

Sobre relações de consequência com múltiplas conclusões

About consequence relations with multiple conclusions

Hércules de Araújo Feitosa

UNESP – FC – Bauru
haf@fc.unesp.br

Angela Pereira Rodrigues Moreira

UNESP – FC – Bauru
angela.p.rodrigues@bol.com.br

Marcelo Reicher Soares

UNESP – FC – Bauru
reicher@fc.unesp.br

Resumo: Neste artigo tratamos das relações de consequência em ambiente puramente conjuntista e damos ênfase às relações de consequência com conclusões múltiplas. Mostramos como relacionar, nesse ambiente conjuntista, as consequências com conclusões múltiplas e as consequências com conclusão unitária, bem como mostramos que tais relações são casos particulares de sistemas dedutivos de Tarski. Por fim, comparamos as caracterizações apresentadas com as noções usuais de relações reflexivas e transitivas.

Palavras-chave: Operadores de consequência. Relações de consequência. Consequência com conclusões múltiplas.

Abstract: *In this article we deal with consequence relations in an environment restricted to the set theory and emphasize the consequence relations with multiple conclusions. We show how to relate, in this environment, the consequences with multiple conclusions and consequence with unitary conclusion, and we show that such relations are particular cases of deductive systems of Tarski. Finally, we compare the characterizations presented with the usual concepts of reflexive and transitive relations.*

Keywords: *Consequence operators. Consequence relations. Consequence with multiple conclusions.*

Introdução

Desde a Antiguidade, com os sofistas e Platão, por exemplo, encontramos vestígios da Lógica evidenciados pela preocupação com a veracidade de argumentos. Aristóteles (384-322 a.C.) iniciou um estudo sistemático das formas de argumentação ou de raciocínios.

Após Aristóteles, Gottlob Frege (1848-1925) elaborou um cálculo formalizado com operadores e quantificadores determinados sobre uma linguagem artificial subjacente, a sua lógica de segunda ordem. Desde então, a Lógica contemporânea incorporou o uso de alguma linguagem artificial como pressuposto inicial.

A partir do início do século XX, surgiram diversas lógicas diferentes da Lógica de até então, que ficou conhecida como Lógica Clássica. Assim, essas novas foram classificadas como lógicas não clássicas.

Claramente, todas as lógicas, independente da linguagem, têm como uma de suas atribuições essenciais o entendimento do raciocínio, da consequência, da inferência dedutiva. Ou seja, devem, entre outras ações, avaliar como a partir de determinadas informações, usualmente chamadas de premissas, obtemos conclusões, ou ainda, quais conclusões são consequência das premissas dadas.

Alfred Tarski, em 1930, com o intuito de capturar o que as diversas lógicas possuem em comum, definiu o operador de consequência de Tarski. Este é uma função que busca colocar em evidência os aspectos que Tarski julgou fundamentais na noção de consequência.

Concomitante ao conceito de operador de consequência, que é definido por meio de uma função, podemos considerar relações de consequência. Estas últimas associam a um conjunto de premissas uma informação conclusiva, ou ainda, algumas informações conclusivas. Existem muitas formulações, com diferenças sutis, para o conceito de relações de consequência na literatura. Como sabemos, uma relação é um conceito matemático mais geral que o de função. No entanto, ao longo do texto, mostraremos como os conceitos de operador de consequência e de relação de consequência podem ser correlacionados.

Decorre da multiplicidade de lógicas hoje existentes que, embora o conceito de operador de consequência de Tarski e de relações de consequência sejam bastante gerais, não dão conta de todo espectro dessas lógicas. A intenção de Tarski ao apresentar seu operador foi suprimir a necessidade de abordar conceitos dos conectivos lógicos e, dessa forma, tratar da concepção de Lógica em um ambiente bastante amplo, o qual hoje nomeamos de lógica universal.

Neste trabalho apresentamos o operador de consequência de Tarski e duas definições de relação de consequência por nós sugeridas, uma de conclusão única e outra de múltiplas conclusões. São refinamentos de definições encontradas na literatura sobre relações de consequência. Demonstramos que o operador de consequência de Tarski e nossas duas relações de consequência estão estreitamente relacionados, todos gerando exemplos de sistemas dedutivos de Tarski.

Além disso, mostramos que a reflexividade e a transitividade de uma relação, num certo sentido, são condições necessárias e suficientes para as relações de consequência adotadas. Como a relação de consequência aqui adotada é antissimétrica, decorre que uma relação de ordem parcial gera uma relação de consequência e vice-versa.

1 Operadores de Tarski

Iniciamos com a definição de operador de consequência de Tarski, introduzida em meados da década de 1930, para caracterizar, através de uma função, o conceito

de consequência lógica. Surgiam naqueles tempos muitas distintas lógicas e Tarski evidenciou em seu operador o que deveria ser preservado por uma lógica.

Hoje entendemos que a definição de Tarski engloba uma classe bastante ampla de lógicas, mas não todas as lógicas. Chamamos as primeiras de lógicas de Tarski.

Definição 1.1: Um operador de consequência sobre E é a uma função $C: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ tal que, para todos $A, B \subseteq E$, valham:

$$(C_1) A \subseteq C(A) \text{ [autodedutibilidade]}$$

$$(C_2) A \subseteq B \Rightarrow C(A) \subseteq C(B) \text{ [monotonicidade]}$$

$$(C_3) C(C(A)) \subseteq C(A) \text{ [idempotência].}$$

Para todo operador de consequência C , por (C_1) e (C_3) vale a igualdade $C(C(A)) = C(A)$.

Definição 1.2: Um operador de consequência C sobre E é *finitário* quando, para todo $A \subseteq E$:

$$(C_4) C(A) = \cup\{C(A_i) : A_i \text{ é subconjunto finito de } A\}.$$

Tarski mostrou, em seus textos que, (C_1) , (C_3) e (C_4) garantem (C_2) .

Definição 1.3: Espaço de Tarski (*sistema dedutivo, espaço de fecho, lógica*) é um par (E, C) , em que E é um conjunto qualquer e C é um operador de consequência sobre E .

Definição 1.4: Seja C um operador de consequência sobre E , o conjunto A é *fechado* em (E, C) quando $C(A) = A$, e A é *aberto* quando o complementar de A , denotado por A^c , é fechado em (E, C) .

Proposição 1.5: Se (E, C) é um espaço de Tarski, então o domínio E é fechado, o conjunto \emptyset é aberto e para todo $A \subseteq E$, o conjunto $C(A)$ é fechado. ■

Proposição 1.6: Toda intersecção de conjuntos fechados num espaço de Tarski (E, C) é ainda um conjunto fechado. Toda união de conjuntos abertos é um aberto de (E, C) . ■

Certamente, $C(\emptyset)$ e E correspondem ao menor e ao maior fechados, respectivamente, associados ao operador de consequência C sobre o conjunto E .

Definição 1.7: Um espaço de Tarski (E, C) é *vácuo* se $C(\emptyset) = \emptyset$.

Definição 1.8: Num espaço de Tarski (E, C) , dois elementos $x, y \in E$ são equivalentes relativos ao operador C , o que é denotado por $x \sim y$, se $C(\{x\}) = C(\{y\})$.

2 Relações de consequência não-equipotentes

É bastante usual vincularmos o conceito de consequência com uma relação que atribui a cada conjunto de premissas um elemento como consequência. Tal procedimento, de certo modo, generaliza as inferências obtidas por regras de dedução, nas quais uma conclusão é obtida a cada passo de uma inferência.

Definição 2.1: Denominamos uma relação $R \subseteq E \times E$ de *equipotente* e uma relação $R \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ de *não-equipotente*, em que $\mathcal{P}(E)$ é o conjunto das partes de E .

Daí, uma relação de consequência de conclusão unitária é um caso de relação de consequência não-equipotente, enquanto que uma relação de consequência de múltiplas conclusões será exemplo de relação de consequência equipotente.

O conceito de operador de consequência de Tarski, definido na seção anterior, é um exemplo de relação equipotente, visto que cada função é caso particular de relação.

Segue uma definição de relação de consequência não-equipotente bastante usual, como em (FONT *et al.*, 2003).

Definição 2.2: Seja E um conjunto não vazio. Para o subconjunto $A \cup B \cup \{x, y\} \subseteq E$, a relação $\vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ é de consequência sobre E se valem:

$$(\alpha) x \in A \Rightarrow A \vdash x$$

$$(\beta) A \vdash x \text{ e } A \subseteq B \Rightarrow B \vdash x$$

$$(\gamma) A \vdash x \text{ e, para todo } y \in A, B \vdash y \Rightarrow B \vdash x.$$

Podemos denotar o sistema dedutivo dado pelo conjunto E e a relação de consequência \vdash sobre E por (E, \vdash) .

Proposição 2.3: A relação de consequência \vdash acima sobre E determina uma relação de ordem parcial dada por:

$$(i) \{x\} \vdash x; (ii) \{x\} \vdash y \text{ e } \{y\} \vdash z \Rightarrow \{x\} \vdash z; (iii) \{x\} \vdash y \text{ e } \{y\} \vdash x \Leftrightarrow x \sim y.$$

Demonstração: (i) é consequência de (α) , (ii) é um caso particular de (γ) : $\{y\} \vdash z$ e, para todo $y \in \{y\}$, $\{x\} \vdash y \Rightarrow \{x\} \vdash z$ e (iii) decorre de x e y terem as mesmas consequências. ■

Proposição 2.4: As condições (α) e (γ) implicam (β) .

Demonstração: Consideremos que $A \vdash x$ e $A \subseteq B$. Da inclusão $A \subseteq B$, segue que se $y \in A$, então $y \in B$. Daí e da condição (α) , segue que para todo $y \in A$, $B \vdash y$. Agora, usando (γ) em $A \vdash x$ e para todo $y \in A$, $B \vdash y$, segue que $B \vdash x$. ■

A seguir, para indicar que $B \vdash y$, para todo $y \in A$, escreveremos $B \vdash A$. Assim a transitividade (ii), acima, decorre de $B \vdash A$ e $A \vdash x \Rightarrow B \vdash x$.

É conhecido que, dado um operador de consequência, podemos obter uma relação de consequência, como acima, e vice-versa. Uma demonstração está em (FEITOSA *et al.*, 2016).

Contudo, existem outras definições de relação de consequência. Daremos uma variação nossa, que mostramos ser equivalente a essa acima.

Definição 2.5: Seja E um conjunto não vazio. Para o subconjunto $A \cup B \cup \{x, y\} \subseteq E$, a relação $\vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ é uma relação de consequência sobre E se valem as condições:

- (R₁) $\{x\} \vdash x$
- (R₂) $A \vdash x \Rightarrow A \cup B \vdash x$
- (R₃) $A \vdash x$ e $A \cup \{x\} \vdash y \Rightarrow A \vdash y$.

As condições da definição acima são independentes, pois, se tomarmos $E = \{a, b, c\}$ e $\vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$, por meio dos exemplos abaixo vemos, respectivamente, a independência de (R₁), (R₂) e (R₃), em relação às outras duas condições.

- (i) Se \vdash é tal que $\{a\} \vdash a$; $\{b\} \vdash b$; $\{c\} \vdash c$; $\{a\} \vdash c$; $\{a, c\} \vdash b$; $\{a, b\} \not\vdash a$ e $\{a\} \not\vdash b$, claramente (R₁) se verifica. Como $\{a\} \vdash a$, mas $\{a\} \cup \{b\} \not\vdash a$, então (R₂) não se verifica. De $\{a\} \vdash c$ e $\{a\} \cup \{c\} \vdash b$, mas $\{a\} \not\vdash b$ temos que (R₃) não se verifica.
- (ii) Seja \vdash de forma que $\{a\} \vdash b$; $\{a, b\} \vdash b$; $\{a, c\} \vdash b$; $\{a, b, c\} \vdash b$; $\{a, b\} \vdash a$; $\{a, b, c\} \vdash a$ e $\{a\} \not\vdash a$. A condição (R₂) se verifica. De $\{a\} \not\vdash a$, (R₁) não se verifica e, disso e de $\{a\} \vdash b$ e $\{a\} \cup \{b\} \vdash a$, (R₃) não se verifica.
- (iii) Consideremos uma relação em que $\{a\} \not\vdash a$; $\{b\} \vdash b$ e $\{a, b\} \not\vdash b$. (R₃) se verifica, mas, evidentemente, (R₁) e (R₂) não se verificam.

Pensamos na relação da Definição 2.5 por ser uma definição com três condições independentes, bem como a definição de operador de consequência.

Proposição 2.6: As condições (R₂) e (R₃) implicam (R₄): $A \vdash x$ e $B \cup \{x\} \vdash y \Rightarrow A \cup B \vdash y$.

Demonstração: Consideremos que $A \vdash x$ e $B \cup \{x\} \vdash y$. Por (R₂), segue que $A \cup B \vdash x$ e $A \cup B \cup \{x\} \vdash y$. Daí, por (R₃), temos que $A \cup B \vdash y$. ■

Proposição 2.7: A condição (R₄) implica (R₃).

Demonstração: Basta tomarmos $B = A$. ■

Proposição 2.8: As condições (R₁) e (R₂) implicam (R₃): $x \in A \Rightarrow A \vdash x$.

Demonstração: Por (R₁), $\{x\} \vdash x$. Agora, se $x \in A$, por (R₂), $\{x\} \cup A = A \vdash x$. ■

Agora, mostramos a inter-relação entre os conceitos das Definições 1.1 e 2.5.

Proposição 2.9: Se (E, \mathbf{C}) é espaço de Tarski, então a relação induzida por $A \vdash x \Leftrightarrow x \in \mathbf{C}(A)$ determina uma relação de consequência conforme a Definição 2.5.

Demonstração: Por (C₁), $\{x\} \subseteq \mathbf{C}(\{x\}) \Leftrightarrow x \in \mathbf{C}(\{x\}) \Leftrightarrow \{x\} \vdash x$. Assim, vale (R₁).

Se $A \vdash x$, pela indução, $x \in \mathbf{C}(A)$ e, daí, por (C_2) , como $A \subseteq A \cup B$, $x \in \mathbf{C}(A \cup B)$. Mais uma vez pela indução, $A \cup B \vdash x$. Então, vale (R_2) .

Se $A \vdash x$ e $A \cup \{x\} \vdash y$, pela indução, $x \in \mathbf{C}(A)$ e $y \in \mathbf{C}(A \cup \{x\})$. Daí, por (C_2) , $y \in \mathbf{C}(A \cup \mathbf{C}(A))$ e, por (C_1) , $y \in \mathbf{C}(\mathbf{C}(A)) = \mathbf{C}(A)$. Pela indução, $A \vdash y$. Logo, vale (R_3) . ■

Agora, a recíproca.

Proposição 2.10: Se (E, \vdash) representa uma relação de consequência segundo a Definição 2.5 e definimos $\mathbf{C}(A) = \{x : A \vdash x\}$, então \mathbf{C} é um operador de Tarski sobre E .

Demonstração: Por (R_5) , se $x \in A \Rightarrow A \vdash x$ e, portanto, $A \subseteq \mathbf{C}(A)$, donde vale (C_1) .

Se $A \vdash B$ e $y \in \mathbf{C}(A)$, então $A \vdash y$. Por (R_2) , $A \cup B \vdash y$ e, assim, $B \vdash y$. Daí, $y \in \mathbf{C}(B)$ e vale (C_2) .

De (R_3) temos que $A \vdash x$ e $A \cup \{x\} \vdash y \Rightarrow A \vdash y$. Daí e segundo o operador \mathbf{C} , temos que, para todo x , se $x \in \mathbf{C}(A)$ e $y \in \mathbf{C}(A \cup \{x\})$, então $y \in \mathbf{C}(A)$, então, por (R_1) e (R_2) , se $y \in \mathbf{C}(A \cup \mathbf{C}(A)) = \mathbf{C}(\mathbf{C}(A))$, então $y \in \mathbf{C}(A)$. Desse modo, vale (C_3) . ■

Podemos concluir que o operador de consequência da Seção 1, assim como as duas definições de relação de consequência desta seção geram sistemas dedutivos de Tarski.

Como estas duas relações de consequência estão definidas no conjunto $\mathcal{P}(E) \times E$, que associa um conjunto e um único elemento, então elas são casos de consequências de conclusão unitária e são não-equipotentes.

Todavia, se olhamos para a definição de operador de consequência, temos uma função que leva um conjunto em outro conjunto. Assim, precisamos compatibilizar as noções de relação não-equipotente e relação equipotente. Isso já foi parcialmente feito na Proposição 2.10 a partir da definição $\mathbf{C}(A) = \{x : A \vdash x\}$. A seguir abordaremos melhor essa ideia.

3 Relações de consequência equipotentes

Relações de consequência de múltiplas conclusões, ou equipotentes, são definidas sobre $\mathcal{P}(E)$.

Além da comparação com o operador de consequência como motivação para as relações de consequência equipotentes, podemos visitar também os cálculos de sequentes de Gentzen (1969) para vermos relações de consequência de conjunto em conjunto.

Gentzen definiu seus sequentes iniciais sobre sequências finitas de fórmulas e a literatura, pouco depois, expandiu para multiconjuntos finitos. Multiconjuntos generalizam o conceito usual de conjuntos ao admitir a repetição ou multiplicidade de elementos.

A nossa versão trata de conjuntos quaisquer, podendo inclusive ser conjuntos com infinitos elementos. Ela é motivada pela nossa definição de relação de consequência.

Definição 3.1: Se E é um conjunto não vazio e A, B e C são subconjuntos de E , então uma relação de consequência com múltiplas conclusões, $\Vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$, sobre $\mathcal{P}(E)$ obedece:

$$(S_1) A \Vdash A$$

$$(S_2) A \Vdash C \Rightarrow A \cup B \Vdash C$$

$$(S_3) A \Vdash C \text{ e } A \cup C \Vdash B \Rightarrow A \Vdash B.$$

A condição (S_3) é um corte generalizado, pois ele elimina todo o conjunto C . Certamente, a condição (S_3) implica a condição (S_4) , abaixo, que é o corte ponto a ponto:

$$(S_4) A \Vdash \{x\} \text{ e } A \cup \{x\} \Vdash B \Rightarrow A \Vdash B.$$

Além disso, a condição (S_3) mais a monotonicidade também garante uma transitividade dedutiva entre conjuntos.

Proposição 3.2: Se $A \Vdash B$ e $B \Vdash C$, então $A \Vdash C$.

Demonstração: Consideremos que $A \Vdash B$ e $B \Vdash C$. Pela monotonicidade, $A \cup B \Vdash C$ e, daí, por (S_3) , $A \Vdash C$. ■

Verificaremos, a seguir, que esta relação de consequência equipotente também nos dá um sistema dedutivo de Tarski.

Se (E, \vdash) determina uma relação de consequência não-equipotente, então podemos gerar uma relação de consequência equipotente (E, \Vdash) por $A \Vdash B \Leftrightarrow A \vdash b$, para todo $b \in B$, conforme observação do início da Seção 2.

Por outro lado, se (E, \Vdash) configura uma relação de consequência equipotente, então podemos gerar uma relação de consequência não-equipotente (E, \vdash) do seguinte modo: $A \vdash b \Leftrightarrow A \Vdash \{b\}$.

Proposição 3.3: Se $A \subseteq B$, então $B \Vdash A$.

Demonstração: Como $A \Vdash A$, por (S_2) , $A \cup B \Vdash A$, mas $A \cup B = B$ e, assim, $B \Vdash A$. ■

Para fazermos a ponte com o operador de consequência de Tarski, usamos a seguinte relação de equivalência:

$$A \Vdash B \iff B \subseteq C(A).$$

Proposição 3.4: A relação de consequência equipotente (E, \Vdash) determina um operador de Tarski C .

Demonstração: Como $A \Vdash A$, então $A \subseteq C(A)$ e vale (C_1) .

Se $A \subseteq B$ e $y \in C(A)$, então $\{y\} \subseteq C(A)$. Pela relação acima, $A \Vdash \{y\}$ e, por (S_2) , $A \cup B \Vdash \{y\}$. Assim, $\{y\} \subseteq C(A \cup B) = C(B)$ e, portanto, $y \in C(B)$. Daí vale (C_2) .

Se $y \in C(C(A))$, então $\{y\} \subseteq C(C(A))$. De (S_3) temos que $A \Vdash \{x\}$ e $A \cup \{x\} \Vdash \{y\} \Rightarrow A \Vdash \{y\}$. Pela relação acima, $\{x\} \subseteq C(A)$ e $\{y\} \subseteq C(A \cup \{x\}) \Rightarrow \{y\} \subseteq C(A)$ e, daí, que $\{y\} \subseteq C(A \cup C(A)) = C(C(A)) \Rightarrow \{y\} \subseteq C(A)$. Então, por MP, $\{y\} \subseteq C(A) \Leftrightarrow y \in C(A)$. Logo, vale (C_3) . ■

Proposição 3.5: Cada espaço de Tarski (E, \mathbf{C}) determina uma relação de consequência equipotente.

Demonstração: Por (C_1) , $A \subseteq \mathbf{C}(A) \Leftrightarrow A \Vdash A$ e, desse modo, vale (S_1) .

Se $A \Vdash B$, pela relação acima, $B \subseteq \mathbf{C}(A)$ e daí $B \subseteq \mathbf{C}(A \cup C)$. Mais uma vez pela relação, $A \cup C \Vdash B$. Então, vale (S_2) .

Se $A \Vdash C$ e $A \cup C \Vdash B$, pela relação acima, $C \subseteq \mathbf{C}(A)$ e $B \subseteq \mathbf{C}(A \cup C)$. Daí, $B \subseteq \mathbf{C}(A \cup \mathbf{C}(A)) = \mathbf{C}(\mathbf{C}(A)) = \mathbf{C}(A)$. Pela relação, $A \Vdash B$ e, portanto, vale (S_3) . ■

Então, esta relação de consequência equipotente também nos dá sistemas dedutivos de Tarski.

4 Consequência dedutiva e relação de ordem

Como é bastante conhecido no contexto lógico, a noção de dedução está associada à ordem parcial.

Nos textos de lógicas algébricas, usualmente os modelos admitem pelo menos a estrutura de reticulado que já pressupõe uma noção de ordem parcial. Também temos a definição usual de demonstração de que a conclusão vem de dados anteriores e, portanto, estabelecem uma relação de ordem. Alguns elementos vêm antes e a conclusão vem depois.

Agora, vemos como uma ordem parcial transitiva e reflexividade pode nos dar uma caracterização bastante universal de consequência lógica.

Proposição 4.1: Se (E, \Vdash) é tal que $E \neq \emptyset$ e $\Vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ é reflexiva e transitiva, então (E, \Vdash) determina uma relação de consequência não-equipotente.

Demonstração: Precisamos da convenção $A \Vdash B \Leftrightarrow A \Vdash \{b\}$, para todo $b \in B$.

De $A \Vdash A$, temos (α) .

Agora, se $A \Vdash B$ e $B \Vdash \{b\}$, pela transitividade, segue que $A \Vdash \{b\}$ e, portanto, vale (γ) .

Da Proposição 2.3, temos que (α) e (γ) garantem (β) . ■

Portanto, temos mais um sistema de Tarski.

Considerações finais

Como já vimos, sempre podemos passar de uma relação de consequência não-equipotente para uma equipotente e vice-versa.

Assim, uma relação de ordem parcial como acima gera uma relação de consequência.

Algo que nos surpreende é que a relação de inclusão de conjuntos partilha das propriedades acima e, desse modo, naturalmente determina uma relação de consequência. Mas a consequência lógica parece exigir algo mais. Entendemos que seria relevante refinar estas noções.

Há alguns elementos teóricos que associam uma versão de consequência, motivada pelos cálculos de sequentes de Gentzen, como um tipo de relação equipotente, porém distinta da tratada neste ensaio. Para aquela versão, devemos

entender o antecedente como uma conjunção (todos os elementos são válidos), enquanto para o consequente tomamos uma disjunção (algum elemento é válido). Tentaremos abordar esta versão em uma análise futura.

Ainda precisamos de mais reflexões sobre estes detalhes.

Bibliografia

BEZIAU, J-Y. Universal logic. In: T. CHILDERS; O. MAJER (eds.). *Proceedings of the 8th International Colloquium - Logica'94*. Prague: Czech Academy of Sciences, 2004, p. 73-93.

_____. From consequence operator to universal logic: a survey of general abstract logic. In: BEZIAU, J-Y. (ed.) *Logica universalis*, p. 3-19, 2007.

DE SOUZA, E. G. Lindenbaumologia I: a teoria geral. *Cognitio: revista de filosofia*, n. 2, p. 213-219, 2001.

_____. Lindenbaumologia II: a teoria geral. In: *Cognitio: revista de filosofia*, n. 3, p. 115-121, 2002.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. A. Deductive systems and translations. In: BÉZIAU, J.-Y.; COSTA-LEITE, A. (eds.). *Perspectives on Universal Logic*. Italy: Polimetrica, 2007, p. 125-157.

DUNN, J. M.; HARDEGREE, G. M. *Algebraic methods in philosophical logic*. Oxford: Oxford University Press, 2001.

FEITOSA, H. A.; MOREIRA, A. P. R. SOARES, M. R. Operadores de consequência e relações de consequência. In: *Kínesis: revista de estudos dos pós-graduandos em filosofia*, 2016. (No prelo).

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; SILVESTRINI, L. H. C. Confrontando propriedades lógicas em um contexto de lógica universal. *Cognitio: revista de filosofia*, v. 15, n. 2, p. 333-347, 2014.

FONT, J. M.; JANSANA, R.; PIGOZZI, D. A survey of abstract algebraic logic. *Studia Logica*, v. 74, p. 13 - 97, 2003.

GENTZEN, G. Investigation into logical deduction. In: SZABO M. E. (ed.) *The collected papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969, p. 68-131.

JEŘÁBEK, E. The ubiquity of conservative translations. *The Review of Symbolic Logic*, v. 5, p. 666-678, 2012.

KRACHT, M. Modal consequence relations. In: van BENTHEM, J.; VENEMA, Y.; WOLTER F. (eds.). *Handbook of Modal Logic*. Elsevier, 2006, p. 497-549.

MARTIN, N. M.; POLLARD, S. *Closure spaces and logic*. Dordrecht: Kluwer, 1996.

SUNDHOLM, G. Systems of deduction. In GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (eds.). *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 1. Dordrecht: Reidel, 1983, p. 133-188.

TARSKI, A. *Logic, semantics, metamathematics*. 2ª ed. CORCORAN, J. (ed.). Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983.

WALLMANN, C. A shared framework for consequence operations and abstract model theory. *Logica Universalis*, v. 7, p. 125-145, 2013.

WÓJCICKI, R. *Theory of logical calculi*. Dordrecht: Kluwer, 1998.

Endereço/ Address

Hércules de Araújo Feitosa
Angela Pereira Rodrigues Moreira
Marcelo Reicher Soares
Faculdade de Ciências – Campus Bauru – UNESP
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01
CEP 17033-360 – Vargem Limpa
Bauru – SP – Brasil

Data de envio: 09-06-16

Data de aprovação: 12-08-16