

# Pares de Galois e espaços de Tarski<sup>1</sup>

## *Galois pairs and Tarski spaces*

**Hércules de Araujo Feitosa**

UNESP – FC – Bauru – Brasil  
haf@fc.unesp.br

**Cristiane Alexandra Lázaro**

UNESP – FC – Bauru – Brasil  
cristiane@fc.unesp.br

**Mauri Cunha do Nascimento**

UNESP – FC – Bauru – Brasil  
mauri@fc.unesp.br

**Resumo:** Apresentamos conceitos algébricos básicos e fundamentais como conjuntos ordenados, reticulados, álgebra de Boole e as TK-álgebras. Destacamos os espaços de Tarski, associados ao conceito de sistema dedutivo (de Tarski) e sua apresentação quase topológica. Então, apresentamos a Lógica da Dedutibilidade, vinda da formalização lógica dos espaços de Tarski. A seguir, trazemos os pares de funções de Galois, que surgem em muitos tópicos da Matemática. Como resultado original, além de alguns desenvolvimentos teóricos, destacamos uma conexão de Galois com os espaços de Tarski.

**Palavras-chave:** Conexões de Galois. Espaços de Tarski. Operador de consequência. Pares de Galois.

**Abstract:** *We present basic and key algebraic concepts such as ordered sets, lattice, Boolean algebra, and TK-algebras. We point out the Tarski spaces, associated with the concept of deductive (Tarski) system and its almost topological presentation. Then we present the Logic of Deductibility, coming from the logical formalization of Tarski spaces. Next, we bring the Galois pairs of functions, which arise on many topics in Mathematics. As an original result, in addition to some theoretical developments, we point out a connection of Galois with Tarski spaces.*

**Keywords:** *Consequence Operator. Galois Connections. Galois Pairs. Tarski Spaces.*

---

1 Agradecemos apoio da FAPESP e do CNPq.

## 1 Introdução

Iniciamos este trabalho com alguns conceitos algébricos básicos e fundamentais para o suporte dos resultados essenciais. Tratamos dos conjuntos ordenados, reticulados, álgebra de Boole a as TK-álgebras. Apesar de virem do ambiente matemático, estes conceitos ajudam a explicar noções essenciais da Lógica. O conceito de dedução vincula um conjunto de premissas, dados conhecidos, com uma conclusão, um dado inferido. Há naturalmente uma relação de ordem ou precedência, das premissas primeiro e da conclusão a posterior. Esta relação de ordem aparece essencialmente nestes conceitos tratados.

Então, apresentamos os espaços de Tarski, associados ao conceito de sistema dedutivo (de Tarski) e algum desenvolvimento teórico destes espaços. Veremos que todo espaço topológico é um espaço de Tarski, mas não vale a recíproca. Enquanto os espaços topológicos procuram destacar aspectos de espaço e vizinhanças, os espaços de Tarski caracterizam a noção de consequência lógica. Assim, temos uma proposta de fundação da noção de consequência dedutiva ou dedução. Entre outros aspectos relevantes, está que outras noções de inferência, como as indutiva e abdutiva, poderiam em algum momento serem cotejadas com esta apresentação da dedução.

A seguir, apresentamos a Lógica da Dedutibilidade, que surge como uma formalização lógica dos espaços de Tarski. Modelos algébricos desta Lógica são as TK-álgebras, que trazem para o contexto algébrico as noções dos operadores de Tarski.

Pares de funções de Galois surgem em muitos tópicos da Matemática. Apresentamos uma definição bastante usual de conexões de Galois, definida sobre estruturas de ordem e importantes resultados que envolvem estas conexões, para destacarmos os resultados sobre os pares de Galois. Mais uma vez, o conceito de ordem se faz presente e, como mencionado, estes pares de Galois têm enorme comparecimento.

Conexões de Galois caracterizam apenas um tipo de par de funções de Galois. Na seção seguinte, apresentamos variações de pares de Galois e destacamos, apenas, em acordo com a seção anterior, quais propriedades partilham cada um destes pares.

Como resultado original, destacamos uma conexão de Galois sobre os espaços de Tarski. O tratamento para as composições de pares de Galois da Tabela 2 também são obtidos neste trabalho.

## 2 Noções algébricas básicas

Nesta seção apresentamos algumas noções básicas sobre reticulados, que serão importantes para fundar os resultados das outras seções. São boas referências sobre estas noções (DUNN, 2001) e (MIRAGLIA, 1987).

Iniciamos com o conceito de ordem sobre um conjunto.

**Definição 2.1:** Uma relação binária  $\leq$  sobre um conjunto  $A$  é uma ordem parcial se a relação  $\leq$  é:

- (i) reflexiva: para todo  $x \in A$ , tem-se  $x \leq x$ .
- (ii) antissimétrica: para todos  $x, y \in A$ , se  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , então  $x = y$ .
- (iii) transitiva: para todos  $x, y, z \in A$ , se  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , então  $x \leq z$ .

**Definição 2.2:** Um conjunto parcialmente ordenado (poset) é um par  $\langle A, \leq \rangle$  em que  $A$  é um conjunto não vazio e  $\leq$  é uma ordem parcial sobre  $A$ .

**Definição 2.3:** Sejam  $\langle A, \leq \rangle$  um poset e  $x, y \in A$ . O supremo do par  $\{x, y\}$ , caso exista, é o elemento  $z \in A$  tal que:

- (i)  $x \leq z$  e  $y \leq z$ .
- (ii)  $x \leq w$  e  $y \leq w \Rightarrow z \leq w$ .

**Definição 2.4:** Sejam  $\langle A, \leq \rangle$  um poset e  $x, y \in A$ . O ínfimo do par  $\{x, y\}$ , caso exista, é o elemento  $z \in A$  tal que:

- (i)  $z \leq x$  e  $z \leq y$ .
- (ii)  $w \leq x$  e  $w \leq y \Rightarrow w \leq z$ .

Usualmente, denotamos o supremo de  $\{x, y\}$  por  $\sup\{x, y\}$  ou  $x \vee y$  e o ínfimo de  $\{x, y\}$  por  $\inf\{x, y\}$  ou  $x \wedge y$ . O supremo de  $\{x, y\}$  é o menor limitante superior de  $\{x, y\}$  e o ínfimo de  $\{x, y\}$  é o maior limitante inferior de  $\{x, y\}$ .

**Definição 2.5:** Se  $\langle R, \leq \rangle$  é um poset para o qual dados quaisquer  $x, y \in R$  existe o  $\inf\{x, y\}$  e o  $\sup\{x, y\}$ , então denominamos de reticulado à estrutura algébrica determinada por  $\langle R, \wedge, \vee \rangle$  em que:

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \text{ e } x \vee y = \sup\{x, y\}.$$

**Proposição 2.6:** Se  $\langle R, \leq \rangle$  é um reticulado, então para todos  $x, y, z \in R$  valem as seguintes leis:

$$\begin{array}{ll} R_1 & x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z \quad \text{e} \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \text{ [associatividade]} \\ R_2 & x \wedge y = y \wedge x \quad \text{e} \quad x \vee y = y \vee x \text{ [comutatividade]} \\ R_3 & (x \wedge y) \vee y = y \quad \text{e} \quad (x \vee y) \wedge y = y \text{ [absorção]}. \end{array}$$

Definimos reticulado como uma estrutura de ordem parcial em que duas operações de junção e disjunção estão definidas para todos os elementos do reticulado, o que naturalmente gera uma estrutura algébrica particular. Contudo, podemos definir, de modo equivalente, o conceito de reticulado como uma estrutura algébrica.

**Definição 2.7:** Um reticulado é uma estrutura algébrica  $\mathcal{R} = \langle R, \wedge, \vee \rangle$ , em que  $R$  é um conjunto não vazio e  $\wedge$  e  $\vee$  são operações binárias sobre  $R$  tais que para todos  $a, b, c \in R$ :

$$\begin{array}{ll} R_1 & a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c \quad \text{e} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c \\ R_2 & a \wedge b = b \wedge a \quad \text{e} \quad a \vee b = b \vee a \\ R_3 & (a \wedge b) \vee b = b \quad \text{e} \quad (a \vee b) \wedge b = b. \end{array}$$

**Proposição 2.8:** Se  $\mathcal{R} = \langle R, \lambda, \gamma \rangle$  é um reticulado e  $a, b \in R$ , então valem:

$$R_4 \quad a\lambda a = a \quad \text{e} \quad a\gamma a = a \text{ [idempotência]}$$

$$R_5 \quad a\lambda b = a \Leftrightarrow a\gamma b = b \text{ [ordem].}$$

A condição  $R_5$  nos dá a ordem parcial fundamental para qualquer reticulado  $\mathcal{R} = \langle R, \lambda, \gamma \rangle$ .

**Definição 2.9:**  $a \leq b \Leftrightarrow a\lambda b = a \Leftrightarrow a\gamma b = b$ .

**Proposição 2.10:** Se  $\mathcal{R} = \langle R, \lambda, \gamma \rangle$  é um reticulado e  $a, b, c, d \in R$ , então:

$$R_6 \quad a \leq a\gamma b \quad \text{e} \quad b \leq a\gamma b$$

$$R_7 \quad a\lambda b \leq a \quad \text{e} \quad a\lambda b \leq b$$

$$R_8 \quad a \leq c \text{ e } b \leq c \Rightarrow a\gamma b \leq c$$

$$R_9 \quad c \leq a \text{ e } c \leq b \Rightarrow c \leq a\lambda b$$

$$R_{10} \quad a \leq c \text{ e } b \leq d \Rightarrow a\gamma b \leq c\gamma d$$

$$R_{11} \quad a \leq c \text{ e } b \leq d \Rightarrow a\lambda b \leq c\lambda d.$$

**Lema 2.11:** Se  $\mathcal{R} = \langle R, \leq, \lambda, \gamma \rangle$  é um reticulado, então:

$$R_{12} \quad (a\lambda b) \gamma (a\lambda c) \leq a \lambda (b\gamma c)$$

$$R_{13} \quad a \gamma (b\lambda c) \leq (a\gamma b) \lambda (a\gamma c).$$

*Demonstração:* Estes resultados seguem de  $R_6$ ,  $R_7$  e  $R_8$ . ■

**Definição 2.12:** Um reticulado  $\mathcal{R} = \langle R, \leq, \lambda, \gamma \rangle$  é distributivo quando valem as seguintes leis distributivas para todos  $a, b, c \in R$ :

$$R_{14} \quad (a\lambda b) \gamma c = (a\gamma c) \lambda (b\gamma c) \quad \text{e} \quad (a\gamma b) \lambda c = (a\lambda c) \gamma (b\lambda c).$$

Estas são as leis distributivas à direita. Devido às propriedades comutativas, também valem as distributivas à esquerda. Mais do que isto, basta uma das duas leis distributivas acima, pois a outra pode ser demonstrada a partir daquela assumida (MIRAGLIA, 1987).

**Definição 2.13:** Seja  $\mathcal{R} = \langle R, \leq, \lambda, \gamma \rangle$  um reticulado. Se  $R$  tem um elemento mínimo dado pela ordem  $\leq$ , então este elemento é o zero de  $\mathcal{R}$  e é denotado por  $0$ . Se o reticulado  $\mathcal{R}$  tem o maior elemento segundo a ordem  $\leq$ , então este elemento é o um de  $\mathcal{R}$  e é denotado por  $1$ .

Se o reticulado  $\mathcal{R}$  tem os elementos  $0$  e  $1$ , então para todo  $a \in R$  valem:

$$R_{15} \quad a\lambda 0 = 0 \quad \text{e} \quad a\gamma 0 = a$$

$$R_{16} \quad a\lambda 1 = a \quad \text{e} \quad a\gamma 1 = 1.$$

Denotamos um reticulado com 0 e 1 por  $\mathcal{R} = \langle R, \leq, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ .

**Definição 2.14:** Seja  $\mathcal{R} = \langle R, \leq, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  um reticulado com 0 e 1. Para cada  $a \in R$ , se existe o elemento  $-a = \max\{y \in R: a \wedge y = 0\}$  em  $\mathcal{R}$ , dizemos que  $-a$  é o pseudo-complement de  $a$ .

**Definição 2.15:** Um reticulado  $\mathcal{R} = \langle R, \leq, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  é pseudo-complementado se para todo  $a \in R$  existe um pseudo-complemento  $-a \in R$ .

**Definição 2.16:** Seja  $\mathcal{R} = \langle R, \leq, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  um reticulado com 0 e 1. Se  $a \in R$ , então um elemento  $a' \in R$  é um complemento de  $a$  em  $\mathcal{R}$  se:

$$R_{17} \quad a \wedge a' = 0 \text{ e}$$

$$R_{18} \quad a \vee a' = 1.$$

Cada complemento  $a'$  é um pseudo-complemento. Mas, por exemplo, o pseudo-complemento da Lógica Intuicionista não é um complemento (MIRAGLIA, 1987).

**Definição 2.17:** O reticulado  $\mathcal{R} = \langle R, \leq, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  é complementado se todo elemento de  $R$  tem um complemento em  $R$ . Se cada elemento de  $R$  tem exatamente um complemento, então o reticulado  $\mathcal{R}$  é unicamente complementado.

Se o complemento de  $a$  é único, então denotaremos o seu complemento por  $\sim a$ . Neste caso, indicamos o reticulado por  $\mathcal{R} = \langle R, \leq, \sim, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ .

**Lema 2.18:** Seja  $\mathcal{R} = \langle R, \leq, \sim, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  um reticulado distributivo com 0 e 1. Se existe um complemento de  $a$ , então ele é único.

*Demonstração:* Sejam  $y$  e  $z$  dois complementos do elemento  $a$ . Assim,  $a \wedge y = 0$ ,  $a \vee y = 1$ ,  $a \wedge z = 0$  e  $a \vee z = 1$ . Como  $z = 0 \vee z = (a \wedge y) \vee z = (a \vee z) \wedge (y \vee z) = 1 \wedge (y \vee z) = y \vee z$ , então  $y \leq z$ . Analogamente,  $z \leq y$ . Portanto,  $z = y$ . ■

**Definição 2.19:** Álgebra de Boole  $\mathcal{B}$  é todo reticulado distributivo e complementado.

### 3 Espaços de Tarski

Os espaços de Tarski surgem da busca por uma caracterização bastante geral do que um sistema formal deveria contemplar para ser considerado como uma lógica. Ver (FEITOSA, GRÁCIO e NASCIMENTO, 2010) e (FEITOSA e NASCIMENTO, 2015).

**Definição 3.1:** Operador de consequência sobre  $E$  é uma função  $\bar{\cdot} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  tal que, para todos  $A, B \in E$  temos:

$$(i) \quad A \subseteq \bar{A}$$

$$(ii) \quad A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$$

$$(iii) \quad \bar{\bar{A}} \subseteq \bar{A}.$$

Segue, de (i) e (iii), que vale a igualdade  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ , para todo  $A \subseteq E$ .

**Definição 3.2:** Espaço de Tarski (sistema dedutivo de Tarski ou espaço de fecho)  $(E, \overline{\phantom{x}})$  é um par de modo que  $E$  é um conjunto e  $\overline{\phantom{x}}$  é um operador de consequência sobre  $E$ .

**Definição 3.3:** Se  $(E, \overline{\phantom{x}})$  é um espaço de Tarski, então o conjunto  $A$  é fechado em  $(E, \overline{\phantom{x}})$  se  $\overline{A} = A$ , e  $A$  é aberto quando o seu complemento relativo a  $E$ , denotado por  $A^c$ , é fechado em  $(E, \overline{\phantom{x}})$ .

**Proposição 3.4:** Em cada espaço de Tarski, toda intersecção de conjuntos fechados é ainda um conjunto fechado.

Segue das definições acima que  $\overline{\overline{\emptyset}}$  e  $E$  correspondem ao menor e ao maior conjuntos fechados, respectivamente, associados ao operador  $\overline{\phantom{x}}$ .

Espaços quase topológicos são generalizações das estruturas topológicas dadas pela eliminação de algumas propriedades.

**Definição 3.5:** Espaço quase topológico é um par  $(E, \Omega)$  em que  $E$  é um conjunto,  $\Omega \subseteq \mathcal{P}(E)$  e dada uma coleção qualquer de índices  $I$ :

(i) se para cada  $i \in I, A_i \in \Omega$ , então  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Omega$ .

**Definição 3.6:** A coleção  $\Omega$  é denominada quase topologia e cada membro de  $\Omega$  é um aberto do espaço  $(E, \Omega)$ . Um conjunto  $A \subseteq E$  é fechado quando o seu complemento relativo a  $E$ , denotado por  $A^c$ , é aberto em  $(E, \Omega)$ .

Segue destas definições que uma união qualquer de abertos de  $(E, \Omega)$  é um aberto de  $(E, \Omega)$ .

**Proposição 3.7:** Em todo espaço quase topológico  $(E, \Omega)$  o conjunto  $\emptyset$  é aberto e  $E$  é fechado.

**Proposição 3.8:** Em todo espaço quase topológico  $(E, \Omega)$ , qualquer intersecção de fechados é ainda um fechado.

**Definição 3.9:** Se  $(E, \Omega)$  é um espaço quase topológico, então o fecho de  $A$  é o conjunto:

$\overline{A} = \bigcap \{X \subseteq E : A \subseteq X \text{ e } X^c \in \Omega\}$  e o interior de  $A$  é o conjunto:

$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{X \subseteq E : X \subseteq A \text{ e } X \in \Omega\}$ .

**Proposição 3.10:** Se  $(E, \Omega)$  é um espaço quase topológico e  $A \subseteq E$ , então  $\bar{A}$  é fechado e  $\check{A}$  é aberto.

Naturalmente, poderíamos definir espaço quase topológico a partir dos fechados, como no contexto topológico.

**Proposição 3.11:** Seja  $(E, \Omega)$  um espaço quase topológico. Para todos  $A, B \subseteq E$ , valem:

- (i)  $\check{\check{A}} \subseteq A \subseteq \bar{\bar{A}}$
- (ii)  $\check{\check{A}} = \check{A}$
- (iii)  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
- (iv)  $A \subseteq B \Rightarrow \check{A} \subseteq \check{B}$
- (v)  $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$ .

Também poderíamos definir o espaço quase topológico a partir da operação de interior e dela definirmos o fecho de Tarski.

**Definição 3.12:** Operador de interior sobre  $E$  é uma função  $\check{\cdot} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  tal que, para todos  $A, B \subseteq E$ , valem:

- (i)  $\check{A} \not\subseteq A$
- (ii)  $A \subseteq B \Rightarrow \check{A} \subseteq \check{B}$
- (iii)  $\check{\check{A}} \subseteq \check{A}$

Agora, mostramos a relação entre espaços de Tarski e espaços quase topológicos.

**Proposição 3.13:** Se  $(E, \Omega)$  é um espaço quase topológico e  $\bar{\cdot}$  é a operação de fecho em  $(E, \Omega)$ , então o par  $(E, \bar{\cdot})$  é um espaço de Tarski.

Por outro lado, se  $(E, \bar{\cdot})$  é um espaço de Tarski, ao considerarmos  $\Psi = \{X \subseteq E : X = \bar{X}\}$ , o conjunto dos fechados de  $(E, \bar{\cdot})$ , então segue a proposição seguinte.

**Proposição 3.14:** Se  $(E, \bar{\cdot})$  é um espaço de Tarski, então  $(E, \Omega)$  é um espaço quase topológico em que  $X \in \Omega \Leftrightarrow X^C \in \Psi$ .

Segue das duas proposições anteriores que, para cada espaço de Tarski, podemos definir, de modo natural, um espaço quase topológico e, para cada espaço quase topológico, podemos definir um espaço de Tarski.

**Definição 3.15:** Um espaço quase topológico  $(E, \Omega)$  é 0-fechado quando:

$$(iv) \overline{\emptyset} = \emptyset$$

**Definição 3.16:** Um espaço topológico  $(E, \Omega)$  é um espaço quase topológico 0-fechado tal que:

$$(v) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

**Definição 3.17:** Um espaço de Tarski  $(E, \neg)$  é vácuo quando  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .

Deste modo, os espaços topológicos são exemplos de espaços quase topológicos 0-fechados. Como o conceito de consequência interessa à Lógica e naquele contexto são relevantes os conjuntos de consequências, os quais não devem ser, em geral, vazios, do ponto de vista lógico interessam os espaços de Tarski não vácuos.

## 4 As TK-álgebras e a lógica TK

Nesta seção apresentamos as TK-álgebras e a lógica proposicional **TK**. Detalhes sobre os dois sistemas podem ser encontrados em (FEITOSA, GRÁCIO e NASCIMENTO, 2010).

A definição de TK-álgebra introduz as noções de operador de consequência no ambiente algébrico e a lógica **TK** dá a formalização no contexto lógico.

**Definição 4.1:** Uma TK-álgebra é uma sêxtupla  $\mathcal{A} = \langle A, 0, 1, \vee, \sim, \bullet \rangle$  de modo que  $\langle A, 0, 1, \vee, \sim \rangle$  é uma álgebra de Boole e  $\bullet$  é um novo operador, chamado de operador de Tarski, para o qual valem:

$$(i) a \vee \bullet a = \bullet a$$

$$(ii) \bullet a \vee \bullet (a \vee b) = \bullet (a \vee b)$$

$$(iii) \bullet(\bullet a) = \bullet a.$$

**Exemplo 4.2:** O espaço de conjuntos  $\mathcal{P}(A)$ , quando  $A \neq \emptyset$  com o operador  $\bullet$  definido por  $\bullet a = a$ , para tal que para todo  $a \in A$ , é uma TK-álgebra.

Os conjuntos dos números inteiros e reais serão denotados respectivamente por  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 4.3:** O espaço de conjuntos  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  com  $\bullet X = X \cup \{0\}$  é uma TK-álgebra.

**Exemplo 4.4:** O espaço de conjuntos  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  com  $\bullet X = \bigcap \{I : I \text{ é um intervalo e } X \subseteq I\}$  é uma TK-álgebra.

Como as TK-álgebras estão no contexto das álgebras de Boole, o item (i) da definição acima afirma que, para cada  $a \in A$ ,  $a \leq \bullet a$ .

Em uma TK-álgebra qualquer podemos definir os seguintes operadores:

$$a \rightarrow b = \sim a \vee b$$

$$a - b = a \wedge \sim b.$$



**Proposição 4.5:** Para toda TK-álgebra valem as seguintes condições:

- (i)  $\sim \bullet a \leq \sim a \leq \bullet \sim a$
- (ii)  $a \leq b \Rightarrow \bullet a \leq \bullet b$
- (iii)  $\bullet(a \wedge b) \leq \bullet a \wedge \bullet b$
- (iv)  $\bullet a \vee \bullet b \leq \bullet(a \vee b)$ .

Seja **S** um sistema axiomático qualquer. As definições seguintes são usuais.

**Definição 4.6:** Se  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  é um conjunto de fórmulas do sistema **S**, então  $\Gamma$  deduz  $\varphi$ , o que é denotado por  $\Gamma \vdash_s \varphi$ , se existe uma sequência finita de fórmulas  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  de maneira que  $\varphi_n = \varphi$  e, para cada  $\varphi_i, 1 \leq i \leq n$ , vale uma das seguintes condições:

- $\varphi_i$  é um axioma;
- $\varphi_i \in \Gamma$ ;
- $\varphi_i$  é obtida de fórmulas que ocorrem anteriormente na sequência através de alguma regra de dedução do sistema **S**.

Quando  $\Gamma = \emptyset$ , escrevemos simplesmente  $\vdash_s \varphi$  no lugar de  $\Gamma \vdash_s \varphi$ , e dizemos que  $\varphi$  é um teorema do sistema axiomático **S**. Deixamos de escrever o subscrito de  $\vdash_s$  sempre que não há possibilidade de confusão.

Denotamos a negação da fórmula  $\varphi$  por  $\sim \varphi$ .

**Definição 4.7:** Um conjunto  $\Gamma$  de fórmulas do sistema **S** é consistente se não existe fórmula  $\varphi$  de **S** tal que  $\Gamma \vdash \varphi$  e  $\Gamma \vdash \sim \varphi$ .

A seguir, apresentamos o sistema formal ou lógica **TK**, que formaliza as noções essenciais de um operador de consequência no ambiente lógico.

A lógica proposicional **TK** é o sistema lógico construído sobre a linguagem proposicional de **TK** que é  $L = (\neg, \vee, \rightarrow, \diamond, p_1, p_2, p_3, \dots)$  com os seguintes axiomas e regras:

- (CPC)  $\varphi$ , se  $\varphi$  é uma tautologia
- (TK<sub>1</sub>)  $\varphi \rightarrow \diamond \varphi$
- (TK<sub>2</sub>)  $\diamond \diamond \varphi \rightarrow \diamond \varphi$
- (MP)  $\varphi \rightarrow \psi, \varphi / \psi$
- (RM<sup>♦</sup>)  $\vdash \varphi \rightarrow \psi / \vdash \diamond \varphi \rightarrow \diamond \psi$ .

**Proposição 4.8:**  $\vdash \diamond \varphi \rightarrow \diamond(\varphi \vee \psi)$ .

*Demonstração:*

- 1.  $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$  Tautologia
- 2.  $\diamond \varphi \rightarrow \diamond(\varphi \vee \psi)$  RM<sup>♦</sup> em 1 ■

**Proposição 4.9:**  $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \diamond\varphi$ .

*Demonstração:*

1.  $\varphi$  Premissa
2.  $\varphi \rightarrow \diamond\varphi$  Axioma  $TK_1$
3.  $\diamond\varphi$  MP em 1 e 2 ■

**Proposição 4.10:**  $\Gamma \vdash \diamond\varphi \vee \diamond\psi \rightarrow \diamond(\varphi \vee \psi)$

*Demonstração:*

1.  $\diamond\varphi \rightarrow \diamond(\varphi \vee \psi)$  Prop. 4.8
2.  $\diamond\psi \rightarrow \diamond(\varphi \vee \psi)$  Prop. 4.8
3.  $\diamond\varphi \vee \diamond\psi \rightarrow \diamond(\varphi \vee \psi)$  CPC em 1 e 2. ■

Em (FEITOSA e NASCIMENTO, 2010) está uma demonstração da adequação (correção e completude) de **TK** relativo às TK-álgebras.

Podemos definir o operador dual de  $\diamond$  da seguinte maneira:

$$\hat{\diamond}\varphi =_{\text{df}} \neg\diamond\neg\varphi.$$

**Proposição 4.11:**  $\vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash \hat{\diamond}\varphi \rightarrow \hat{\diamond}\psi$ .

**Corolário 4.12:**  $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \vdash \hat{\diamond}\varphi \leftrightarrow \hat{\diamond}\psi$ .

**Proposição 4.13:**  $\vdash \hat{\diamond}\varphi \rightarrow \varphi$ .

**Proposição 4.14:**  $\vdash \hat{\diamond}\varphi \rightarrow \hat{\diamond}\hat{\diamond}\varphi$ .

**Proposição 4.15:**  $\vdash \hat{\diamond}(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \hat{\diamond}\varphi$ .

**Corolário 4.16:**  $\vdash \hat{\diamond}(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \hat{\diamond}\psi)$ .

Poderíamos, alternativamente, ter tomado o operador  $\hat{\diamond}$  como o operador primitivo e substituir os axiomas  $TK_1$  e  $TK_2$  pelos seguintes axiomas e regra de dedução:

- ( $TK_1^*$ )  $\hat{\diamond}\varphi \rightarrow \varphi$
- ( $TK_2^*$ )  $\hat{\diamond}\varphi \rightarrow \hat{\diamond}\hat{\diamond}\varphi$
- ( $RM^*$ )  $\vdash \varphi \rightarrow \psi / \vdash \hat{\diamond}\varphi \rightarrow \hat{\diamond}\psi$ .

Como veremos na próxima seção, dado um espaço quase topológico  $(E, \Omega)$ , o operador está associado ao fecho naquele espaço, enquanto o operador  $\hat{\diamond}$  está associado ao interior.

## 5 Conexões de Galois

Apresentamos as conexões de Galois. Seguimos a apresentação e denominação de (DUNN e HARDEGREE, 2001). Há muitas variações sobre estas definições. Sugerimos também como fontes (ORE, 1944) e (SMITH, 2010).

Daremos alguns nomes para funções que ocorrem nas teorias sobre os pares de Galois, o que nos fará algumas apresentações um pouco mais breves. Estes nomes têm muitas variações na literatura e escolheremos alguns que julgamos convenientes.

**Definição 5.1:** Seja  $f: (A, \leq) \rightarrow (P, \leq)$  uma função entre dois conjuntos parcialmente ordenados. Então:

- (i) a função  $f$  preserva as ordens se  $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
- (ii) a função  $f$  inverte as ordens se  $a \leq b \Rightarrow f(b) \leq f(a)$ .

É claro que em  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$ , as ordens não são necessariamente as mesmas, embora sejam representadas pelo mesmo símbolo  $\leq$ , pois  $A$  e  $P$  são conjuntos quaisquer.

No contexto da análise, usualmente estas funções são chamadas de crescente e decrescente, respectivamente, mas é menos usual esta denominação nos contextos das Conexões de Galois. Outras vezes são chamadas de isótonas e antítonas. A primeira também ocorre com o nome de monótona.

**Definição 5.2:** Se  $f: (A, \leq) \rightarrow (A, \leq)$  é uma função sobre o mesmo conjunto parcialmente ordenado, então:

- (i) a função  $f$  é idempotente se  $f \circ f = f$
- (ii) a função  $f$  é extensiva ou inflacionária se para todo  $a \in A$ ,  $a \leq f(a)$
- (iii) a função  $f$  é deflacionária se para todo  $a \in A$ ,  $f(a) \leq a$ .

**Definição 5.3:** Se  $f: (A, \leq) \rightarrow (A, \leq)$  é uma função sobre o mesmo conjunto parcialmente ordenado, então:

- (i) a função  $f$  é um operador de Tarski (operador do fecho dedutivo) se  $f$  é inflacionária, preserva ordens e é idempotente;
- (ii) a função  $f$  é um operador de interior se  $f$  é deflacionária, preserva ordens e é idempotente.

**Definição 5.4:** Dados dois conjuntos parcialmente ordenados  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$  e as funções  $f: A \rightarrow P$  e  $g: P \rightarrow A$ , o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois se, para todo  $a \in A$  e todo  $p \in P$ , temos:

$$a \leq g(p) \Leftrightarrow p \leq f(a).$$

Segue desta definição que se  $(f, g)$  é uma conexão de Galois, então o par  $(g, f)$  é também uma conexão de Galois.

**Exemplo 5.5:** Para  $A = P = \mathbb{Z}$ , com a ordem natural dos inteiros, tomando-se a função  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , definida por  $f(x) = -x$  e  $g = f$ , então  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para  $(\mathbb{Z}, \leq)$ , pois:

$$a \leq g(p) \Leftrightarrow a \leq -p \Leftrightarrow p \leq -a \Leftrightarrow p \leq f(a).$$

**Exemplo 5.6:** Para  $A = P = \mathcal{P}(M)$ , o conjunto das partes de um conjunto  $M$ , com a ordem dada pela inclusão de conjuntos, e  $f = g$  a função complementar, isto é,  $f(X) = X^c = g(X)$ , temos que  $(f, g)$  é uma conexão de Galois.

Os exemplos acima são casos particulares da proposição seguinte.

**Proposição 5.7:** Sejam  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$  conjuntos parcialmente ordenados e  $f: A \rightarrow P$  uma função bijetiva que inverte as ordens. Então:

- (i)  $f^{-1}$  inverte as ordens;
- (ii)  $(f, f^{-1})$  é uma conexão de Galois.

*Demonstração:* (i) Sejam  $p, q \in P$  de maneira que  $p \leq q$ . Suponhamos que  $f^{-1}(p) < f^{-1}(q)$ . Como  $f$  inverte as ordens e é injetiva, então  $f(f^{-1}(q)) < f(f^{-1}(p))$ , ou seja,  $q < p$ , o que contradiz a suposição de que  $p \leq q$ . Assim,  $f^{-1}(q) \leq f^{-1}(p)$  e, portanto,  $f^{-1}$  inverte as ordens.

(ii) Para  $a \in A$  e  $p \in P$ , como  $f$  e  $f^{-1}$  invertem as ordens, temos  $a \leq f^{-1}(p) \Rightarrow f(f^{-1}(p)) \leq f(a) \Rightarrow p \leq f(a) \Rightarrow f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(p) \Rightarrow a \leq f^{-1}(p)$ . Assim, o par  $(f, f^{-1})$  é uma conexão de Galois. ■

A proposição seguinte nos dá condições para termos uma conexão de Galois.

**Proposição 5.8:** Sejam  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$  duas ordens parciais,  $f: A \rightarrow P$  e  $g: P \rightarrow A$  funções,  $a, b \in A$  e  $p, q \in P$ . Então, o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois se, e somente se, valem as condições:

- (i)  $a \leq b \Rightarrow f(b) \leq f(a)$
- (ii)  $p \leq q \Rightarrow g(q) \leq g(p)$
- (iii)  $a \leq g(f(a))$
- (iv)  $p \leq f(g(p))$ .

*Demonstração:* (i) Seja  $a \leq b$ . Se  $p = f(b)$ , então  $p \leq f(b)$ . Como  $(f, g)$  é uma conexão de Galois, então  $p \leq f(b) \Leftrightarrow b \leq g(p)$  e, daí,  $a \leq b \leq g(p)$ . Como  $a \leq g(p) \Leftrightarrow p \leq f(a)$ , segue que  $f(b) \leq f(a)$ , pois  $p = f(b)$ .

(ii) Seja  $p \leq q$  e tomemos  $b = g(q)$ . Assim,  $b \leq g(q)$  e da definição de conexão segue que  $q \leq f(b)$ . Daí,  $p \leq f(b) \Leftrightarrow b \leq g(p)$  e, portanto,  $g(q) \leq g(p)$ , pois  $b = g(q)$ .

- (iii) Dado  $a \in A$ , seja  $f(a) = p$ . Daí,  $p \leq f(a) \Leftrightarrow a \leq g(p) = g(f(a))$ .

(iv) Dado  $p \in P$ , seja  $g(p) = a$ . Daí,  $a \leq g(p) \Leftrightarrow p \leq f(a) = f(g(p))$ .

$(\Leftrightarrow) a \leq g(p) \Rightarrow f(g(p)) \leq f(a) \Rightarrow$  (por (iv))  $p \leq f(a) \Rightarrow g(f(a)) \leq g(p) \Rightarrow$  (por (iii))  $a \leq g(p)$ . Assim,  $(f, g)$  determina uma conexão de Galois. ■

Temos, deste modo, uma forma alternativa de definirmos uma conexão de Galois. O par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois se as funções  $f$  e  $g$  invertem as ordens e as compostas  $f \circ g$  e  $g \circ f$  são inflacionárias.

**Proposição 5.9:** Se  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para as ordens parciais  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$ , então segue que:  $f(a) = f(g(f(a)))$  e  $g(p) = g(f(g(p)))$ .

*Demonstração:* Da Proposição 5.8 (iii), temos que  $a \leq g(f(a))$  e, daí, pelo item (i),  $f(g(f(a))) \leq f(a)$ . Mas, ainda por (iii),  $f(a) \leq f(g(f(a)))$ . Assim,  $f(a) = f(g(f(a)))$ .

A outra igualdade é verificada de modo semelhante. ■

**Corolário 5.10:** Se  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para as ordens parciais  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$  e a função  $f$  é injetiva, então:

(i) para cada  $a \in A$ , tem-se  $a = g(f(a))$

(ii) se  $p = f(a)$ , então  $a = g(p)$ .

*Demonstração:* (i) Pela Proposição anterior,  $f(a) = f(g(f(a)))$  e como  $f$  é injetiva, então  $a = g(f(a))$ .

(ii) Se  $p = f(a)$ , então  $f(g(p)) = f(g(f(a))) = f(a)$ . Agora, como  $f$  é injetiva, então  $g(p) = a$ . ■

**Corolário 5.11:** Se  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para as ordens parciais  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$ , então para cada  $p \in f(A)$  existe  $a \in A$  tal que  $p = f(a)$  e  $a = g(p)$ .

*Demonstração:* Se  $p \in f(A)$ , então para algum  $b \in A$ , tem-se que  $p = f(b)$ . Agora, seja  $g(p) = a$ . Daí,  $f(a) = f(g(p)) = f(g(f(b))) = f(b) = p$ . Portanto,  $p = f(a)$  e  $a = g(p)$ . ■

**Corolário 5.12:** Se  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para as ordens parciais  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$ , então para cada  $a \in g(P)$  existe  $p \in P$  tal que  $p = f(a)$  e  $a = g(p)$ .

*Demonstração:* É imediato, pois  $(g, f)$  é uma conexão de Galois para as ordens parciais  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$ . ■

**Proposição 5.13:** Se  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$ , então as duas composições  $g \circ f$  e  $f \circ g$  são operadores de Tarski sobre  $A$  e  $P$ , respectivamente.

*Demonstração:* De acordo com a Proposição 5.8 (iii), para todo  $a \in A$ ,  $a \leq g(f(a))$ . Agora, se  $a \leq b$ , então  $f(b) \leq f(a)$  e, daí,  $g(f(a)) \leq g(f(b))$ . Como, da proposição anterior,  $f(g(f(a))) = f(a)$ , então  $g(f(g(f(a)))) = g(f(a))$ .

Logo,  $g \circ f$  é um operador de Tarski sobre  $A$ .

Como  $f \circ g$  é também uma conexão de Galois, então é também um operador de Tarski. ■

**Exemplo 5.14:** Dados dois conjuntos E e F, seja R uma relação de E em F, isto é,  $R \subseteq E \times F$  e consideremos então os conjuntos parcialmente ordenados  $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$  e  $(\mathcal{P}(F), \subseteq)$ .

Agora, definamos as seguintes funções:  $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$  dada por  $A^f = \{b \in F : (\forall x \in A)(xRb)\}$  e  $g: \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  dada por  $B^g = \{a \in E : (\forall y \in B)(aRy)\}$ .

Mostraremos que  $(f, g)$  é uma conexão de Galois. Para tanto, devemos observar que (i)  $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2^f \subseteq A_1^f$ ; (ii)  $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_2^g \subseteq B_1^g$ ; (iii)  $B \subseteq (B^g)^f$ ; (iv)  $A \subseteq (A^f)^g$ , conforme Proposição 5.8.

(i) Consideremos que  $A_1 \subseteq A_2$ . Se  $b \in A_2^f$ , então  $(\forall x \in A_2)(xRb)$ . Da hipótese, temos que  $(\forall x \in A_1)(xRb)$  e, portanto,  $b \in A_1^f$ . Logo  $A_2^f \subseteq A_1^f$ .

(ii) é similar.

(iii)  $B^g$  é o conjunto de todos os elementos de E que se relacionam com todos os elementos de B. Assim, para todo  $b \in B$ , se  $a \in B^g$ , então  $aRb$ .

$(B^g)^f$  é o conjunto de todos os elementos de F que se relacionam com todos os elementos de  $B^g$ . Assim, para todo  $x \in B^g$ , se  $y \in (B^g)^f$ , então  $xRy$ .

Como todos os elementos de B se relacionam com todos os elementos de  $B^g$ , então  $B \subseteq (B^g)^f$ . (iv) é similar.

Além disso,  $\emptyset^f = \{b \in F : (\forall x \in \emptyset)(xRb)\} = F$  e  $\emptyset^g = \{a \in E : (\forall y \in \emptyset)(aRy)\} = E$ . Da proposição 5.9, segue que  $A^f = ((A^f)^g)^f$  e  $B^g = ((B^g)^f)^g$ .

Da proposição 5.13, temos que  $g \circ f$  é um operador de Tarski sobre E e  $f \circ g$  é um operador de Tarski sobre F.

**Exemplo 5.15:** Tomando  $E = \{a, b\}$ ,  $F = \{1, 2\}$  e  $R = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2)\}$  no exemplo anterior, temos:

$$f(\emptyset) = \{1, 2\}; f(\{a\}) = \{1, 2\}; f(\{b\}) = \{1\}; f(\{a, b\}) = \{1\}.$$

$$g(\emptyset) = \{a, b\}; g(\{1\}) = \{a, b\}; g(\{2\}) = \{a\}; g(\{1, 2\}) = \{a\}.$$

Neste caso, temos  $f(\emptyset) = \{1, 2\}$  e  $g(\{1, 2\}) = \{a\} \neq \emptyset$ , mostrando que não podemos retirar a hipótese que f é injetiva, no Corolário 5.10.

**Proposição 5.16:** Se o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para os reticulados  $(A, \wedge, \vee)$  e  $(P, \wedge, \vee)$ , então valem:

$$(i) f(x\vee y) = f(x)\wedge f(y)$$

$$(ii) g(x\vee y) = g(x)\wedge g(y).$$

*Demonstração:* (i) Como  $x \leq x\vee y$  e  $y \leq x\vee y$ , então  $f(x\vee y) \leq f(x)$  e  $f(x\vee y) \leq f(y)$ , donde segue que  $f(x\vee y) \leq f(x)\wedge f(y)$ .

Por outro lado,  $f(x)\wedge f(y) \leq f(x)$  e  $f(x)\wedge f(y) \leq f(y) \Rightarrow x \leq g(f(x)) \leq g(f(x)\wedge f(y))$  e  $y \leq g(f(y)) \leq g(f(x)\wedge f(y)) \Rightarrow x\vee y \leq g(f(x)\wedge f(y)) \Rightarrow f(x)\wedge f(y) \leq f(g(f(x)\wedge f(y))) \leq f(x\vee y)$ .

Portanto,  $f(x\vee y) = f(x)\wedge f(y)$ .

(ii) Similar. ■

Na proposição anterior não podemos trocar  $\vee$  por  $\wedge$ , como podemos observar no exemplo a seguir.

**Exemplo 5.17:** No Exemplo 5.14, sejam  $E = F = \mathcal{P}(\mathbb{R})$  o conjunto das partes de  $\mathbb{R}$  e consideremos a relação  $ARB \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ . Se  $A = \{(1, 2)\}$  e  $B = \{(3, 4)\}$ , então:

$$f(A) = \{X \subseteq \mathbb{R} : (1, 2) \cap X = \emptyset\}$$

$$f(B) = \{X \subseteq \mathbb{R} : (3, 4) \cap X = \emptyset\}$$

$$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

$f(A) \cup f(B) = \{X \subseteq \mathbb{R} : (1, 2) \cap X = \emptyset \text{ ou } (3, 4) \cap X = \emptyset\} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , pois  $(1, 2) \cup (3, 4) \notin f(A) \cup f(B)$ .

Assim,  $f(A \cap B) \neq f(A) \cup f(B)$ .

**Proposição 5.18:** Se  $(f, g_1)$  e  $(f, g_2)$  são conexões de Galois para as ordens  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$ , então:  $g_1 = g_2$ . Se  $(f_1, g)$  e  $(f_2, g)$  são conexões de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$ , então:  $f_1 = f_2$ .

*Demonstração:* Dado  $p \in P$ , como  $g_1$  e  $g_2$  são funções, então estão definidos  $g_1(p)$  e  $g_2(p)$ . Pela Proposição 5.8, segue que para todo  $p \in P$  tem-se:  $p \leq f(g_1(p))$  e  $p \leq f(g_2(p))$ . Logo,  $g_1(p) \leq g_2(f(g_1(p))) \leq g_2(p)$  e  $g_2(p) \leq g_1(f(g_2(p))) \leq g_1(p)$ . Assim,  $g_1 = g_2$ .

A demonstração da segunda parte é análoga. ■

**Proposição 5.19:** Se o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$ , então valem:

(i)  $a \in g(P) \Leftrightarrow g(f(a)) = a$

(ii)  $p \in f(A) \Leftrightarrow f(g(p)) = p$

(iii)  $f(A) = f(g(P))$

(iv)  $g(P) = g(f(A))$ .

*Demonstração:* (i)  $(\Rightarrow)$  Se  $a \in g(P)$ , então existe  $p \in P$  tal que  $g(p) = a$ . Daí,  $g(f(a)) = g(f(g(p))) = g(p) = a$ .  $(\Leftarrow)$  Se  $g(f(a)) = a$ , então para  $b = f(a)$  temos que  $g(b) = a$  e, portanto,  $a \in g(P)$ .

(ii) Similar.

(iii) Se  $p \in f(A)$ , por (ii),  $p = f(g(p))$  e, portanto,  $p \in f(g(P))$ . Logo  $f(A) \subseteq f(g(P))$ . Agora, como  $g(P) \subseteq A$ , então  $f(g(P)) \subseteq f(A)$ .

(iv) Similar.

Assim, cada ponto  $a \in g(P)$  é ponto fixo da função  $g \circ f$  e cada ponto  $p \in f(A)$  é ponto fixo da função  $f \circ g$ . ■

**Proposição 5.20:** Se o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$ , então:

(i)  $f(a) = \max\{p \in P : a \leq g(p)\}$

(ii)  $g(p) = \max\{a \in A : p \leq f(a)\}$ .

*Demonstração:* (i) Dado  $a \in A$ , como  $a \leq g(f(a))$ , então  $f(a) \in \{p \in P : a \leq g(p)\}$ . Agora, se  $c \in \{p \in P : a \leq g(p)\}$ , então  $a \leq g(c)$  e, portanto,  $c \leq f(a)$ . Logo,  $f(a) = \max\{p \in P : a \leq g(p)\}$ .

(ii) Dado  $p \in P$ , como  $p \leq f(g(p))$ , então  $g(p) \in \{a \in A : p \leq f(a)\}$ . Agora, se  $c \in \{a \in A : p \leq f(a)\}$ , então  $p \leq f(c)$  e, portanto,  $c \leq g(p)$ . Logo,  $g(p) = \max\{a \in A : p \leq f(a)\}$ . ■

Podemos também fazer produto cartesiano para conexões de Galois. Não colocaremos índices nas ordens, para não carregar as notações.

Se  $(f_1, g_1)$  é uma conexão para  $(A_1, \leq)$  e  $(P_1, \leq)$  e  $(f_2, g_2)$  é uma conexão para  $(A_2, \leq)$  e  $(P_2, \leq)$ , então definimos uma conexão de Galois para  $(A_1 \times A_2)$  e  $(P_1 \times P_2)$  do seguinte modo.

A ordem do produto cartesiano da forma usual:

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \text{ e } b \leq d$$

As funções  $f: A_1 \times A_2 \rightarrow P_1 \times P_2$  e  $g: P_1 \times P_2 \rightarrow A_1 \times A_2$  são dadas por:

$$f(a_1, a_2) = (f_1(a_1), f_2(a_2)) \text{ e } g(p_1, p_2) = (g_1(p_1), g_2(p_2)).$$

Assim,  $(p_1, p_2) \leq f(a_1, a_2) = (f_1(a_1), f_2(a_2)) \Leftrightarrow p_1 \leq f_1(a_1) \text{ e } p_2 \leq f_2(a_2) \Leftrightarrow a_1 \leq g_1(p_1) \text{ e } a_2 \leq g_2(p_2) \Leftrightarrow (a_1, a_2) \leq g(p_1, p_2)$ .

Portanto, o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois para os conjuntos ordenados  $(A_1 \times A_2, \leq)$  e  $(P_1 \times P_2, \leq)$ .

## 6 Pares de Galois

Como vimos na seção anterior, conexão de Galois é um par de funções definidas entre duas estruturas de ordem, com sentidos inversos, motivadas pelas funções da Teoria de Galois.

Na Teoria de Galois, as duas funções  $(f, g)$  conectam a estrutura dada pelos corpos intermediários de uma extensão de corpos  $K \subseteq L$  com a dos subgrupos do grupo de automorfismos de  $L$  que fixam o subcorpo  $K$ .

Quando olhamos para a definição de conexão de Galois, podemos fazer quatro permutações simples, o que nos geram outros pares de funções, que mantêm alguma semelhança com a definição de conexão.

Agora, apresentamos cada uma destas variações que dão origem a distintos pares de funções, as quais chamamos no coletivo de pares de Galois.

**Definição 6.1:** Se  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$  são conjuntos parcialmente ordenados,  $f: A \rightarrow P$  e  $g: P \rightarrow A$  são funções e  $a \in A$  e  $p \in P$  são elementos quaisquer, então:

- (i) o par  $(f, g)$  é uma conexão de Galois se:  $a \leq g(p) \Leftrightarrow p \leq f(a)$
- (ii) o par  $(f, g)^d$  é uma conexão dual de Galois se:  $g(p) \leq a \Leftrightarrow f(a) \leq p$
- (iii) o par  $[f, g]$  é uma adjunção se:  $a \leq g(p) \Leftrightarrow f(a) \leq p$
- (iv) o par  $[f, g]^d$  é uma adjunção dual se:  $g(p) \leq a \Leftrightarrow p \leq f(a)$ .



O nome adjunção vem da teoria das categorias. Em muitos textos sobre o tema, o par  $[f, g]$  também é chamado de residuo.

Como no caso de conexões de Galois, a seguir enunciaremos uma proposição que nos dá condições para termos uma adjunção.

**Proposição 6.2:** Sejam  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$  duas ordens parciais,  $f: A \rightarrow P$  e  $g: P \rightarrow A$  funções,  $a, b \in A$  e  $p, q \in P$ . Então, o par  $[f, g]$  é uma adjunção se, e somente se, valem as condições:

$$(i) \ a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

$$(ii) \ p \leq q \Rightarrow g(p) \leq g(q)$$

$$(iii) \ a \leq g(f(a))$$

$$(iv) \ f(g(p)) \leq p.$$

*Demonstração:* (i) Seja  $a \leq b$ . Tomando  $p = f(b)$ , então  $f(b) \leq p$ . Como  $[f, g]$  é uma adjunção, então  $b \leq g(p)$  e daí  $a \leq g(p)$ . Como  $[f, g]$  é uma adjunção,  $f(a) \leq p = f(b)$ , donde segue que  $f(a) \leq f(b)$ .

(ii) Seja  $p \leq q$  e tomemos  $a = g(p)$ . Assim,  $a \leq g(p)$  e da definição de adjunção segue que  $f(a) \leq p$ . Daí,  $f(a) \leq q$  e, portanto,  $g(p) = a \leq g(q)$ .

(iii) Dado  $a \in A$ , seja  $f(a) = p$ . Daí,  $f(a) \leq p$  e como  $[f, g]$  é uma adjunção, então  $a \leq g(p) = g(f(a))$ .

(iv) Dado  $p \in P$ , seja  $a = g(p)$ . Daí,  $a \leq g(p)$  e como  $[f, g]$  é uma adjunção, então  $f(a) \leq p$ . Portanto,  $f(g(p)) \leq p$ .

( $\Leftarrow$ ) Consideremos que valem as condições (i) - (iv):  $a \leq g(p) \Rightarrow f(a) \leq f(g(p)) \leq p$  e  $f(a) \leq p \Rightarrow g(f(a)) \leq g(p) \Rightarrow a \leq g(p)$ . ■

Temos, então, uma forma alternativa para definirmos uma adjunção. O par  $[f, g]$  é uma adjunção se as funções  $f$  e  $g$  preservam as ordens, a composta  $g \circ f$  é inflacionária e a composta  $f \circ g$  é deflacionária.

Se  $(A, \leq)$  é um conjunto parcialmente ordenado, então denotaremos a ordem inversa de  $\leq$  por  $\geq$  e, desse modo,  $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$ .

Desta definição decorre o que segue.

Sejam  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$  conjuntos parcialmente ordenados e  $f: A \rightarrow P$  e  $g: P \rightarrow A$  funções:

(i) Se  $(f, g)$  é uma conexão de Galois, então  $(g, f)$  também é uma conexão de Galois.

(ii) Se  $(f, g)^d$  é uma conexão dual de Galois, então  $(g, f)^d$  também é uma conexão dual de Galois.

(iii) Se  $[f, g]$  é uma adjunção, então  $[g, f]^d$  é uma adjunção dual.

(iv) Se  $[f, g]^d$  é uma adjunção dual, então  $[g, f]$  é uma adjunção.

Se é uma conexão de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$ , então:

(i)  $(f, g)^d$  é uma conexão dual de Galois para  $(A, \geq)$  e  $(P, \geq)$ .

(ii)  $[f, g]$  é uma adjunção para  $(A, \leq)$  e  $(P, \geq)$ .

(iii)  $[f, g]^d$  é uma adjunção dual para  $(A, \geq)$  e  $(P, \leq)$ .

Cada par de Galois tem resultados semelhantes aos da seção anterior, quando nos detemos às conexões de Galois. No quadro seguinte, faremos uma síntese dos resultados principais para cada par.

Sejam  $(A, \leq)$  e  $(P, \leq)$  conjuntos parcialmente ordenados,  $f : A \rightarrow P$  e  $g : P \rightarrow A$  funções,  $a \in A$  e  $p \in P$  elementos quaisquer.

**Tabela 1:**

Conexão de Galois	Conexão dual de Galois
$(f, g), (A, \leq)$ e $(P, \leq)$	$(f, g)^d, (A, \leq)$ e $(P, \leq)$
$a \leq g(p) \Leftrightarrow p \leq f(a)$	$g(p) \leq a \Leftrightarrow f(a) \leq p$
$f$ e $g$ invertem as ordens	$f$ e $g$ invertem as ordens
$f \circ g$ e $g \circ f$ são inflacionárias	$f \circ g$ e $g \circ f$ são deflacionárias
$f \circ g$ e $g \circ f$ são operadores de Tarski	$f \circ g$ e $g \circ f$ são operadores de interior
$f \circ g \circ f = f$ e $g \circ f \circ g = g$	$f \circ g \circ f = f$ e $g \circ f \circ g = g$
$f(a) = \max\{p \in P : a \leq g(p)\}$	$f(a) = \min\{p \in P : g(p) \leq a\}$
$g(p) = \max\{a \in A : p \leq f(a)\}$	$g(p) = \min\{a \in A : f(a) \leq p\}$
Adjunção	Adjunção dual
$[f, g], (A, \leq)$ e $(P, \leq)$	$[f, g]^d, (A, \leq)$ e $(P, \leq)$
$a \leq g(p) \Leftrightarrow f(a) \leq p$	$g(p) \leq a \Leftrightarrow p \leq f(a)$
$f$ e $g$ preservam as ordens	$f$ e $g$ preservam as ordens
$f \circ g$ é deflacionária e $g \circ f$ é inflacionária	$f \circ g$ é inflacionária e $g \circ f$ é deflacionária
$f \circ g$ e $g \circ f$ são interior e Tarski	$f \circ g$ e $g \circ f$ são Tarski e interior
$f \circ g \circ f = f$ e $g \circ f \circ g = g$	$f \circ g \circ f = f$ e $g \circ f \circ g = g$
$f(a) = \min\{p \in P : a \leq g(p)\}$	$f(a) = \max\{p \in P : g(p) \leq a\}$
$g(p) = \max\{a \in A : f(a) \leq p\}$	$g(p) = \min\{a \in A : p \leq f(a)\}$

Agora, alguns resultados sobre a composição de pares de Galois.

**Proposição 6.3:** Se  $(f_1, g_1)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(B, \leq)$  e  $(f_2, g_2)^d$  é uma conexão dual de Galois para  $(B, \leq)$  e  $(C, \leq)$ , então é uma  $[f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2]$  adjunção para  $(A, \leq)$  e  $(C, \leq)$ .

*Demonstração:* Se  $a \in A$  e  $c \in C$  são elementos quaisquer destes dois conjuntos, considerando que  $f_1$  e  $g_2$  são funções, então  $f_1(a), g_2(c) \in B$ . Como temos então  $a g_1(g_2(c)) \Leftrightarrow g_2(c) \leq f_1(a) \Leftrightarrow f_2(f_1(a)) \leq c$ . Logo,  $[f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2]$  é uma adjunção. ■

**Proposição 6.4:** Se  $(f_1, g_1)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(B, \leq)$  e  $[f_2, g_2]^d$  é uma adjunção dual para  $(B, \leq)$  e  $(C, \leq)$ , então é uma  $[f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2]$  conexão de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(C, \leq)$ .

*Demonstração:* Se  $a \in A$  e  $c \in C$  são elementos quaisquer destes dois conjuntos, considerando que  $f_1$  e  $g_2$  são funções, então  $f_1(a), g_2(c) \in B$ . Como  $(f_1, g_1)$  é uma conexão e  $[f_2, g_2]^d$  é uma adjunção dual, então  $a \leq g_1(g_2(c)) \Leftrightarrow g_2(c) \leq f_1(a) \Leftrightarrow c \leq f_2(f_1(a))$ . Assim,  $[f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2]$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(C, \leq)$ . ■

**Proposição 6.5:** Se  $[f_1, g_1]$  é uma adjunção para  $(A, \leq)$  e  $(B, \leq)$  e  $(f_2, g_2)$  é uma conexão de Galois para  $(B, \leq)$  e  $(C, \leq)$ , então  $(f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)$  é uma conexão de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(C, \leq)$ .

*Demonstração:* Se  $a \in A$  e  $c \in C$  são elementos quaisquer destes dois conjuntos, considerando que  $f_1$  e  $g_2$  são funções, então  $f_1(a), g_2(c) \in B$ . Como temos  $[f_1, g_1]$  e  $(f_2, g_2)$ , então  $a \leq g_1(g_2(c)) \Leftrightarrow f_1(a) \leq g_2(c) \Leftrightarrow c \leq f_2(f_1(a))$ . Logo,  $(f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2)$  é uma conexão de Galois. ■

**Proposição 6.6:** Se  $[f_1, g_1]$  é uma adjunção para  $(A, \leq)$  e  $(B, \leq)$  e  $[f_2, g_2]$  é uma adjunção para  $(B, \leq)$  e  $(C, \leq)$ , então  $[f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2]$  é uma adjunção para  $(A, \leq)$  e  $(C, \leq)$ .

*Demonstração:* Se  $a \in A$  e  $c \in C$  são elementos quaisquer destes dois conjuntos, considerando que  $f_1$  e  $g_2$  são funções, então  $f_1(a), g_2(c) \in B$ . Como  $[f_1, g_1]$  e  $[f_2, g_2]$  são adjunções, então  $a \leq g_1(g_2(c)) \Leftrightarrow f_1(a) \leq g_2(c) \Leftrightarrow f_2(f_1(a)) \leq c$ . Logo,  $[f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2]$  é uma adjunção. ■

A seguir, indicaremos um par qualquer de Galois por  $\{f, g\}$ . Esta notação entre chaves generaliza para qualquer uma das notações anteriores.

Para  $\{f_1, g_1\}$  par de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(B, \leq)$  e  $\{f_2, g_2\}$  par de Galois para  $(B, \leq)$  e  $(C, \leq)$ , em alguns casos,  $\{f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2\}$  é par de Galois para  $(A, \leq)$  e  $(C, \leq)$ . As demonstrações são análogas às das proposições anteriores.

**Tabela 2:**

$\{f_1, g_1\}$	$\{f_2, g_2\}$	$\{f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2\}$
Conexão	Conexão dual	Adjunção
Conexão	Adjunção dual	Conexão
Conexão dual	Conexão	Adjunção dual
Conexão dual	Adjunção	Conexão dual
Adjunção	Conexão	Conexão
Adjunção	Adjunção	Adjunção
Adjunção dual	Conexão dual	Conexão dual
Adjunção dual	Adjunção dual	Adjunção dual

## 6.1 Uma simples adjunção

Dado o espaço de Tarski  $(E, \bar{\quad})$ , consideremos a estrutura de ordem  $\langle \mathcal{P}(E), \subseteq \rangle$ , sobre a qual desejamos uma adjunção  $[f, g]$ . Então precisamos determinar  $f$  e  $g$  tal que para todos  $A, B \subseteq E$ ,  $A \subseteq g(B) \Leftrightarrow f(A) \subseteq B$ .

De modo muito simples, podemos tomar  $f(A) = \emptyset$  e  $g(B) = E$  e temos uma adjunção sobre  $\langle \mathcal{P}(E), \subseteq \rangle$ .

Dada a relação entre os espaços de Tarski, as TK-álgebras e a Lógica TK, então para as TK-álgebras, basta definirmos  $[f, g]$  tal que  $f(a) = 0$  e  $g(b) = 1$  e para a Lógica TK,  $[f, g]$  tal que  $f(\emptyset) = \perp$  e  $g(\psi) = \top$ .

Esta adjunção vale para as lógicas em geral. E as relações entre os sistemas conjuntistas, algébricos e lógicos estão sempre presentes.

A seguir, introduziremos uma conexão de Galois que envolve os espaços de Tarski.

## 7 Conexão de Galois para uma lógica e respectiva classe de modelos

Consideremos uma lógica de Tarski  $(E, C)$ . Pode ser, por exemplo, a lógica proposicional clássica, a lógica clássica de primeira ordem, uma lógica intuicionista ou modal, das bem conhecidas.

Esta lógica tem um sistema dedutivo bem estabelecido, que pode ser axiomático, por dedução natural, cálculo de seqüentes, tablôs ou outro qualquer dispositivo de dedução. Por ser um sistema de Tarski,  $C$  é um operador de Tarski, sujeito à definição de tal operador.

De um modo geral, uma lógica fica bem estabelecida quando também admite uma classe de modelos para qual há uma relação de consequência semântica bem precisa.

Indiquemos esta consequência por  $C_{\models}$ . Se  $\Delta \cup \{\psi\}$  é um conjunto de fórmulas desta lógica, então a relação de consequência semântica  $\Delta \models \psi$  vale quando a validade de todos os elementos de  $\Delta$  força a validade de  $\psi$ .

Para esta consequência, interpretamos ou atribuímos valor aos elementos de  $(E, C)$  em específicas estruturas matemáticas. Temos assim, uma função de interpretação, valoração ou atribuição, que leva cada elemento do contexto sintático, num elemento do contexto semântico.

Estas estruturas semânticas ou modelos podem estar em classes de modelos bem conhecidas como por exemplo valorações, matrizes lógicas, álgebras, modelos de Kripke, entre outros.

Colocaremos estas noções num contexto bem geral.

Para cada lógica  $(E, C)$ , temos uma classe de estruturas, indicada por  $\text{Est}(E)$ , com o mesmo domínio  $E$ , o conjunto das fórmulas da lógica, para o qual esteja definida uma relação de satisfação  $\models \subseteq \text{Est}(E) \times E$ , com a caracterização seguinte:  $(C, x) \in \models$  ou, como usual,  $C \models x$ , se a estrutura  $C$  satisfaz o elemento  $x$ ; e  $C \not\models x$ , se a estrutura  $C$  não satisfaz o elemento  $x$ .

Com isto, existe uma função de interpretação de  $E$  em  $\text{Est}(E)$  que atribui significado às expressões sintáticas de  $E$  em aspectos das estruturas matemáticas de  $\text{Est}(E)$ .

**Definição 7.1:** Se  $A \subseteq E$ , então a classe dos modelos de  $A$  é dada por:

$$\text{Mod}(A) =_{\text{df}} \{C \in \text{Est}(E) : \text{para todo } x \in A, C \models x\}.$$

**Definição 7.2:** Dado  $M \subseteq \text{Est}(E)$ , a teoria de  $M$  é definida como:

$$\text{Th}(M) =_{\text{df}} \{y \in E : \text{para todo } C \in M, C \models y\}.$$

Segue destas definições que  $A \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(A))$  e que  $M \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(M))$ .

Se  $M = \{C\}$ , então  $\text{Th}(M) = \text{Th}(C) = \{y \in E : C \models y\}$ , é o conjunto dos elementos válidos segundo o modelo  $C$ .

**Proposição 7.3:** Para  $A \subseteq B \subseteq E$ , tem-se que  $\text{Mod}(B) \subseteq \text{Mod}(A)$ .

*Demonstração:* Se  $C \in \text{Mod}(B)$ , então  $C \models y$ , para todo  $y \in B$ . Como  $A \subseteq B$ , em particular,  $C \models x$ , para todo  $x \in A$ . Logo,  $C \in \text{Mod}(A)$ . ■

**Proposição 7.4:** Para  $M \subseteq N \subseteq \text{Est}(E)$ , segue que  $\text{Th}(N) \subseteq \text{Th}(M)$ .

*Demonstração:* Se  $x \in \text{Th}(N)$ , então, para toda  $C \in N$ , vale que  $C \models x$ . Como  $M \subseteq N$ , então, para todo  $C \in M$ ,  $C \models x$ . Logo,  $x \in \text{Th}(M)$ . ■

Consideremos as duas estruturas de ordem  $\langle \mathcal{P}(E), \subseteq \rangle$  e  $\langle \mathcal{P}(\text{Est}(E)), \subseteq \rangle$  para as quais tomamos as funções  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(\text{Est}(E))$  definida por  $A^f = \text{Mod}(A)$  e  $g : \mathcal{P}(\text{Est}(E)) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  definida por  $M^g = \text{Th}(M)$ .

Como vimos,  $A \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(A))$  e que  $M \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(M))$ . Das duas proposições anteriores, segue que  $f$  e  $g$  invertem as ordens de  $\langle \mathcal{P}(E), \subseteq \rangle$  e  $\langle \mathcal{P}(\text{Est}(E)), \subseteq \rangle$ . Portanto, dos nossos desenvolvimentos anteriores, Proposição 5.8, temos que  $(f, g)$  é um par de Galois para estas estruturas de ordem.

Segue da Proposição 5.13 que  $\text{Th} \circ \text{Mod} = g \circ f$  é um operador de consequência sobre  $E$ .

**Definição 7.5:** Dado  $A \subseteq E$ , as consequências de  $A$ , módulo a classe de estruturas  $\text{Est}(E)$ , é definida por:

$$C_{\models}(A) =_{\text{df}} \text{Th}(\text{Mod}(A)).$$

Mas também  $\text{Mod} \circ \text{Th} = f \circ g$  é um operador de Tarski sobre  $\text{Est}(E)$ . A nossa teoria aponta para este resultado, mas pouco cuidamos desta consequência.

Para cada  $A \subseteq E$ , o conjunto  $\text{Th}(\text{Mod}(A))$  é fechado em  $(E, C_{\models})$  e é uma teoria desta estrutura.

Se  $(E, C)$  é uma lógica e  $A \cup \{x\} \subseteq E$ , então a expressão  $A \models x$  denota que todo modelo de  $A$  é também modelo de  $x$ . Assim,  $A \models x$  é outra forma de indicar que  $x \in C_{\models}(A)$ . Além disso,  $A \models x$  é equivalente a  $\text{Mod}(A) \subseteq \text{Mod}(\{x\})$ .

Consideremos que dada uma lógica  $(E, C)$  existe uma classe de estruturas  $\text{Est}(E)$  a qual está associada uma outra lógica abstrata como acima, denotada por  $(E, C_{\models})$ .

**Definição 7.6:** O elemento  $x \in E$  é um teorema se  $x \in C(\emptyset)$  e  $x$  é válido, o que é denotado por  $\models x$ , se  $x \in C_{\models}(\emptyset)$ . A lógica  $(E, C)$  é correta segundo  $(E, C_{\models})$ , se  $C(\emptyset) \subseteq C_{\models}(\emptyset)$ , isto é, todo teorema de  $(E, C)$  é válido em  $(E, C_{\models})$ ; ela é completa se  $C_{\models}(\emptyset) \subseteq C(\emptyset)$ , isto é, todo membro válido no modelo  $(E, C_{\models})$  é um teorema de  $(E, C)$ ; ela é adequada se é correta e completa, ou seja, se  $C(\emptyset) = C_{\models}(\emptyset)$ . A lógica  $(E, C)$  é fortemente adequada segundo  $(E, C_{\models})$  se, para todo  $A \subseteq E$ , tem-se  $C(A) = C_{\models}(A)$ .

## 8 Considerações finais

Neste artigo, apresentamos os espaços de Tarski ou sistemas dedutivos de Tarski e vimos que as TK-álgebras e a Lógica **TK** são formalizações do conceito de operador de Tarski em contexto algébrico e lógico proposicional. Os três conceitos são conectados e formalizam a noção de operador em contextos distintos.

Isto é usual no ambiente da Lógica. Por exemplo a lógica proposicional clássica tem como modelos algébricos toda e qualquer álgebra de Boole, que pelo Teorema do Isomorfismo de Stone é sempre isomorfa a uma álgebra de Boole de conjuntos.

Como um elemento adicional, tratamos dos pares de Galois, que são funções com sentidos contrários entre duas estruturas de ordem. Certamente, o nome decorre de uma generalização de pares de funções que ocorrem entre corpos intermediários para uma extensão de corpos de dimensão finita e o grupo determinado por imersões que fixam um dos corpos da extensão.

Em outro artigo, mostraremos como este desenvolvimento da Teoria de Galois motivou o conceito de conexão de Galois e, assim, os demais pares de Galois.

Os pares de Galois são dados pelas quatro combinações possíveis para a equivalência  $a \leq g(p) \Leftrightarrow p \leq f(a)$ . Estas equivalências podem ser retratadas de modo equivalente pela Proposição 5.8. Contudo, ao olharmos para estas condições equivalentes desta proposição, naturalmente observamos que poderíamos ter outros pares de funções com sentidos contrários entre duas estruturas de ordem, mas distintas dos quatro pares de Galois.

Posteriormente, mostraremos estes casos que fogem dos casos até então tratados, mas merecem ser investigados.

Para fechar o artigo, procuramos algum exemplo de conexão de Galois que sabidamente são abundantes no contexto da Matemática, mas que envolvessem os espaços de Tarski, os quais têm despertado a nossa curiosidade investigativa.

Esta conexão explicita relações importantes entre o contexto dedutivo (consequência sintática) e os modelos lógicos (consequência semântica). Mais uma vez, estes desenvolvimentos de caráter fundacional põem em evidência propriedades essenciais dos sistemas lógicos. Assim, fazemos isto usando elementos teóricos inicialmente distintos, mas que realçam propriedades da ordenação.

## Referências

DA SILVA, J.J., D'OTTAVIANO, I.M.L., SETTE, A.M. Translations between logics. In: CAICEDO, X., MONTENEGRO, C.H. (Eds.) *Models, Algebras and Proofs. Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics*, v. 203. New York: Marcel Dekker, 1999, p. 435-448.

- D'OTTAVIANO, I.M.L.; FEITOSA, H.A. Deductive systems and translations. In: BÉZIAU, Jean-Yvez; LEITE, Alexandre Costa (Orgs.). *Perspectives on universal logic*. Monza: Polimetrica International Scientific Publisher, 2007. p. 125-157.
- DUNN, J.M.; HARDEGREE, G.M. *Algebraic methods in philosophical logic*. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- EBBINGHAUS, H.D.; FLUM, J.; THOMAS, W. *Mathematical logic*. New York: Springer-Verlag, 1984.
- FEITOSA, H.A.; D'OTTAVIANO, I.M.L. Conservative translations. In: *Annals of Pure and Applied Logic*, v. 108, p. 205-227, 2001.
- FEITOSA, H.A.; GRÁCIO, M.C.C.; NASCIMENTO, M.C. Logic TK: algebraic notions from Tarki's consequence operator. In: *Principia*, v. 14, p. 47-70, 2010.
- FEITOSA, H.A.; NASCIMENTO, M.C. Logic of deduction: models of pre-order and maximal theories. IN: *South American Journal of Logic*, v. 1, p. 283-297, 2015.
- HERRLICH, H.; HUSEK, M. Galois connections categorically. In: *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 68, p. 165-180, 1990.
- MIRAGLIA, F. *Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica*. Campinas: UNICAMP/CLE. 1987. (Coleção CLE, v. 1).
- ORE, O. Galois connections. In: *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 55, p. 493-513, 1944.
- ORLOWSKA, E.; REWITZKY, I. Algebras for Galois-style connections and their discrete duality. In: *Fuzzy Sets and Systems*, v. 161, p. 1325-1342, 2010.
- SMITH, P. *The Galois connection between syntax and semantics*. Technical report. Cambridge: University of Cambridge, 2010.