http://dx.doi.org/10.23925/2316-5278.2017v18i1p111-124

Esboço de uma teoria da prova para a silogística

Draft of a proof theory for syllogistic

Frank Thomas Sautter
Universidade Federal de Santa Maria – UFSM – Brasil
ftsautter@ufsm.br

Resumo: Analisarei estruturas resultantes da utilização coordenada de múltiplos silogismos, e investigarei o problema de normalização de tais estruturas.

Palavras-chave: Polissilogismo. Sorites. Normalização.

Abstract: *I will analyze structures resulting from the coordinated use of multiple syllogisms, and I will look into the problem of normalization of these structures.*

Keywords: *Polysyllogism. Sorites. Normalization.*

Vede este sorites fatal, este sorites acaba com a existência do sistema representativo: O Poder Moderador pode chamar a quem quiser para organizar ministérios; esta pessoa faz a eleição, porque há de fazê-la; esta eleição faz a maioria. Eis aí o sistema representativo do nosso país.

José Tomás Nabuco de Araújo, 1868.

1 Motivação

Na Teoria do Silogismo é dado grande destaque às inferências mediatas (os modos válidos). Subsidiariamente, algum destaque é dado às inferências imediatas, visando o processo de redução de modos válidos imperfeitos aos modos válidos perfeitos. Praticamente nenhum destaque é dado às estruturas resultantes da utilização coordenada de múltiplos modos válidos. Isso contrasta com a prática argumentativa, na qual argumentos complexos são muito mais frequentes do que argumentos simples.

Na literatura filosófica a situação não é diferente. Uma rara e bem-sucedida exceção é o *Resumo da controvérsia reduzido a argumentos em forma*, de Leibniz (2013 [1760]), na qual ele apresenta sua defesa das perfeições divinas a despeito da existência do mal no mundo. Argumentos *em forma*, quer dizer, argumentos que não apenas podem ser apresentados sob a forma de uma estrutura coordenada de silogismos, mas efetivamente estão sob essa forma, são infrequentes. Contudo, antes do surgimento da lógica moderna, havia um certo consenso de que tal procedimento sempre poderia ser, em princípio, executado. Havia, por exemplo, um otimismo de que o exemplo mais contundente de sistematização de conhecimento – *Os Elementos*, de Euclides (2009 [*circa* 300 a.C.]) – poderia ser apresentado com argumentos em forma, embora ninguém nunca o tenha levado a cabo em sua inteireza.

Viso, aqui, investigar se e em que medida uma normalização de provas complexas da silogística, nos moldes da investigação inaugurada por Gentzen (1935a, 1935b), pode ser realizada. Restringir-me-ei à silogística categórica em que não são utilizados pressupostos existenciais e, tampouco, inferências imediatas.

Na Seção 2 apresentarei versões formais de estruturas tradicionais resultantes do uso coordenado de múltiplos silogismos; na Seção 3 apresentarei uma versão compacta dos modos válidos, em que modos são indistinguíveis por conversão simples de uma ou mais de uma de suas proposições categóricas, daí o qualificativo no título da seção "módulo conversão simples". Também na Seção 3 já ensaiarei um processo de normalização. Finalmente, a parte mais substantiva do processo de normalização se dará na Seção 4, na qual são propostas diversas relações de ordem entre as proposições categóricas e, com elas, são examinadas regras tradicionalmente vinculadas a estruturas a múltiplos silogismos e é proposta uma forma normal para as mesmas.

2 Definições gerais

As quatro primeiras definições são auxiliares para estabelecermos a importante distinção entre um polissilogismo em sentido amplo (Definição 5) e polissilogismo em sentido tradicional (Definição 6). Essas quatro primeiras definições poderiam ser, eventualmente, mais ricas, incorporando elementos e detalhando aqueles elementos que são utilizados, mas são suficientes para os propósitos do trabalho.

Definição 1. Seja C um conjunto de proposições categóricas utilizadas em uma dada estrutura a múltiplos silogismos válidos. ¶ ⊆ C^2 é a relação de dependência inferencial próxima se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita: p ¶ q se, e somente se, há um silogismo válido da estrutura a múltiplos silogismos válidos em que p é uma das premissas e q é conclusão.

Por exemplo, seja C o conjunto formado pelas seguintes proposições categóricas:[1] (1) Todos os beija-flores são pássaros saturados de cor; (2) Nenhum pássaro de grande porte é pássaro que vive de néctar; (3) Todos os pássaros saturados de cor são pássaros que vivem de néctar; (4) Todos os beija-flores são pássaros que vivem de néctar; (5) Nenhum beija-flor é pássaro de grande porte. Tem-se que ¶ = {<(1),(4)>, <(3),(4)>, <(4),(5)>, <(2),(5)>}.

Segue-se, da definição acima, que p desempenha o papel de premissa se, e somente se, existe q tal que p ¶ q, e p desempenha o papel de conclusão se, e somente se, existe q tal que q ¶ p.

Definição 2. Seja C um conjunto de proposições categóricas utilizadas em uma dada estrutura a múltiplos silogismos válidos e ¶ ⊆ C^2 sua relação de dependência

1 Exemplo adaptado de Carroll (1986, p.163). A propósito, a menor ave do mundo é o beija-flor abelha (*Mellisuga helenae*), que mede cerca de 5 cm, e o maior beija-flor do Brasil é o beija-flor-brilho-de-fogo (*Topaza pella*), que mede cerca de 20 cm.

inferencial próxima. A relação ¶¶ de dependência inferencial gerada por ¶ é dada pela seguinte definição recursiva:

a) Se p ¶ q então p ¶¶ q;

b) Se p ¶¶ q e q ¶¶ r então p ¶¶ r.

No exemplo anterior tem-se que $\P\P = \P \cup \{<(1),(5)>, <(3),(5)>\}$.

Definição 3. Seja C um conjunto de proposições categóricas utilizadas em uma dada estrutura a múltiplos silogismos válidos e $\P \subseteq C^2$ sua relação de dependência inferencial próxima. p é uma conclusão geral se, e somente se, p desempenha o papel de conclusão, mas p não desempenha o papel de premissa.

No exemplo anterior tem-se que (5) é a conclusão geral.

Definição 4. Seja C um conjunto de proposições categóricas utilizadas em uma dada estrutura a múltiplos silogismos válidos e $\P \subseteq C^2$ sua relação de dependência inferencial próxima. p é uma conclusão parcial se, e somente se, p desempenha o papel de premissa e p desempenha o papel de conclusão.

No exemplo anterior tem-se que (4) é a única conclusão parcial.

As duas próximas definições discriminam polissilogismos tradicionais, restritos a cadeias de silogismos, de polissilogismos gerais, em que ramificações são admitidas. A Figura 1(a) fornece um exemplo abstrato de polissilogismo tradicional e a Figura 1(b) fornece um exemplo abstrato de polissilogismo geral.

Definição 5. Seja C um conjunto de proposições categóricas utilizadas em uma dada estrutura a múltiplos silogismos válidos e $\P \subseteq C^2$ sua relação de dependência inferencial próxima. $< C, \P >$ é um polissilogismo em sentido amplo se, e somente se:

a) Toda proposição de C desempenha o papel de premissa e/ou desempenha o papel de conclusão;

b) Para cada conclusão, parcial ou total, há exatamente duas premissas;

c) Há uma única conclusão geral em C.

A noção de polissilogismo em sentido amplo *não é* a noção de polissilogismo empregada na Lógica Tradicional. No lugar dela temos a seguinte caracterização de polissilogismo, na qual as inferências estão linearmente ordenadas:

Definição 6. Seja C um conjunto de proposições categóricas utilizadas em uma dada estrutura a múltiplos silogismos válidos, $\P \subseteq C^2$ sua relação de dependência inferencial próxima e ¶¶ a relação de dependência inferencial gerada por ¶. $< C, \P >$ é um polissilogismo em sentido tradicional se, e somente se:

a) $< C, \P >$ é um polissilogismo em sentido amplo;

b) Para quaisquer conclusões distintas p e q, ou p ¶¶ q ou q ¶¶ p.

No exemplo anterior, as únicas conclusões são (4) e (5), e <(4),(5)> ∈¶¶. Portanto, o exemplo é um polissilogismo em sentido tradicional.

Na Lógica Tradicional as conclusões parciais de um polissilogismo em sentido tradicional costumam ser omitidas, gerando o que se conhece como "sorites"[2].

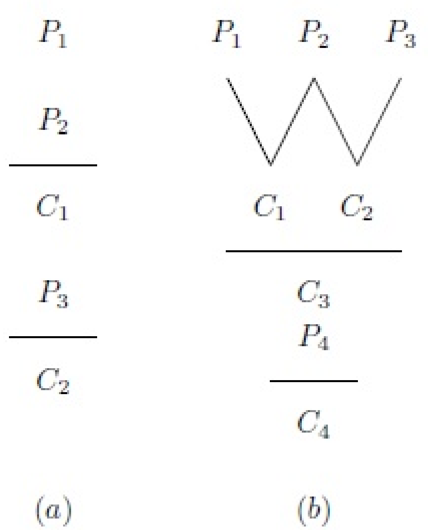

Figura 1. Tipos de polissilogismo.

Definição 7. Seja < C, ¶ > um polissilogismo em sentido tradicional e D o conjunto das conclusões parciais de < C, ¶ >. O sorites relativo a < C, ¶ > é o par < C – D, $¶_S$> em que $¶_S$ é tal que p $¶_S$ q se, e somente se:

a) p ¶¶ q e não existe r tal que r é uma conclusão parcial, p ¶¶ r, e r ¶¶ q;
b) p não é conclusão, total ou parcial;
c) q não é conclusão parcial.

No exemplo anterior, D = {(4)} e $¶_S$ = {<(1),(5)>, <(2),(5)>, <(3),(5)>}.

Há duas formas de apresentar um sorites: o Sorites Aristotélico e o Sorites Gloceniano. A distinção entre elas depende das seguintes definições:

Definição 8. O silogismo S_1 é um prossilogismo do silogismo S_2 se, e somente se, a conclusão de S_1 é uma das premissas de S_2.

2 "Sorites" também é uma noção empregada em outro sentido na literatura filosófica, a saber, para tratar problemas de vaguidade. Além disso, "Sorites" e "entimema" são noções associadas, na medida em que em um sorites as conclusões parciais são tácitas e em um entimema uma premissa é implícita.

Definição 9. O silogismo S_1 é um epissilogismo do silogismo S_2 se, e somente se, uma premissa de S_1 é a conclusão de S_2.

Segue-se, das definições acima, que se um dado silogismo é prossilogismo de outro, esse é epissilogismo daquele. A distinção é de ordem epistemológica, uma vez que a ênfase no prossilogismo ou no epissilogismo decorre da busca por razões ou da extração de consequências, respectivamente.

No exemplo anterior, o silogismo cujas premissas são (1) e (3) e cuja conclusão é (4) é prossilogismo do silogismo cujas premissas são (2) e (4) e cuja conclusão é (5), e este é epissilogismo daquele.

A Figura 2(a) apresenta um prossilogismo em forma abstrata e a Figura 2(b) apresenta um epissilogismo em forma abstrata.

$$
\begin{array}{c}
\text{Premissa Maior 2} \\
\text{Premissa Menor 2} \\
\hline
\text{Premissa Maior} \\
\text{Premissa Menor} \\
\hline
\text{Conclusão} \\
\\
\text{(a)}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\text{Premissa Maior} \\
\text{Premissa Menor} \\
\hline
\text{Conclusão} \\
\text{Premissa Menor 2} \\
\hline
\text{Conclusão 2} \\
\\
\text{(b)}
\end{array}
$$

Figura 2. Dado um silogismo – Premissa Maior; Premissa Menor; Conclusão – tem-se: (a) um prossilogismo – Premissa Maior 2; Premissa Menor 2; Premissa Maior; (b) um epissilogismo – Conclusão; Premissa Menor 2; Conclusão 2.

O Sorites Aristotélico ou progressivo é aquele que procede por prossilogismos, enquanto que o Sorites Gloceniano ou regressivo procede por epissilogismos.

Há, aqui, uma motivação adicional para o trabalho: na literatura sobre a Teoria do Silogismo são usualmente reconhecidos apenas dois tipos de sorites, precisamente os acima mencionados – Sorites Aristotélico e Sorites Gloceniano (JOSEPH, 2014, p. 173) – e alega-se que outros tantos sorites possíveis não são encontrados na prática argumentativa:

> Ainda que seja possível construir sorites válidos em cada uma das quatro figuras e combinar silogismos de diferentes figuras em um sorites, consideraremos apenas os dois tipos tradicionais, na Figura 1, os sorites aristotélicos e os sorites glocenianos, […]

> Estas duas são as únicas formas que provavelmente usemos de fato em nossos raciocínios. (JOSEPH, 2014, p. 173).

Mostrarei, no restante deste trabalho, que há uma razão adicional, de ordem técnica, para a restrição a somente estes dois tipos de sorites.

3 Inferências válidas módulo conversão simples

Nesta seção e na próxima seção, utilizarei extensivamente o fato de que, tendo em conta a equivalência lógica entre uma proposição categórica universal negativa e sua *conversio simplex* e entre uma proposição categórica particular afirmativa e sua *conversio simplex*, há apenas seis silogismos válidos que independem de pressupostos existenciais, a saber, BARBARA, CELARENT, DARII, FERIO, BAROCO e BOCARDO.[3]

Um polissilogismo em sentido amplo constituído somente por proposições categóricas universais afirmativas pode ser completamente linearizado, isto é, é equivalente a um polissilogismo em sentido tradicional. Considere a seguinte figura:

$$\begin{array}{cc} \text{Todo } S \text{ é } E_1 & \text{Todo } M \text{ é } D_1 \\ \text{Todo } E_1 \text{ é } E_2 & \text{Todo } D_1 \text{ é } D_2 \\ \ldots & \ldots \\ \text{Todo } E_m \text{ é } M & \text{Todo } D_n \text{ é } P \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{c} \text{Todo } S \text{ é } E_1 \\ \text{Todo } E_1 \text{ é } E_2 \\ \ldots \\ \text{Todo } E_m \text{ é } M \\ \text{Todo } M \text{ é } D_1 \\ \text{Todo } D_1 \text{ é } D_2 \\ \ldots \\ \text{Todo } D_n \text{ é } P \end{array}$$

(b)

Figura 3. Normalização de polissilogismo constituído somente por proposições categóricas universais afirmativas.

Na Figura 3(a) temos uma dedução ramificada de "Todo S é P": no ramo esquerdo deduzimos "Todo S é M" (conclusões parciais são omitidas) e no ramo direito deduzimos "Todo M é P" (novamente conclusões parciais são omitidas); e desses deduzimos "Todo S é P". O mesmo resultado com as mesmas proposições, mas um distinto conjunto de conclusões parciais pode ser obtido com a sequência da Figura 3(b). Se aplicarmos sistematicamente esse procedimento, começando com pares de ramos que não são, eles próprios, ramificados, obteremos uma completa

3 Uma justificativa mais detalhada desse "colapso" é fornecida em Sautter, 2010.

linearização de polissilogismos constituídos exclusivamente por proposições categóricas universais afirmativas. Esse procedimento é a normalização desse tipo de polissilogismo.

Um polissilogismo constituído somente por proposições categóricas universais afirmativas e negativas pode ser linearizado, à exceção de uma única ramificação. Primeiro, observemos que de duas proposições categóricas universais negativas nada se deduz. Isso implica que, em tais polissilogismos, somente uma única proposição categórica universal negativa poderá ser utilizada na dedução de uma conclusão geral. Considere a seguinte figura:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Todo } S \text{ é } E_1 & \text{Todo } M \text{ é } D_1 & \\
\text{Todo } E_1 \text{ é } E_2 & \text{Todo } D_1 \text{ é } D_2 & \\
\ldots & \ldots & \\
\text{Todo } E_m \text{ é } M & \text{Todo } D_n \text{ é } M' & \text{Nenhum } M' \text{ é } P
\end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{cc}
\text{Todo } S \text{ é } E_1 & \\
\text{Todo } E_1 \text{ é } E_2 & \\
\ldots & \\
\text{Todo } E_m \text{ é } M & \\
\text{Todo } M \text{ é } D_1 & \\
\text{Todo } D_1 \text{ é } D_2 & \\
\ldots & \\
\text{Todo } D_n \text{ é } M' & \text{Nenhum } M' \text{ é } P
\end{array}$$

(b)

Figura 4. Normalização de polissilogismos constituídos somente por proposições categóricas universais afirmativas e negativas.

Na Figura 4(a) temos uma dedução ramificada de “Nenhum S é P”: ou dos ramos à esquerda e central obtemos “Todo S é M’” e dessa com “Nenhum

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Todo } M \text{ é } C_1 & \text{Todo } M' \text{ é } D_1 \\
 & \text{Todo } C_1 \text{ é } C_2 & \text{Todo } D_1 \text{ é } D_2 \\
 & \ldots & \ldots \\
\text{Algum } S \text{ é } M & \text{Todo } C_n \text{ é } M' & \text{Todo } D_m \text{ é } P
\end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{cc}
 & \text{Todo } M \text{ é } C_1 \\
 & \text{Todo } C_1 \text{ é } C_2 \\
 & \ldots \\
 & \text{Todo } C_n \text{ é } M' \\
 & \text{Todo } M' \text{ é } D_1 \\
 & \text{Todo } D_1 \text{ é } D_2 \\
 & \ldots \\
\text{Algum } S \text{ é } M & \text{Todo } D_m \text{ é } P
\end{array}$$

(b)

Figura 5. Normalização de polissilogismos constituídos somente por proposições categóricas universais e particulares afirmativas.

Na Figura 5(a) temos uma dedução ramificada de “Algum S é P”: ou dos ramos central e à direita obtemos “Todo M é P’” e dessa com “Algum S é M” obtemos a conclusão geral, ou de “Algum S é M” e do ramo central obtemos “Algum S é M’” e dessa com “Todo M’ é P”, obtida no ramo esquerdo, obtemos a mesma conclusão geral. Tanto uma situação quanto a outra podem ser convenientemente normalizadas mediante a disposição representada na Figura 5(b).

De polissilogismos constituídos exclusivamente por proposições categóricas negativas nada se deduz.

Da proposição categórica particular afirmativa “Algum S é M” e da proposição categórica universal negativa “Nenhum M é P” deduz-se a proposição categórica particular negativa “Algum S não é P”, e é só, ou seja, nenhuma outra dedução, a menos de conversão simples, é válida entre esses tipos de proposição.

De polissilogismos constituídos exclusivamente por proposições categóricas particulares – ou duas particulares afirmativas, ou duas particulares negativas, ou uma particular afirmativa e uma particular negativa – nada se deduz.

4 Relações de ordem

Relações de ordem entre proposições categóricas podem ser úteis ao processo de justificação das normalizações adotadas na seção anterior.

Consideremos, inicialmente, a seguinte relação entre proposições universais afirmativas:

Definição 10. Todo S_1 é $P_1 \leq_A$ todo S_2 é P_2 se, e somente se, todo S_2 é S_1 e todo P_1 é P_2.

Intuitivamente, essa relação mede a amplitude relativa das relações de inclusão total estabelecidas pela verdade de proposições universais afirmativas (ver Figura 6).

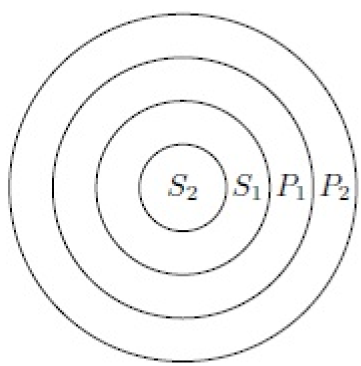

Figura 6. Todo S_1 é $P_1 \leq_A$ todo S_2 é P_2.

Proposição 1. $\leq_A$ é uma relação de ordem parcial não-estrita.

Demonstração:
Reflexividade: Todo S é P $\leq_A$ todo S é P, porque todo S é S e todo P é P.

Antissimetria: Suponha que todo S_1 é $P_1 \leq_A$ todo S_2 é P_2 e Todo S_2 é $P_2 \leq_A$ todo S_1 é P_1. Da primeira segue-se que todo S_2 é S_1 e todo P_1 é P_2. Da segunda segue-se que todo S_1 é S_2 e todo P_2 é P_1. Portanto, S_1 é coextensional a S_2, P_1 é coextensional a P_2 e todo S_1 é P_1 se, e somente se, todo S_2 é P_2.

Transitividade: Suponha que todo S_1 é $P_1 \leq_A$ todo S_2 é P_2 e todo S_2 é $P_2 \leq_A$ todo S_3 é P_3. Da primeira segue-se que todo S_2 é S_1 e todo P_1 é P_2. Da segunda segue-se que todo S_3 é S_2 e todo P_2 é P_3. Por duas aplicações de BARBARA temos que todo S_3 é S_1 e todo P_1 é P_3, ou seja, todo S_1 é $P_1 \leq_A$ todo S_3 é P_3.

Além disso, temos o seguinte resultado:

Proposição 2. Dado um silogismo BARBARA com premissa maior “Todo M é P” e premissa menor “Todo S é M”, todo M é P $\leq_A$ todo S é P e todo S é M $\leq_A$ todo S é P.

Demonstração: Todo S é M e todo P é P, logo todo M é P $\leq_A$ todo S é P. Todo M é P e todo S é S, logo todo S é M $\leq_A$ todo S é P.

Aplicando a Proposição 2 à Figura 3(b) segue-se que a conclusão geral (omitida) “Todo S é P” é um elemento máximo do conjunto formado pelas proposições categóricas universais afirmativas ali presentes, estejam essas explicitadas (não conclusões) ou não (conclusões parciais e geral).

Consideremos, agora, a vinculação da relação de ordem acima proposta a proposições universais em geral, afirmativas e negativas:

Proposição 3. Dado um silogismo CELARENT com premissa maior “Nenhum M é P” e premissa menor “Todo S é M”, se todo X é Y $\leq_A$ todo S é M, segue-se que o entimema cujas premissas são “Nenhum M é P” e “Todo X é Y” e cuja conclusão é “Nenhum S é P” é válido.

Demonstração: Segue-se, de todo X é Y $\leq_A$ todo S é M, que todo S é X e todo Y é M. De nenhum M é P e todo Y é M segue-se, por CELARENT, que nenhum Y é P. Dessa e de todo X é Y segue-se, por CELARENT, que nenhum X é P. Dessa e de todo S é X segue-se, por CELARENT, que nenhum S é P.

Aplicando a Proposição 3 em associação com a Proposição 2 à Figura 4(b), segue-se que é desnecessário utilizar qualquer outra proposição categórica universal afirmativa ali presente, distinta de “Todo S é M’”, para, em conjunto com “Nenhum M’ é P”, obter que nenhum S é P.

Consideremos, além disso, a vinculação da relação de ordem acima proposta a proposições afirmativas em geral, universais ou particulares:

Proposição 4. Dado um silogismo DARII com premissa maior “Todo M é P” e premissa menor “Algum S é M”, se todo X é Y $\leq_A$ todo M é P, segue-se que o entimema cujas premissas são “Todo X é Y” e “Algum S é M” e cuja conclusão é “Algum S é P” é válido.

Demonstração: Segue-se, de todo X é Y $\leq_A$ todo M é P, que todo M é X e todo Y é P. De algum S é M e todo M é X segue-se, por DARII, que algum S é X. Dessa e de todo X é Y segue-se, por DARII, que algum S é Y. Dessa e de todo Y é P segue-se, por DARII, que algum S é P.

Aplicando a Proposição 4 em associação com a Proposição 2 à Figura 5(b) segue-se que é desnecessário utilizar qualquer outra proposição categórica universal afirmativa ali presente, distinta de "Todo M é P', para, em conjunto com "Algum S é M" obter que algum S é P.

A vinculação da relação de ordem acima proposta à combinação de uma proposição universal afirmativa com uma proposição particular negativa se dá mediante os seguintes resultados:

Proposição 5. Dado um silogismo BAROCO com premissa maior "Todo P é M" e premissa menor "Algum S não é M", se todo X é Y $\leq_A$ todo P é M, segue-se que o entimema cujas premissas são "Todo X é Y" e "Algum S não é M" e cuja conclusão é "Algum S não é P" é válido.

Demonstração: Segue-se, de todo X é Y $\leq_A$ todo P é M, que todo P é X e todo Y é M. De todo Y é M e algum S não é M segue-se, por BAROCO, que algum S não é Y. Dessa e de todo X é Y segue-se, por BAROCO, que algum S não é X. Dessa e de todo P é X segue-se, por BAROCO, que algum S não é P.

Proposição 6. Dado um silogismo BOCARDO com premissa maior "Algum M não é P" e premissa menor "Todo M é S", se todo X é Y $\leq_A$ todo M é S, segue-se que o entimema cujas premissas são "Algum M não é P" e "Todo X é Y" e cuja conclusão é "Algum S não é P" é válido.

Demonstração: Segue-se, de todo X é Y $\leq_A$ todo M é S, que todo M é X e todo Y é S. De algum M não é P e todo M é X segue-se, por BAROCO, que algum X não é P. Dessa e de todo X é Y segue-se, por BAROCO, que algum Y não é P. Dessa e de todo Y é S segue-se, por BAROCO, que algum S não é P.

Consideremos, agora, uma nova relação, uma relação entre proposições categóricas universais negativas:

Definição 11. Nenhum S_1 é P_1 $\leq_E$ nenhum S_2 é P_2 se, e somente se, todo S_2 é S_1 e todo P_2 é P_1.

Intuitivamente, essa relação mede o afastamento relativo das relações de exclusão total estabelecidas pela verdade de proposições universais negativas (ver Figura 7).

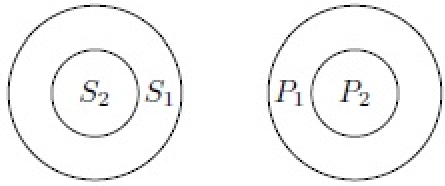

Figura 7. Nenhum S_1 é $P_1 \leq_E$ nenhum S_2 é P_2.

Proposição 7. $\leq_E$ é uma relação de ordem parcial não-estrita.

Demonstração:
Reflexividade: Nenhum S é P $\leq_E$ nenhum S é P, porque todo S é S e todo P é P.

Antissimetria: Suponha que nenhum S_1 é $P_1 \leq_E$ nenhum S_2 é P_2 e nenhum S_2 é $P_2 \leq_E$ nenhum S_1 é P_1. Da primeira segue-se que todo S_2 é S_1 e todo P_2 é P_1. Da segunda segue-se que todo S_1 é S_2 e todo P_1 é P_2. Portanto, S_1 é coextensional a S_2, P_1 é coextensional a P_2 e nenhum S_1 é P_1 se, e somente se, nenhum S_2 é P_2.

Transitividade: Suponha que nenhum S_1 é $P_1 \leq_E$ nenhum S_2 é P_2 e nenhum S_2 é $P_2 \leq_E$ nenhum S_3 é P_3. Da primeira segue-se que todo S_2 é S_1 e todo P_2 é P_1. Da segunda segue-se que todo S_3 é S_2 e todo P_3 é P_2. Por duas aplicações de BARBARA temos que todo S_3 é S_1 e todo P_3 é P_1, ou seja, nenhum S_1 é $P_1 \leq_E$ nenhum S_3 é P_3.

Podemos, além disso, demonstrar os seguintes resultados a respeito dessa nova relação de ordem:

Proposição 8. Dado um silogismo CELARENT com premissa maior "Nenhum M é P" e premissa menor "Todo S é M", nenhum M é P $\leq_E$ nenhum S é P.

Demonstração: Todo S é M e todo P é P, logo nenhum M é P $\leq_E$ nenhum S é P.

Proposição 9. Dados os silogismos CELARENT com premissas maior e menor "Nenhum M é P" e "Todo S é M" e com premissa maior e menor "Nenhum S é P" e "Todo S_D é S", segue-se que nenhum S é P $\leq_E$ nenhum S_D é P e todo S é M $\leq_A$ todo S_D é S.

Demonstração: De todo S_D é S e todo P é P segue-se que nenhum S é P $\leq_E$ nenhum S_D é P. De todo S_D é S e todo S é M segue-se que todo S é M $\leq_A$ todo S_D é S.

Finalmente, consideremos uma terceira relação, dessa vez os *relata* são proposições categóricas particulares afirmativas:

Definição 12. Algum S_1 é $P_1 \leq_I$ algum S_2 é P_2 se, e somente se, todo S_1 é S_2 e todo P_1 é P_2.

Intuitivamente, essa relação mede a amplitude relativa das relações de inclusão parcial estabelecidas pela verdade de proposições particulares afirmativas (ver Figura 8).

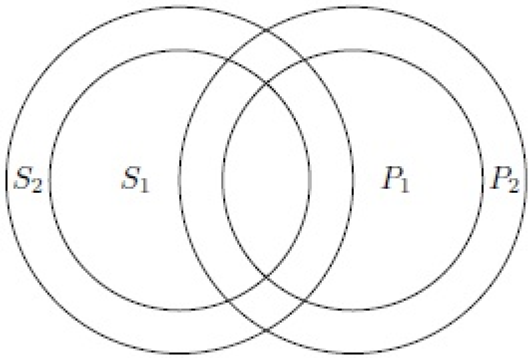

Figura 8. Algum S_1 é $P_1 \leq_I$ algum S_2 é P_2.

Temos os seguintes resultados acerca dessa terceira relação:

Proposição 10. $\leq_I$ é uma relação de ordem parcial não-estrita.

Demonstração:
Reflexividade: Algum S é P $\leq_I$ algum S é P, porque todo S é S e todo P é P.

Antissimetria: Suponha que algum S_1 é $P_1 \leq_I$ algum S_2 é P_2 e algum S_2 é $P_2 \leq_I$ algum S_1 é P_1. Da primeira segue-se que todo S_1 é S_2 e todo P_1 é P_2. Da segunda segue-se que todo S_2 é S_1 e todo P_2 é P_1. Portanto, S_1 é coextensional a S_2, P_1 é coextensional a P_2 e algum S_1 é P_1 se, e somente se, algum S_2 é P_2.

Transitividade: Suponha que algum S_1 é $P_1 \leq_I$ algum S_2 é P_2 e algum S_2 é $P_2 \leq_I$ algum S_3 é P_3. Da primeira segue-se que todo S_1 é S_2 e todo P_1 é P_2. Da segunda segue-se que todo S_2 é S_3 e todo P_2 é P_3. Por duas aplicações de BARBARA temos que todo S_1 é S_3 e todo P_1 é P_3, ou seja, algum S_1 é $P_1 \leq_{II}$ algum S_3 é P_3.

Proposição 11. Dado um silogismo DARII com premissa maior "Todo M é P" e premissa menor "Algum S é M", algum S é M $\leq_I$ algum S é P.

Demonstração: Todo S é S e todo M é P, logo algum S é M $\leq_I$ algum S é P.

Proposição 12. Dados os silogismos DARII com premissas maior e menor "Todo M é P" e "Algum S é M" e com premissas maior e menor "Todo P é P_D" e "Algum S é P", segue-se que algum S é P $\leq_I$ algum S é P_D.

Demonstração: De todo S é S e todo P é P_D segue-se que algum S é P $\leq_I$ algum S é P_D.

5 Considerações finais

Neste trabalho esbocei um tratamento técnico a um setor pouco explorado, embora importante de um ponto de vista prático, da silogística, a saber, os polissilogismos. Utilizando o mínimo de recursos, apresentei caracterizações precisas de noções clássicas associadas a polissilogismos. A seguir, considerei casos de normalização, ou seja, casos de apresentação canônica de polissilogismos, em que apenas o essencial é mantido. Na última seção apresentei relações de ordem entre proposições categóricas e mostrei, nalgumas situações, como elas podem ser úteis na justificação das normalizações propostas na penúltima seção. Na última seção apenas ensaiei uma justificação completa, mas o suficiente para estabelecer os méritos da proposta. Em trabalhos futuros o objetivo é desenvolver melhor essas relações de ordem e sua participação na justificação de normalizações. Também pretendo incorporar à investigação proposições com termos singulares e modos válidos que dependem de pressupostos existenciais.

Referências bibliográficas

CARROLL, L. *Symbolic logic*. Editado, com anotações e uma introdução, por William Warren Bartley III. New York: Clarkson N. Potter, 1986.

EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

GENTZEN, G. Untersuchungen über das logische Schliessen. I. *Mathematische Zeitschrift*, v. 39, 1935a, p. 176-210.

______. Untersuchungen über das logische Schliessen. II. *Mathematische Zeitschrift*, v. 39, 1935b, p. 405-431.

JOSEPH, Irmã M. *O trivium: as artes liberais da lógica, da gramática e da retórica*. São Paulo: É Realizações, 2014.

LEIBNIZ, G. W. Resumo da controvérsia reduzido a argumentos em forma. In: ______. *Ensaios de Teodiceia:* sobre a bondade de Deus, a liberdade do homem e a origem do mal. Tradução, introdução e notas de William de Siqueira Piauí e Juliana Cecci Silva. São Paulo: Estação Liberdade, 2013. p. 409-432.

SAUTTER, F. T. A essência do silogismo: uma abordagem visual. *Cognitio: revista de filosofia*. v. 11, n. 2, p. 316-332, 2010.

Endereço/ Address

Frank Thomas Sautter
Universidade Federal de Santa Maria
Departamento de Filosofia
Avenida Roraima, 1000, Cidade Universitária
97105-900
Santa Maria, RS – Brasil

Data de recebimento: 28-05-17
Data de aprovação: 12-06-17