Confrontando propriedades lógicas em um contexto de lógica universal

Confronting logical properties in a universal logic context

Hércules de Araújo Feitosa
Departamento de Matemática/FC/UNESP
haf@fc.unesp.br

Mauri Cunha do Nascimento
Departamento de Matemática/FC/UNESP
mauri@fc.unesp.br

Luiz Henrique da Cruz Silvestrini
Departamento de Matemática/FC/UNESP
silvestrini@fc.unesp.br

Resumo: Este texto apresenta uma definição de lógica universal num ambiente estritamente conjuntista e coteja propriedades lógicas e topológicas neste ambiente abstrato. Ao comparar estas propriedades, testamos a etimologia dos nomes mais usuais das propriedades tratadas e a (não) equivalência entre elas.

Palavras-chave: Lógica. Operador de consequência. Teoria. Fecho. Compacidade. Dedutibilidade.

Abstract: *This paper presents a definition of universal logic in a strictly set-theoretic environment and compares logical and topological properties in this abstract environment. From these properties, we verify the etymology of the more common names given for evolved properties, and so we establish the precedence or equivalence among them.*

Keywords: *Logic. Consequence operator. Theory. Closure. Compacity. Deductibility.*

Introdução

Neste texto, investigamos propriedades lógicas num contexto em que contemplamos especificamente o aspecto dedutivo da lógica. Por ora, não contemplamos o aspecto usual de que lógicas são edificadas sobre uma linguagem artificial. Assim, daremos um caráter bastante abstrato e universal para as lógicas, entendidas como um conjunto não vazio e um operador de consequência sobre este conjunto. Buscamos destacar aspectos que podem ser desenvolvidos neste contexto abstrato e observamos que muito pode ser tratado assim.

Há uma íntima relação entre esta abordagem e o estudo matemático dos espaços topológicos. Vislumbramos a possibilidade de perpassarmos propriedades de um tópico para o outro e entender algumas destas inter-relações.

1 Lógica abstrata: definição e comentários sobre a proposta de Tarski

A definição de lógica, a seguir, destaca aspecto essencial da concepção de lógica, a dedutibilidade. Alfred Tarski, o proponente desta definição em 1930 (TARSKI, 1983), julgou que esta abordagem evidenciaria algumas das noções essenciais de lógica, dada particularmente na relação de consequência lógica.

No início do século XX surgiram muitas lógicas distintas daquela, até então, considerada como única lógica, a lógica clássica bivalente. O autor polonês procurou resgatar o que seria essencial para certo sistema ser considerado como lógico.

A seguir, o conjunto E deve ser interpretado como o domínio sobre o qual estão as unidades lógicas que podem ser proposições, sentenças, juízos, enunciados ou outro portador qualquer de verdade lógica. Esta é a concepção intuitiva que vem da lógica, mas que não precisa ser única. Podemos tomar E apenas com uma coleção de objetos.

Dado um conjunto não vazio E, define-se um *operador de consequência* sobre E como uma função $\mathsf{C}: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ tal que, para todos A, B $\subseteq$ E, valham:

(i) $A \subseteq \mathsf{C}(A)$ (autodedutibilidade)
(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(B)$ (monotonicidade)
(iii) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \subseteq \mathsf{C}(A)$ (idempotência).

Dos itens (i) e (iii), observamos que para todo operador de consequência C vale o seguinte fato: $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) = \mathsf{C}(A)$.

O conjunto $\mathsf{C}(A)$ pode ser entendido como as consequências do conjunto A ou a coleção dos itens que podem ser deduzidos ou derivados de A. A autodedutibilidade também é chamada, algumas vezes, reflexividade. A monotonicidade indica que o operador de consequência é uma função crescente. A idempotência mostra que basta uma aplicação do operador de consequência e são obtidos todos os elementos possíveis da dedução.

Agora introduzimos a definição de lógica.

Uma *lógica abstrata* é um par (E, C), em que E é um conjunto não vazio e C é um operador de consequência sobre E. O conjunto E é denominado *domínio* ou *universo de discurso* da lógica (E, C).

A definição de Tarski, de 1930, contemplava aspectos adicionais, que passamos a comentar. A partir de agora, para um conjunto qualquer finito, identificá-lo-emos com um subíndice f. Assim, o conjunto finito B será denotado por B_f.

Em geral, no ambiente lógico, a relação de consequência é aplicada passo a passo, sempre sobre um conjunto finito de dados, usualmente chamados de *premissas*. A cada passo obtemos uma *conclusão* e podemos continuar mais e mais nesse procedimento, com um passo de cada vez.

A definição seguinte, proposta por Tarski, caracteriza este aspecto para o operador de consequência.

O operador de consequência C sobre E é *finitário* quando:

(iv) para todo $A \subseteq E$: $\mathrm{C}(A) = \cup\{\mathrm{C}(B_f) : B_f \subseteq A\}$ (operador finitário).

Para Tarski, o operador deveria ser finitário. Inicialmente, Tarski definiu sistema dedutivo, o seu correspondente à nossa lógica abstrata, como um conjunto não vazio que atenderia as condições (i), (iii) e (iv), isto é, o operador deveria ser auto dedutivo, idempotente e finitário. A condição (ii) ocorre como primeiro teorema de sua teoria. Assim, a monotonicidade segue como resultado derivado, na proposta tarskiana. Contudo, a condição (iv) não pode ser provada na nossa teoria de lógica abstrata e precisa ser incluída como uma propriedade adicional.

A inclusão $\cup\{\mathrm{C}(B_f) : B_f \subseteq A\} \subseteq \mathrm{C}(A)$ vale sempre, pois como $B_f \subseteq A$, então, pela monotonicidade, $\mathrm{C}(B_f) \subseteq \mathrm{C}(A)$.

Além disso, Tarski incluiu duas condições adicionais para os seus sistemas dedutivos. O universo deveria ser um conjunto enumerável e deveria existir um elemento $x \in E$, tal que $\mathrm{C}(\{x\}) = E$.

Como bastante usual nos estudos lógicos, o conjunto das sentenças bem formadas de cada lógica é enumerável, então o correspondente conceito para a proposta tarskiana, com domínio E enumerável seria apropriado. A outra condição contempla aspecto frequente dos sistemas lógicos, para os quais existe uma sentença contraditória (explosiva) tal que todas as demais seriam dela deduzidas.

A nossa abordagem de lógica abstrata tem sido bastante usada. De um modo geral, não precisamos exigir apenas conjuntos de fórmulas e termos enumeráveis nas lógicas contemporâneas. Também, não precisamos exigir a existência de sentenças que permitam a dedução de todas as demais. Elas ocorrem com frequência, mas não são essenciais.

Os sistemas lógicos contemporâneos são tão dinâmicos e criativos, que a abordagem das lógicas tarskianas, embora bastante geral, não contemplam todas as possíveis classificações de lógicas destes tempos.

2 Algumas propriedades imediatas

A partir da abordagem aqui proposta de lógicas abstratas, destacamos algumas propriedades e características.

Proposição 2.1: Se $A, B \subseteq E$, então:

(i) $\mathrm{C}(A \cap B) \subseteq \mathrm{C}(A) \cap \mathrm{C}(B)$

(ii) $\mathrm{C}(A) \cup \mathrm{C}(B) \subseteq \mathrm{C}(A \cup B)$

(iii) $\mathrm{C}(A \cup B) = \mathrm{C}(\mathrm{C}(A) \cup \mathrm{C}(B))$.

Demonstração:

(i) Como $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$, então, pela monotonicidade, $\mathrm{C}(A \cap B) \subseteq \mathrm{C}(A)$ e $\mathrm{C}(A \cap B) \subseteq \mathrm{C}(B)$. Logo, $\mathrm{C}(A \cap B) \subseteq \mathrm{C}(A) \cap \mathrm{C}(B)$.

(ii) Como $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$, então $\mathrm{C}(A) \subseteq \mathrm{C}(A \cup B)$ e $\mathrm{C}(B) \subseteq \mathrm{C}(A \cup B)$. Logo, $\mathrm{C}(A) \cup \mathrm{C}(B) \subseteq \mathrm{C}(A \cup B)$.

(iii) De (ii) e da monotonicidade, segue que $\mathrm{C}(\mathrm{C}(A) \cup \mathrm{C}(B)) \subseteq \mathrm{C}(\mathrm{C}(A \cup B)) = \mathrm{C}(A \cup B)$. Do outro lado, desde que $A \subseteq \mathrm{C}(A)$ e $B \subseteq \mathrm{C}(B)$ e então $A \cup B \subseteq \mathrm{C}(A) \cup \mathrm{C}(B)$, e da definição segue que $\mathrm{C}(A \cup B) \subseteq \mathrm{C}(\mathrm{C}(A) \cup \mathrm{C}(B))$. ■

O exemplo seguinte mostra que não podemos ter igualdade do item (ii) da Proposição 2.1.

Exemplo 2.2: Consideremos E = $\{a, b, c\}$ e o operador C sobre E definido por: $C(\{a, b\}) = \{a, b, c\}$ e $C(X) = X$, para todo $X \subseteq E$, tal que $X \neq \{a, b\}$. É de simples verificação que C é um operador de consequência. Porém, temos que $C(\{a\} \cup \{b\}) = C(\{a, b\}) = \{a, b, c\}$, enquanto $C(\{a\}) \cup C(\{b\}) = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$. Assim, $C(\{a\}) \cup C(\{b\}) \neq C(\{a\} \cup \{b\})$.

Vale sempre que $C(E) = \cup\{ C(\{x\}) : x \in E\}$, pois $x \in C(\{x\}) \subseteq C(E) = E$, para cada $x \in E$. Mas, se $A \subseteq E$, pode não valer a igualdade $C(A) = \cup\{ C(\{x\}) : x \in A\}$, como pode ser observado no exemplo anterior, quando A = {a, b}.

Proposição 2.3: Para A, B $\subseteq$ E, tem-se que $C(A \cup B) = C(A \cup C(B))$.
Demonstração: Como $B \subseteq C(B)$, então $A \cup B \subseteq A \cup C(B)$ e daí $C(A \cup B) \subseteq C(A \cup C(B))$. Por outro lado, como $A \subseteq C(A)$, então $A \cup C(B) \subseteq C(A) \cup C(B)$. Logo, da definição e proposição anterior, $C(A \cup C(B)) \subseteq C(C(A) \cup C(B)) = C(A \cup B)$. ■

Estas são propriedades iniciais esperadas dos operadores de consequência, mas o caráter geral da definição provoca algumas curiosidades. A função identidade (operador identidade), que aplica cada objeto nele mesmo, é um exemplo de operador de consequência. Outro exemplo não convencional de operador é o que leva todo subconjunto de E no conjunto E (operador constante).

A exigência de um elemento contraditório eliminaria a função identidade como um exemplo de operador de consequência, mas não o caso do operador constante em E. Assim, para a proposta tarskiana, a função identidade e a função constante em E não contariam como operadores de consequência. Proporemos condições para evitar tais casos.

Nas seções seguintes, trataremos de importantes propriedades das lógicas abstratas. Contemplaremos esta abordagem por temáticas em cada seção. Partiremos de uma análise mais apurada de nossa definição de lógica, passando pelos conceitos de conjuntos fechados e abertos. Introduziremos a propriedade de operador finitário, dedutibilidade finita e de operador finitamente não trivial. Por fim, mostraremos as relações entre estes conceitos, de maneira que as suas distinções possam ser evidenciadas.

3 Teorias ou conjuntos fechados

As teorias são pontos fixos para a dedutibilidade.

O conjunto $A \subseteq E$ é *fechado* (ou *teoria*) de (E, C) se $C(A) = A$, e A é *aberto* se o seu complementar, A^C, é fechado.

Se $A \subseteq F$ e F é fechado em (E, C), então $A \subseteq C(A) \subseteq C(F) = F$. Assim, C(A) é o menor fechado que contém A. Os conjuntos $C(\varnothing)$ e E são o menor e o maior fechados, respectivamente, associados ao operador C.

Uma lógica, segundo a definição acima, é determinada pelo operador de consequência sobre o seu domínio ou universo de discurso. Outra maneira de formular a definição seria explicitar exatamente a coleção de conjuntos fechados e daí gerar uma lógica, como indica a proposição seguinte.

Um conjunto F é *fechado para intersecções arbitrárias*, se para cada i $\in$ I:

$$A_i \in F \Rightarrow \cap_{i\in I} A_i \in F$$

Proposição 3.1: Se E é um conjunto não vazio e $\mathbf{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ é tal que $E \in \mathbf{F}$ e **F** é fechado para intersecções arbitrárias, então existe um único operador de consequência $C_{\mathbf{F}}$ definido sobre E para o qual os fechados de (E, $C_{\mathbf{F}}$) são exatamente os elementos de **F**.

Demonstração: Para $B \subseteq E$, seja $C_{\mathbf{F}}(B) = \cap\{D \in \mathbf{F} : B \subseteq D\}$. Desde que **F** é fechado para intersecções arbitrárias, então $C_{\mathbf{F}}(B) \in \mathbf{F}$.

A função $C_{\mathbf{F}}: \mathcal{P}(E) \rightarrow P(E)$ é um operador de consequência, pois:

(i) $A \subseteq C_{\mathbf{F}}(A)$, por definição.

(ii) Se $A \subseteq B$ e $x \in C_{\mathbf{F}}(A)$, por definição, x pertence a todo membro de **F** que contém A. Desde que todo membro de **F** que contém B, contém também A, então $x \in C_{\mathbf{F}}(B)$. Assim, $C_{\mathbf{F}}(A) \subseteq C_{\mathbf{F}}(B)$.

(iii) $C_{\mathbf{F}}(C_{\mathbf{F}}(A)) = \cap\{D \in \mathbf{F} : C_{\mathbf{F}}(A) \subseteq D\}$. Como $C_{\mathbf{F}}(A) \in \mathbf{F}$ e é o menor elemento de **F** que contém $C_{\mathbf{F}}(A)$, segue que $C_{\mathbf{F}}(C_{\mathbf{F}}(A)) = C_{\mathbf{F}}(A)$.

Além disso, por definição, cada fechado de E segundo $C_{\mathbf{F}}$ pertence a **F**. Por outro lado, se $A \in \mathbf{F}$, então $C_{\mathbf{F}}(A) = A$ e, desse modo, cada membro de **F** é um fechado de $C_{\mathbf{F}}$. Concluindo, os elementos de **F** são exatamente os fechados de (E, $C_{\mathbf{F}}$).

Resta verificar a unicidade de $C_{\mathbf{F}}$.

Seja $C^*: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ um operador de consequência tal que os fechados de C^* coincidam com os membros de **F**. Assim, se $A \subseteq E$, segue que $C^*(A) = C_{\mathbf{F}}(A)$, pois $C_{\mathbf{F}}(A)$ (respectivamente, $C^*(A)$) é o menor fechado de (E, $C_{\mathbf{F}}$) (respectivamente de (E, C^*)) que contém A, e o conjunto de fechados de (E, $C_{\mathbf{F}}$) e de (E, C^*) coincidem com **F**. Portanto, $C_{\mathbf{F}} = C^*$. ■

Seja (E, C) uma lógica. O operador C é *clopen* se $C((C(A))^C) = (C(A))^C$.

Como C(A) é fechado, então $(C(A))^C$ é aberto. A condição clopen exige que este conjunto seja fechado. Assim, ele é concomitantemente aberto e fechado.

O conjunto $A \subseteq E$ é um *conjunto de axiomas* para a teoria T se C(A) = C(T) = T. A teoria T é *finitamente axiomatizável* se tem um conjunto finito de axiomas.

O elemento $x \in E$ é um *teorema* da lógica (E, C) se $x \in C(\varnothing)$.

Dada uma lógica (E, C), o conjunto $B \subseteq E$ é *decidível* se existe um procedimento algorítmico que permita decidir para todo $x \in E$, se $x \in C(B)$ ou se $x \notin C(B)$. A lógica (E, C) é *decidível* se o conjunto $\varnothing$ é *decidível*, isto é, podemos decidir se um elemento qualquer de E é ou não um teorema de (E, C).

4 Lógicas abstratas: variando o operador ou o domínio

A definição de lógica exige a determinação de um domínio e um operador de consequência. A variação destes dois componentes pode gerar novos sistemas relacionados. Vejamos como.

Sejam C e C^* dois operadores de consequência sobre E. O operador C é *mais forte* que C^* (ou C^* é *mais fraco* que C) se todo fechado segundo C é também um fechado segundo C^*.

Assim, se C é mais forte que C^*, então $C(A) = A \Rightarrow C^*(A) = A$.

O operador constante é mais forte que o operador identidade, pois todo fechado segundo o operador constante, que é apenas o conjunto E, é também fechado segundo o operador identidade. Mas há fechados segundo o operador identidade que não são fechados segundo o operador constante.

Proposição 4.1: Se C, C^* são dois operadores de consequência sobre E, então C é mais forte que C^* se e, somente se, para todo $A \subseteq E$, tem-se que $C^*(A) \subseteq C(A)$.
Demonstração: ($\Rightarrow$) O conjunto $C(A)$ é um fechado segundo C e então, por hipótese, $C(A) = C^*(C(A))$. Pela autodedutibilidade, $A \subseteq C(A)$, então $C^*(A) \subseteq C^*(C(A)) = C(A)$. ($\Leftarrow$) Se A é um fechado segundo C, então $C(A) = A$. Como $C^*(A) \subseteq C(A) = A$, segue que $A = C^*(A)$, ou seja, A é um fechado segundo C^*. ■

Neste caso fixamos o domínio E e variamos os operadores de consequência. Agora, discutiremos a situação em que preservamos o operador, mas variamos os domínios.

A lógica (E_1, C_1) é uma *sublógica* de (E_2, C_2) se $E_1 \subseteq E_2$ e $C_1 = C_{2|E1}$.

Se $A \subseteq E_1$, $C_1(A) = C_2(A)$, ou seja, os fechados de (E_1, C_1) e de (E_1, C_2) coincidem e, por definição, C_1 é o fecho C_2 restringido a E_1.

Para cada subconjunto fechado K de E, o fecho C_K de C restringido a K, gera uma sublógica sobre K, pois se $A \subseteq K$ então $C_K(A) = C(A) \cap K \subseteq K$. Logo, $C_K: \mathcal{P}(K) \rightarrow \mathcal{P}(K)$ é uma função. A verificação de (i) e (ii) é imediata. Para (iii), $C_K(C_K(A)) = C_K(C(A) \cap K) = C(C(A) \cap K) \cap K \subseteq C(C(A)) \cap K = C(A) \cap K = C_K(A)$.

5 Dedutibilidade finita

A dedutibilidade finita caracteriza o caso usual de dedução lógica, tal que se há uma dedução a partir de um dado conjunto, então há uma dedução do mesmo item a partir de um subconjunto finito do conjunto dado.

O operador de consequência C sobre E tem a propriedade da *dedutibilidade finita* quando, para todo $A \subseteq E$, existe $B_f \subseteq A$ tal que $C(A) = C(B_f)$.

Se A é finito, o conceito não tem importância. Mas quando A é infinito, a dedutibilidade finita não é imediata.

Exemplo 5.1: Seja $E = \mathbb{N} \cup \{\pi\}$, em que $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais. Para cada $A \subseteq E$, o fecho é definido por $C(A) = A$, se $A \neq \mathbb{N}$; e $C(\mathbb{N}) = E$. Certamente, C é um operador de consequência sobre E e não existe qualquer subconjunto finito B_f de $\mathbb{N}$ tal que $C(B_f) = E = C(\mathbb{N})$. É claro que aqui poderíamos ter tomado $E = \mathbb{N}$, e C o operador identidade, mas o deixamos nessa forma pois assim será útil mais adiante.

Proposição 5.2: Sejam (E, C) uma lógica e $A \subseteq E$. Se o operador C tem a propriedade da dedutibilidade finita, então é finitário.
Demonstração: Da propriedade da dedutibilidade finita, segue que existe $D_f \subseteq A$ tal que $C(A) = C(D_f)$. Logo, $C(A) = C(D_f) \subseteq \cup\{C(B_f) : B_f \subseteq A\} \subseteq C(A)$. Assim, $C(A) = \cup\{C(B_f) : B_f \subseteq A\}$. Portanto, C é finitário. ■

Mas não vale a recíproca da proposição anterior.

Exemplo 5.3: Seja $(\mathbb{Z}, \mathsf{C})$ tal que $\mathsf{C}(A) = A$, para todo $A \subseteq \mathbb{Z}$. Certamente C é um operador de consequência sobre $\mathbb{Z}$ e é finitário, pois $\mathsf{C}(A) = A = \cup\{\mathsf{C}(x) : x \in A\}$. Porém, para nenhum subconjunto finito B_f de $\mathbb{Z}$, tem-se que $\mathsf{C}(B_f) = \mathbb{Z}$.

Proposição 5.4: Sejam (E, C) uma lógica e $A \subseteq E$. Se cada teoria de (E, C) é finitamente axiomatizável, então C tem a propriedade da dedutibilidade finita.
Demonstração: Dado $A \subseteq E$, temos que $\mathsf{C}(A)$ é uma teoria de (E, C). Como esta teoria é finitamente axiomatizável, então existe $B_f \subseteq A$, tal que $\mathsf{C}(B_f) = \mathsf{C}(A)$. ■

6 Teorias completas

Nesta seção tratamos das teorias de uma dada lógica.

O conjunto $A \subseteq E$ é *trivial* (ou *denso*) em (E, C) se $C(A) = E$.

Proposição 6.1: Seja (E, C) uma lógica. Se $A \subseteq B \subseteq E$ e A é trivial, então também B é trivial.

A proposição mostra que se um conjunto $B \subseteq E$ tem algum subconjunto trivial, então, pela monotonicidade, o conjunto B também é trivial. Pela recíproca da contrária, cada subconjunto de um conjunto não trivial é não trivial.

Em muitos textos sobre lógica universal, um conjunto não trivial é denominado de *consistente*. Contudo, segundo a tradição das lógicas paraconsistentes, devemos separar os conceitos de trivialidade e inconsistência.

Se $A = \{x\}$ é um conjunto unitário e trivial, então o elemento x é chamado de *explosivo*.

Em muitos textos que identificam os conceitos de consistência e não trivialidade, um elemento explosivo é chamado de contraditório.

O conjunto $A \subseteq E$ é *finitamente não trivial* em (E, C) se todo subconjunto finito de A é não trivial em (E, C).

Assim, todo conjunto não trivial é finitamente não trivial. Mas não vale a recíproca. O Exemplo 5.1 serve como contraexemplo. Cada subconjunto finito de $\mathbb{N}$ é não trivial, contudo o conjunto infinito $\mathbb{N}$ é trivial.

Seria importante destacar em quais condições um conjunto finitamente não trivial é também não trivial.

Lema 6.2: Seja (E, C) uma lógica em que C é um operador finitário. Se existe $A_f \subseteq E$ tal que $\mathsf{C}(A_f) = E$, então cada subconjunto finitamente não trivial de E é não trivial.
Demonstração: Seja $A_f \subseteq E$ tal que $\mathsf{C}(A_f) = E$. Se D é trivial, então $A_f = \{a_1, ..., a_k\} \subseteq E = \mathsf{C}(D) = \cup\{\mathsf{C}(D_f) : D_f \subseteq A\}$. Assim, D tem subconjuntos finitos $D_1, ..., D_k$ de maneira que $a_j \in \mathsf{C}(D_j)$, $1 \leq j \leq k$. Daí $A_f = \{a_1, ..., a_k\} \subseteq \cup\{\mathsf{C}(D_1), ..., \mathsf{C}(D_k)\} \subseteq \mathsf{C}(\cup\{D_1, ..., D_k\})$, e $E = \mathsf{C}(A_f) = \mathsf{C}(\cup\{D_1, ..., D_k\})$. Logo, $\mathsf{C}(\cup\{D_1, ..., D_k\}) = E$ e, portanto, D tem um subconjunto finito trivial, isto é, D não é finitamente não trivial. ■

Corolário 6.3: Seja (E, C) uma lógica. Se o operador C tem a propriedade da dedutibilidade finita, então cada subconjunto finitamente não trivial de E é não trivial.

Demonstração: Como o operador C tem a propriedade da dedutibilidade finita, então é finitário. Além disso, como $C(E) = E$ então existe $A_f \subseteq E$ tal que $C(A_f) = E$. O resultado segue do lema anterior. ■

Ter um subconjunto finito e trivial não é fora de comum. Se uma lógica tem um elemento contraditório ou explosivo ela tem um subconjunto finito e explosivo. Também, muito frequentemente as lógicas admitem a dedução finita e, portanto, são finitárias.

A partir da definição de conjunto finitamente não trivial, dizemos que o operador C de (E, C) é *finitamente não trivial* quando para todo $A \subseteq E$:

$$C(B_f) \neq E, \text{ para todo } B_f \subseteq A \Rightarrow C(A) \neq E.$$

Pela sua contrapositiva, o operador C é finitamente não trivial em (E, C) se para todo $A \subseteq E$:

$$C(A) = E \Rightarrow \text{ existe } B_f \subseteq A \text{ tal que } C(B_f) = E.$$

Segundo o Lema 6.2, se (E, C) é finitário e tem $B_f \subseteq E$ tal que $C(B_f) = E$, então C é finitamente não trivial.

Corolário 6.4: Sejam (E, C) uma lógica. Se o operador C tem a propriedade da dedutibilidade finita, então é finitamente não trivial.
Demonstração: Seja $A \subseteq E$ tal que $C(A) = E$. Da propriedade da dedutibilidade finita, segue que existe $B_f \subseteq A$ tal que $C(B_f) = E$. Logo, C é finitamente não trivial. ■

As teorias completas são tais que qualquer novo elemento incluído na teoria a faz trivial.

O conjunto $A \subseteq E$ é *completo* em (E, C) se para todo $x \in E$:

$$x \notin C(A) \Rightarrow C(A \cup \{x\}) = E.$$

Ou ainda, de forma equivalente:

$$C(A \cup \{x\}) \neq E \Rightarrow x \in C(A).$$

Esta definição não exige que A seja não trivial. Se A é completo em (E, C), então para todo $x \in E$, ou $x \in C(A)$ ou $C(A \cup \{x\}) = E$.

Um conjunto $A \subseteq E$ é *adequadamente completo* em (E, C) se A é completo e não trivial.

Sejam (E, C) uma lógica, $A \cup \{x\} \subseteq E$ e A não trivial. O elemento x é *incompatível* com o conjunto A se $C(A \cup \{x\}) = E$.

Denotaremos o conjunto dos elementos incompatíveis com A, por $\tilde{A} = \{x \in E : x \text{ é incompatível com } A\}$.

Proposição 6.5: Sejam (E, C) uma lógica e $A \subseteq E$ não trivial. Então A é completo se, e somente se, $E = C(A) \cup \tilde{A}$.
Demonstração: ($\Rightarrow$) Se A é completo e não trivial e se $x \notin C(A)$, então $x \in \tilde{A}$. Logo, $E = C(A) \cup \tilde{A}$.

($\Leftarrow$) Se $E = C(A) \cup \tilde{A}$, como A é não trivial, então $C(A) \neq E$. Daí, se $x \in E$, então $x \in C(A)$ ou $C(A \cup \{x\}) = E$ e, portanto, A é completo. ■

Neste caso, A é adequadamente completo. Como A é não trivial, então o conjunto Ã é sempre não vazio.

O conjunto $A \subseteq E$ é *maximal não trivial* em (E, C) se A é não trivial e não está contido propriamente em qualquer conjunto não trivial em (E, C).

O conjunto $A \subseteq E$ é *a-saturado* em (E, C) se $a \notin C(A)$ e para todo $x \in E$:

$$x \notin A \Rightarrow a \in C(A \cup \{x\}).$$

O conjunto $A \subseteq E$ é *saturado* em (E, C) quando existe $a \in E$ de maneira que A é *a-saturado*.

Proposição 6.6: Seja (E, C) uma lógica. Se A é maximal não trivial, então A é saturado.
Demonstração: Como A é não trivial, então existe $a \notin C(A)$. Agora, pela maximalidade, se $x \notin C(A)$, então $C(A \cup \{x\}) = E$. Logo, $a \in C(A \cup \{x\})$ e, portanto, A é saturado. ■

Podemos ver a seguir, que não vale a recíproca da proposição anterior.

Exemplo 6.7: Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d\}$ e $C(X) = X$ para todo $X \subseteq A$, tal que $X \neq \{b, c, d\}$ e $C(\{b, c, d\}) = \{a, b, c, d\}$. Certamente C é um operador de consequência sobre A. Além disso, B é saturado, pois $a \notin C(B)$ e para todos os elementos que não estão em B, que são *a* e *b*, temos $a \in C(B \cup \{a\})$ e $a \in C(B \cup \{b\})$. Contudo B não é maximal não trivial, pois $B \subset \{a, c, d\}$ e $C(\{a, c, d\}) \neq E$.

Proposição 6.8: Seja (E, C) uma lógica. Se A é saturado, então A é fechado.
Demonstração: Devemos mostrar que $A = C(A)$. Por absurdo, suponhamos que $A \subset C(A)$. Então existe *b* tal que $b \in C(A)$, mas $b \notin A$. Como A é saturado, então para algum $a \in E$, o conjunto A é *a*-saturado. Daí, $a \notin C(A)$ e, como $b \notin A$, então $a \in C(A \cup \{b\}) \subseteq C(C(A) \cup \{b\}) = C(C(A)) = C(A)$, uma contradição.■

Corolário 6.9: Seja (E, C) uma lógica. Se A é maximal não trivial, então A é fechado.
Demonstração: Imediata a partir das Proposições 6.6 e 6.8. ■

Proposição 6.10: Seja (E, C) uma lógica. Um conjunto A é maximal não trivial se, e somente se, A é não trivial e completo.
Demonstração: ($\Rightarrow$) Se A é maximal não trivial, então é não trivial. Da maximalidade, decorre que se $x \notin C(A)$, então $C(A \cup \{x\}) = E$. Logo, A é completo.

($\Leftarrow$) Como A é não trivial, então $C(A) \neq E$. Agora, como A é completo, se $x \notin C(A)$, então $C(A \cup \{x\}) = E$. Portanto, A é maximal não trivial. ■

Uma lógica abstrata (E, C) tem a *propriedade de Lindenbaum* se cada subconjunto de E não trivial pode ser estendido a um maximal não trivial.

Como é conhecido, o resultado de Lindenbaum, que garante que cada conjunto não trivial pode ser estendido a um conjunto não trivial maximal, exige algum princípio não construtivo. Em muitas justificativas é usado o fato de E ser não enumerável. No próximo teorema usaremos o Lema de Zorn para atingirmos este resultado.

Teorema 6.11: Seja (E, C) uma lógica. Se C tem a propriedade da dedutibilidade finita, então (E, C) tem a propriedade de Lindenbaum.

Demonstração: Segundo a propriedade de Lindenbaum, se A $\subseteq$ E e A é não trivial, então devemos verificar que A está contido em um conjunto maximal não trivial D.

Consideremos o seguinte conjunto $\mathcal{V} = \{X \in \mathcal{P}(E) : A \subseteq X$ e X é finitamente não trivial$\}$. O conjunto $\mathcal{V} \neq \varnothing$, pois como A é não trivial, então é finitamente não trivial e, assim, A $\in \mathcal{V}$. Seja $\mathcal{W}$ uma cadeia em $\mathcal{V}$ e seja B = $\cup\, \mathcal{W}$. Como todo elemento de $\mathcal{W}$ é finitamente não trivial, então B é finitamente não trivial, pois se $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq$ B, então existem $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{W}$ tais que $a_i \in B_i$ e, como $\mathcal{W}$ é linearmente ordenado, se M é o maior dos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, temos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq$ M, o qual é finitamente não trivial e, desse modo, $C(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) \neq E$. Assim, B é um limitante superior para $\mathcal{W}$ e, portanto, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{V}$ tem um elemento maximal D. O conjunto D é finitamente não trivial maximal.

Do Corolário 6.3, segue que o conjunto D é não trivial.

Agora, se x $\in$ E – D, como D é maximal em $\mathcal{V}$, então D $\cup$ {x} não é finitamente não trivial, ou seja, D $\cup$ {x} é não trivial.

Portanto A $\subseteq$ D e D é maximal não trivial. ■

Uma demonstração para este resultado, que está em (De Souza, 2001), usa o fato de E ser enumerável e, com isto, pode usar uma versão enumerável do Axioma da Escolha, um pouco mais fraco que o Lema de Zorn, que é equivalente ao Axioma da Escolha. Para a demonstração do teorema acima, não fizemos assunções sobre o domínio E, mas tivemos que dar uma condição adicional da hipótese do Lema 6.2, para garantir que se o conjunto envolvido é finitamente não trivial, então ele é não trivial.

7 Independência e vizinhanças

Sejam (E, C) uma lógica e B $\subseteq$ E. Um elemento x $\in$ B é *independente* em B se x $\notin$ C(B-{x}).

Assim, quando o elemento x é independente em B, ao ser retirado do conjunto B, as consequências deste novo conjunto têm menos elementos que as consequências de B.

Vejamos como este conceito se relaciona com as noções de motivação topológicas de vizinhança, pontos aderentes e de acumulação.

Seja (E, C) uma lógica e ? a coleção dos conjuntos abertos de (E, C). Para cada x $\in$ E, uma *vizinhança* de x é qualquer conjunto de Λ que contém x.

Indicamos o conjunto das vizinhanças de x por Vz(x).

Sejam (E, C) uma lógica e B $\subseteq$ E. Um ponto x $\in$ E é *aderente* a B quando cada vizinhança de x contém pelo menos um ponto de B.

Proposição 7.1: Se (E, C) é uma lógica, então: x $\in$ C(B) se, e somente se, x é ponto aderente de B.

Demonstração: Por definição, C(B) = $\cap$ {F : F é fechado em (E, C) e B $\subseteq$ F}.

($\Rightarrow$) Seja x $\in$ C(B). Se V $\in$ Vz(x), então x $\in$ C(B), x $\notin$ V^C e V^C é fechado. Logo, B $\nsubseteq$ V^C. Assim, existe y $\in$ B–V^C = B $\cap$ V, ou seja, B $\cap$ V $\neq \varnothing$. Portanto, x é ponto aderente de B.

($\Leftarrow$) Seja F um fechado em (E, C) tal que B $\subseteq$ F. Então, B $\cap$ F^C = $\varnothing$ e F^C $\in$ Λ. Logo, se x é ponto aderente de B, então x $\notin$ F^C, ou seja, x $\in$ F. Assim, x $\in$ $\cap$ {F : F é fechado em (E, C) e B $\subseteq$ F} = C(B). ■

Assim, os pontos aderentes a B são aqueles deduzidos de B.

Corolário 7.2: Se (E, C) é uma lógica, então são equivalentes as afirmações:
(i) x $\in$ C({y})
(ii) se A $\in$ Vz(x), então y $\in$ A.
Demonstração: É um caso particular da Proposição 7.1 para B = {y}. ■

Seja (E, C) uma lógica e B $\cup$ {x} $\subseteq$ E. O elemento x é *ponto de acumulação* de B quando toda vizinhança de x contém pelo menos um ponto de B distinto de x. O conjunto de todos os pontos de acumulação de B é chamado *conjunto derivado* de B e denotado por B'.

Desse modo:

B' = {x $\in$ E : A $\cap$ (B – {x}) $\neq$ $\varnothing$, para todo A $\in$ Vz(x)}.

Segue da definição anterior, que todo ponto de acumulação de B é ponto aderente a B, ou seja, B' $\subseteq$ C(B).

Proposição 7.3: Se (E, C) é uma lógica e B $\subseteq$ E, então C(B) = B $\cup$ B'.
Demonstração: Como B e B' estão contidos em C(B), então B $\cup$ B' $\subseteq$ C(B). Por outro lado, seja x $\in$ C(B). Se x $\in$ B, então x $\in$ B $\cup$ B'. Se x $\notin$ B, como x $\in$ C(B), então, pela Proposição 7.1, x é um ponto aderente a B. Logo, cada vizinhança de x intersecta B em um ponto distinto de x. Assim, x $\in$ B' e C(B) $\subseteq$ B $\cup$ B'. Portanto, C(B) = B $\cup$ B'. ■

Proposição 7.4: Sejam (E, C) uma lógica e B $\subseteq$ E. Então, B é fechado se, e somente se, B' $\subseteq$ B.
Demonstração: Se B é fechado, então C(B) = B. Da proposição anterior, C(B) = B $\cup$ B', então B $\cup$ B' = B e, portanto, B' $\subseteq$ B. Por outro lado, se B' $\subseteq$ B, então C(B) = B $\cup$ B' = B, ou seja, B é fechado. ■

Proposição 7.5: Sejam (E, C) uma lógica e B $\subseteq$ E. Se A $\subseteq$ B, então A' $\subseteq$ B'.
Demonstração: Se x $\in$ A', então para todo V $\in$ Vz(x), V $\cap$ (A – {x}) $\neq$ $\varnothing$. Como A $\subseteq$ B, então A –{x} $\subseteq$ B –{x}. Assim, para todo V $\in$ Vz(x), $\varnothing$ $\neq$ V $\cap$ (A–{x}) $\subseteq$ V $\cap$ (B –{x}) e, portanto, x $\in$ B'. ■

Proposição 7.6: Sejam (E, C) uma lógica e B $\cup$ {x} $\subseteq$ E. Então, x $\in$ B' se, e somente se, x $\in$ C(B–{x}).
Demonstração: Se x $\in$ B', então para todo V $\in$ Vz(x), V $\cap$ (B–{x}) $\neq$ $\varnothing$ e, então, x é ponto aderente de B–{x}, isto é, x $\in$ C(B{x}). Por outro lado, se x $\in$ C(B–{x}), então x $\in$ (B–{x}) $\cup$ (B–{x})'. Como x $\notin$ (B–{x}), então x $\in$ (B–{x})' e, pela proposição anterior, x $\in$ B'. ■

Desse modo, x é ponto de acumulação de B se, e somente se, x é ponto aderente de B–{x}. Finalmente, x $\in$ B é independente em B se, e somente se, x não é ponto aderente de B–{x} se, e somente se, x não é ponto de acumulação de B.

Se B não conta com qualquer de seus pontos de acumulação, então cada elemento de B é independente em B, isto é, B é um conjunto de elementos independentes em B se $B \cap B' = \varnothing$.

8 Compacidade

A motivação para a definição a seguir de conjunto compacto vem da topologia.

Sejam (E, C) uma lógica e $A \subseteq E$. Então:

(i) uma *cobertura* de A é um conjunto *C* de subconjuntos de E tal que $A \subseteq \cup C$.

(ii) a cobertura *C* é *cobertura por abertos* de A, se cada elemento de *C* é um aberto da lógica (E, C).

(iii) uma *subcobertura* da cobertura *C* de A é qualquer subconjunto de *C* que ainda é cobertura de A.

(iv) o conjunto *C* é uma *cobertura finita* se tem um número finito de elementos.

Dada uma lógica abstrata (E, C), um conjunto $B \subseteq E$ é *compacto* se toda cobertura por abertos *C* de B tem uma subcobertura finita. A lógica (E, C) é *compacta* se o conjunto E é compacto.

Assim, o conjunto B é compacto se para toda família de conjuntos abertos $\{A_i\}_{i \in J}$, vale:

se $B \subseteq \cup_{j \in J} A_j$, então existe um subconjunto finito $I \subseteq J$, tal que $B \subseteq \cup_{i \in I} A_i$.

Substituindo-se conjuntos abertos por seus complementos, temos que uma lógica (E, C) é compacta se, e somente, para toda família de fechados $\{B_j\}_{j \in J}$ vale:

se para todo subconjunto finito $I \subseteq J$, $\cap_{i \in I} B_i \neq \varnothing$, então $\cap_{j \in J} B_j \neq \varnothing$.

Proposição 8.1: Seja (E, C) uma lógica compacta. Se B é um subconjunto fechado de E, então B é compacto.

Demonstração: Seja $B \subseteq \cup_{j \in J} A_j$ com A_j aberto para cada $j \in J$. Assim, $E = B^C \cup \cup_{j \in J} A_j$. Daí, pela compacidade de (E, C), segue que $E = B^C \cup \cup_{i \in I} A_i$, para algum conjunto finito $I \subseteq J$. Logo, $B \subseteq \cup_{i \in I} A_i$. ■

A expressão compacidade é usada na investigação de lógicas universais. Contudo, são usadas caracterizações distintas, porém próximas do conceito, em que há alguma relação entre subconjuntos finitos de um conjunto infinito e o conjunto todo.

Por exemplo, para De Souza (2001) a compacidade é dada por um operador finitário, para Beziau (2007) a compacidade é dada pela dedutibilidade finita e para Wallmann (2013) a compacidade coincide com a finitude não trivial.

Como já observamos que estes conceitos não são todos coincidentes, embora algum possa implicar outro, buscaremos um refinamento destas noções.

Cognitio, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 333-348, jul./dez. 2014

Já vimos que a dedutibilidade finita implica o operador ser finitário e finitamente não trivial. Vimos também que ser finitário não implica ser finitamente não trivial.

O próximo exemplo mostra que ser finitamente não trivial não implica a dedutibilidade finita.

Exemplo 8.2: Seja (E, C) em que E = $\mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais, e para cada A $\subseteq$ E, o seu fecho é definido por C(A) = A, caso 0 $\notin$ A e C(A) = E, caso 0 $\in$ A. Então C é um operador de consequência finitamente não trivial, pois se C(A) = E, então 0 $\in$ A e C({0}) = E. Mas C não tem a propriedade da dedutibilidade finita, pois se A é um conjunto infinito que não contém o 0, então C(A) = A, mas não existe $A_f \subseteq A$ tal que $C(A_f) = A$. Temos também que o operador é finitário, pois $C(A) = \cup \{C(A_f) : A_f \ \ A\}$.

Ser finitamente não trivial também não implica ser finitário, como podemos verificar a seguir.

Exemplo 8.3: Seja (E, C) em que E = $\mathbb{N}$, o conjunto dos números naturais, e para cada A $\subseteq$ E, o seu fecho é definido por:

$$C(A) = E, \text{ se } 0 \in A$$
$$C(\mathbb{N} - \{0, 2\}) = \mathbb{N} - \{0\}$$
$$C(\mathbb{N} - \{0, 1, 2\}) = \mathbb{N} - \{0, 1\}$$
$$C(A) = A, \text{ nos demais casos.}$$

A função C é um operador de consequência finitamente não trivial, pois se C(A) = E, então 0 $\in$ A e C({0}) = E. Porém, o operador C não é finitário, pois $2 \notin \cup\{C(A_f) : A_f \subseteq \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}\}$, mas $2 \in \mathbb{N} - \{0, 1\} = C(\mathbb{N} - \{0, 1, 2\})$. Assim, $C(\mathbb{N} - \{0, 1, 2\}) = \mathbb{N} - \{0, 1\} \neq \cup\{C(A_f) : A_f \subseteq \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}\}$.

Como a dedutibilidade finita implica ser finitário e C não é finitário, então não pode ter a dedutibilidade finita.

Vejamos que C não tem a propriedade da dedutibilidade finita, pois se A é um conjunto infinito que não contém o 0, então C(A) = A, mas não existe $A_f \subseteq A$ tal que $C(A_f) = A$.

O próximo exemplo mostra que é possível termos uma lógica compacta sem que o seu operador seja finitamente não trivial.

Exemplo 8.4: Seja ($\mathbb{R}$, C) em que o operador C é definido por: C(A) = $\mathbb{R}$, se $\mathbb{N} \subseteq$ A, e C(A) = A $\cup$ {π}, caso contrário. Certamente, C é um operador de consequência sobre $\mathbb{R}$.

Assim, C($\varnothing$) = {π} e, então, o conjunto $\varnothing$ não é fechado e $\mathbb{R}$ não é aberto em ($\mathbb{R}$, C). Como consequência, $\mathbb{R}$ não é uma união de abertos, pois então seria aberto. Logo, não existe uma cobertura de abertos de $\mathbb{R}$ e, portanto, ($\mathbb{R}$, C) é compacto.

O operador C não é finitamente não trivial, pois C($\mathbb{N}$) = $\mathbb{R}$, contudo para nenhum subconjunto finito A_f de $\mathbb{N}$ temos $C(A_f) = \mathbb{R}$.

Agora mostramos que o operador pode ter a propriedade da dedutibilidade finita sem que a lógica (E, C) seja compacta.

Exemplo 8.5: Seja (E, C) uma lógica, em que E = $\mathbb{R}^{\#} \cup \{\infty\} = (0,\infty]$, isto é, $\mathbb{R}^{\#}$ é o conjunto dos reais positivos e consideramos $r < \infty$, para todo real positivo r. Seja C o operador de consequência definido por:

$$C(\varnothing) = \varnothing$$

$$C(A) = \{x \in E : x \leq \sup(A)\} = (0, \sup(A)], \text{ para } A \neq \varnothing,$$

em que sup(A) é o supremo do conjunto A em E. Então, os fechados de (E, C) são os conjuntos $\varnothing$ e os da forma (0, *b*], para *b* $\mathbb{R}^{\#} \cup \{\infty\}$; e os abertos são E e os conjuntos da forma (*b*,∞], para $b \in \mathbb{R}^{\#}$. Assim, se $A \neq \varnothing$, C(A) = C({sup(A)}), ou seja, C tem a propriedade da dedutibilidade finita. Por outro lado, o conjunto $\{(1/n, \infty] : n \in \mathbb{N}^*\}$ é uma cobertura por abertos de E que não admite uma subcobertura finita. Desse modo, (E, C) não é compacta.

Mas, o que há então de compacidade nestes conceitos?

No contexto da Lógica, a compacidade é muito conhecida com a seguinte formulação: “Um conjunto de fórmulas Δ é compacto se o fato de todo subconjunto finito Δ_f de Δ ter modelo implica que o conjunto Δ tem modelo”.

Para esta formulação faz necessário entender o que é modelo de uma lógica. De um modo geral, um modelo é uma estrutura matemática em que as fórmulas da lógica podem ser interpretadas. Se a dedutibilidade desta lógica porta as condições de um operador de Tarski, então também a estrutura modelo porta um operador de Tarski. Em outro artigo daremos mais detalhes sobre estes aspectos ainda em uma abordagem de lógica universal.

Se a lógica admite um teorema de completude com a seguinte formulação; “Todo conjunto não trivial (consistente) de fórmulas tem um modelo”, então a compacidade lógica mencionada acima fica equivalente a “finitude não trivial”. Daí, em alguns textos há a equivalência entre os dois conceitos. Contudo, a plena equivalência requer fatos adicionais dos quais ainda não dispomos. De Souza (2001) apresenta alguns destes detalhes.

9 Propriedades adicionais para o conceito de operador de consequência

Os operadores de fecho podem ter outras propriedades além das elencadas até o momento.

Seja (E, C) uma lógica. O operador C é *0-fechado* ou *vácuo* se $C(\varnothing) = \varnothing$ e é *disjuntivo* se $C(A \cup B) \subseteq C(A) \cup C(B)$.

As lógicas interessantes são as não vácuas, pois lógicas, em geral, devem ter teoremas.

Numa lógica (E, C), garantimos que o conjunto $\varnothing$ é aberto e, portanto, E é fechado. Agora, se o operador é 0-fechado, então o conjunto $\varnothing$ é fechado e, desse modo, E é aberto. Se o operador é disjuntivo, então o fecho da união é idêntico a união do fecho: $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$.

Se o operador C da lógica abstrata (E, C) é 0-fechado e disjuntivo, então é um operador de *Kuratowski* e a estrutura (E, C) é um *espaço topológico*. Neste caso, temos que C é um operador topológico.

A intuição inicial do operador de consequência é de fornecer as consequências de um dado conjunto $A \subseteq E$, o qual não deve ser sempre fechado. O mais natural seria que alguns conjuntos são fechados, mas não triviais, porém outros não.

As funções identidade e constante em E não deveriam ser exemplos naturais de operadores lógicos.

Seja (E, C) uma lógica. O operador C é *produtivo* se existe A $\subseteq$ E tal que A $\subset$ C(A) $\subset$ E.

Diante disso, um operador produtivo, pelo menos para algum subconjunto de E, gera algumas novas consequências que não estão dadas inicialmente. Por outro lado, não trivializa o conjunto inicial. Assim, estes casos patológicos de operadores dados pelas funções identidade e constante em E não contam como operadores produtivos. Por outro lado, os operadores lógicos usuais são produtivos. Em outro momento faremos uma investigação mais fina destes operadores.

Referências

BEZIAU, J-Y. Universal logic. In: T. CHILDERS; O. MAJER (eds.). *Proceedings of the 8th International Colloquium – Logica' 94*. Prague: Czech Academy of Sciences, 2004, p. 73-93.

_____. From consequence operator to universal logic: a survey of general abstract logic. In: BEZIAU, J-Y. (ed.) *Logica universalis*. Birkhäuser; Basel, 2007, p. 3-19.

DE SOUZA, E. G. Lindenbaumologia I: a teoria geral. *Cognitio: Revista de Filosofia*, v. 2, p. 213-219, 2001.

_____. Lindenbaumologia II: a teoria geral. *Cognitio: Revista de Filosofia*, v. 3, p. 115-121, 2002.

HOPPMANN, A. G. *Fecho e imersão*. Tese de Doutorado em Matemática. Rio Claro: Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, 1973, 86 p.

MARTIN, N. M.; POLLARD, S. *Closure spaces and logic*. Dordrecht: Kluwer, 1996.

SAUTTER, F. T.; FEITOSA, H. A. Lógicas paraclássicas: exposição, defesa e problemas. In: *Cognitio: Revista de Filosofia*, v. 6, n. 1, p. 85-93, 2005.

TARSKI, A. *Logic, semantics, metamathematics*. 2 ed. J. Corcoran (ed.). Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983.

WALLMANN, C. A shared framework for consequence operations and abstract model theory. *Logica Universalis*, v. 7, p. 125-145, 2013.

WÓJCICKI, R. *Theory of logical calculi*. Dordrecht: Kluwer. 1998.

Endereço/ Address

Hércules de Araújo Feitosa
Mauri Cunha do Nascimento
Luiz Henrique da Cruz Silvestrini
Departamento de Matemática - FC/UNESP
Avenida Luiz Edmundo C. Coube, 14-01
17033-360 – Bauru – SP – Brasil

Data de envio: 05-11-14
Data de aprovação: 07-01-15