento de Matemática – USP), Ricardo C. Miranda Filho (Departamento de Física – UFBA e Doutorando do Departamento de Filosofia – USP) e Edelcio G. de Souza (Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia – PUC-SP).

Trata-se da generalização de um resultado obtido por M. KRASNER (1938), que, ao considerar estruturas de primeira ordem com relações de aridade cardinal, procurou descrever certas operações conjuntistas que, aplicadas ao conjunto de relações primitivas da estrutura, fornece todos os invariantes da mesma.

No entanto, o trabalho de KRASNER não parece ter tido ampla circulação, em parte pelo fato de que suas operações são de difícil compreensão, e não possuem certas propriedades algébricas de fácil manuseio. Assim, a obtenção de seu resultado era feita por meio de um complicado mecanismo argumentativo. A demonstração aqui esboçada é mais direta. O resultado também está relacionado com o conceito de definibilidade em linguagens infinitárias e com teoremas obtidos por TARSKI (1930), que estudou o conceito conjunto definível de números reais, e por ROGERS (1966). O próximo passo da pesquisa é tratar de estruturas de ordem superior.

Referências bibliográficas

KARP, C. (1964). *Languages with Expressions of Infinite Lenght.* North-Holland.

KRASNER, M. (1938). "Une généralisation de la notion de corps." *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, ser. 9, v. 17, p. 367-85.

RODRIGUES, A. A. M. ; MIRANDA Filho, R. C.; De SOUZA, E. G. (2006). "Invariance and set-theoretical operations in first order structures." *Reports on Mathematical Logic*, v. 40, p. 209-15.

ROGERS Jr., H. (1966). "Some problems of definability in recursive function theory." In: *Sets, Models and Recursion Theory.* CROSSLEY, J. N. (ed.). Nort-Holland. p. 183-201.

TARSKI, A. (1930). Sur les ensembles définissables de nombres réels, I. *Fundamenta mathematicae*, v. 17, p. 210-39[, 1930]. Trad. ing. in: *Logic, semantics, metamathematics.* CORCORAN, J. (ed.) (1983). 2th ed. Hackett Publishing Company. p. 110-42.

________ (1986). What are logical notions? *History and Philosophy of Logic*, v. 7, p. 443-54.