Sub specie aeternitatis

Sub specie aeternitatis

Frank Thomas Sautter*

Resumo: A formalização de noções pré-teóricas não é uma ciência, mas uma arte. Isso se evidencia quando temos de decidir o que é indispensável e o que é prescindível na passagem do intuitivo para o formal. Exemplifico esse tipo de dificuldade com a formalização de uma noção intuitiva de coleção finita de objetos. A observância de maior fidelidade à noção pré-teórica, mesmo que desnecessária da perspectiva formal, resultou em duas novas definições de conjunto finito.

Palavras-chave: Definição. Finito. Formal. Pré-teórico. Teoria dos Conjuntos.

Abstract: *The formalization of pre-theoretical notions is not a science, but an art. This becomes evident when we have to decide what is indispensable and what is essential in the transition from the intuitive to the formal. I exemplify this type of difficulty with the formalization of an intuitive notion of a finite collection of objects. The observance of greater fidelity to the pre-theoretical notion, even if unnecessary from a formal perspective, resulted in two new definitions of finite set.*

Keywords: *Definition. Finite. Formal. Pre-theoretical. Set theory.*

Data de recebimento: 19/04/2020
Data de aceite: 07/10/2020
DOI: 10.23925/2316-5278.2020v21i2p300-306

"Um dia você aprende que não pode ter tudo o que quer..."

Mário Quintana

1 Introdução

Hansson (2000, p. 164) esclarece que o processo de formalização de noções pré-teóricas demanda duas etapas de idealização. Na primeira etapa nos movemos da linguagem comum, na qual a noção pré-teórica é expressa, para uma linguagem regimentada, na qual são fixadas, por exemplo, a categoria das variáveis utilizadas,

* Universidade Federal de Santa Maria – Santa Maria, RS, Brasil. Professor titular de lógica na UFSM. E-mail: ftsautter@ufsm.br.

o escopo dessas variáveis etc. Na segunda etapa nos movemos de uma linguagem regimentada para a uma linguagem lógica ou matemática. Hansson (2006, p. 20) sugere que esse processo de formalização requer um método de sucessivos melhoramentos, no qual a estreiteza ou a amplitude da noção formalizada em relação à noção pré-teórica é paulatinamente corrigida. Neste breve trabalho forneço um exemplo adicional da difícil arte de formalizar: o processo de formalização de uma noção pré-teórica de coleção finita de objetos. O exemplo abrevia uma etapa, desde que nos movemos diretamente da linguagem comum para a linguagem conjuntista, mas há diversos movimentos adicionais em direção a uma formalização mais fiel à noção pré-teórica dada. O exemplo sugere que é possível haver múltiplas implementações da mesma noção pré-teórica que não diferem quanto ao essencial, e que uma maior ou menor fidelidade à noção pré-teórica é consoante ao gosto do freguês.

2 A noção pré-teórica e sua formalização inicial

Winston Alarcón Athens (apud SAUTTER, 1995, p. 45ss.) propôs uma caracterização de coleção finita de objetos que captura a seguinte intuição: uma coleção de objetos é finita, se ela se esgota ao retirarem-se seus elementos um a um.[1] Essa caracterização é formalizada por Alarcón Athens, no âmbito da Teoria dos Conjuntos, mediante o seguinte par de definições:

Definição 1. A família F de subconjuntos de C é unitariamente decrescente se, e somente se, para todo conjunto não-vazio $G \in F$ existe um conjunto $H \in F$ tal que $H = G - \{g\}$ para algum $g \in G$.[2]

Definição 2. Um conjunto C é finito$_1$ se, e somente se, $\varnothing \in F$ para toda família não-vazia F de subconjuntos de C unitariamente decrescente.

Sautter (1995, p. 45) utiliza a seguinte construção para demonstrar que o conjunto dos números naturais N não é finito$_1$:

a) Para todo $n \in N$, $C_n = \{m \in N: m \geq n\}$
b) $F = \{C_n : n \in N\}$, ou seja, F é a coleção de segmentos finais da série dos números naturais em sua ordem habitual.

F é uma família não-vazia de subconjuntos de N unitariamente decrescente e é tal que $\varnothing$ F.

1 O mesmo não ocorre com uma coleção infinita de objetos? A resposta é negativa. Considere, por exemplo, o Hotel de Hilbert, uma edificação com infinitos pavimentos (EWALD; SIEG, 2013, p. 730): se retiramos o rés-do-chão, ainda há uma infinidade de pavimentos na nova edificação; se retiramos o rés-do-chão da nova edificação, ainda há uma infinidade de pavimentos; e assim por diante.

2 A definição original de Alarcón Athens não menciona o conjunto *C*. De fato, a menção de *C* é prescindível no *definiendum*, porque o *definiens* não o utiliza. Entretanto, essa definição é somente auxiliar à próxima definição e, naquela, *C* é utilizado no *definiendum*, o que justifica a decisão aqui adotada.

Uma caracterização intuitiva alternativa de coleção finita de objetos recorre ao acréscimo de objetos ao invés de decréscimo: uma coleção de objetos é finita, se ela é obtida ao apor um a um seus elementos.[3] Esta caracterização alternativa é formalizada por Alarcón Athens, no âmbito da Teoria dos Conjuntos, mediante o seguinte par de definições:

Definição 3. A família F de subconjuntos de C é unitariamente crescente se, e somente se, para todo conjunto $G \in F$, distinto de C, existe um conjunto $H \in F$ tal que $H = G \cup \{g\}$ para algum $g \in C - G$.[4]

Definição 4. Um conjunto C é finito_2 se, e somente se, $C \in F$ para toda família não-vazia F de subconjuntos de C unitariamente crescente.

Sautter (1995, p. 46) utiliza a seguinte construção para demonstrar que o conjunto dos números naturais N não é finito_2:

a) Para todo $n \in N$, $C_n = \{m \in N : m < n\}$
b) $F = \{C_n : n \in N\}$, ou seja, F é a coleção de segmentos iniciais da série dos números naturais em sua ordem habitual.

F é uma família não-vazia de subconjuntos de N unitariamente crescente e é tal que $N \notin F$.

Sautter (1995, p. 47-48) demonstra a equivalência das noções de finito_1 (Definição 2) e de finito_2 (Definição 4). Sautter (1995, p. 48-49) também demonstra a equivalência dessas duas noções de finito com a noção aritmética usual de finito,[5] prescindindo da utilização do Axioma de Escolha e, mesmo, de formas fracas do Axioma da Escolha.[6] Isso basta do ponto de vista formal. Entretanto, essas definições ainda não fazem justiça à caracterização intuitiva. Um exemplo ajudará a ilustrar a situação.

Seja o conjunto $C = \{a, b, c\}$ e a família $F = \{C, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \varnothing\}$ de subconjuntos de C. F é unitariamente decrescente (Definição 1) e também é unitariamente crescente (Definição 3). Consideremos a caracterização intuitiva de retirada, um a um, dos objetos de C. Começando com C em F, retiramos um objeto e obtemos… Aqui está o problema: retiramos c e obtemos {a, b}, mas se retiramos

3 O Hotel de Hilbert, por exemplo, não poderia ser edificado desse modo – edificar o rés-do-chão, apor um pavimento, apor outro pavimento, e assim por diante –, pois sempre teríamos apenas uma quantidade finita de pavimentos.

4 Aqui, ao contrário da definição de família de conjuntos unitariamente decrescente, a menção de *C* é imprescindível no *definiendum*, porque o *definiens* o utiliza.

5 Um conjunto é finito, no sentido aritmético usual, se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto e um segmento inicial da série dos números naturais, em sua ordem habitual (ver SAUTTER, 1995, p. 4).

6 Em rigor, Sautter (1995, p. 48-49) utiliza as noções de conjunto finito de Tarski e de Russell, cuja equivalência com a noção aritmética usual, prescindindo do Axioma da Escolha e, mesmo, de formas fracas do Axioma da Escolha, é bem conhecida na literatura. Que o Axioma da Escolha ou formas fracas dele sejam prescindíveis é um importante esclarecimento, porque não há um consenso entre os especialistas sobre a validade universal ou não do Axioma da Escolha e de formas fracas do Axioma da Escolha.

a obtemos {b, c}. Uma família de subconjuntos unitariamente decrescente admite múltiplas retiradas unitárias de um mesmo conjunto, mas isso é contrário ao espírito da caracterização intuitiva.[7]

3 Aperfeiçoando a formalização inicial

Uma aproximação melhor da caracterização intuitiva é dada pelo seguinte par de definições de conjunto finito:

Definição 5. A família F de subconjuntos de C é minimamente unitariamente decrescente se, e somente se, para todo conjunto não-vazio G ∈ F existe um único conjunto H ∈ F tal que H = G – {g} para g ∈ G.

Definição 6. Um conjunto é finito_3 se, e somente se, ∅ ∈ F para toda família não-vazia F de subconjuntos de C minimamente unitariamente decrescente.[8]

Definição 7. A família F de subconjuntos de C é minimamente unitariamente crescente se, e somente se, para todo conjunto G ∈ F, distinto de C, existe um único conjunto H ∈ F tal que H = G ∪ {g} para g ∈ C – G.

Definição 8. Um conjunto é finito_4 se, e somente se, C ∈ F para toda família não-vazia F de subconjuntos de C minimamente unitariamente crescente.[9]

Sautter (1995, p. 51-53) demonstrou a equivalência de finito_3 com a clássica definição de Dedekind, segundo a qual um conjunto é finito se, e somente se, não há correspondência biunívoca entre ele e qualquer de seus subconjuntos próprios. Essa demonstração prescinde do Axioma da Escolha e de formas fracas do Axioma da Escolha.[10]

As noções de finito_3 e finito_4 corrigem uma infidelidade à noção intuitiva, acima apontada, das noções de finito_1 e finito_2, respectivamente, mas ainda não fazem justiça à caracterização intuitiva de coleção finita de objetos, dada no início do trabalho. Um novo exemplo ajudará a esclarecer qual é o problema remanescente.

Seja novamente C = {a, b, c} e, dessa vez, a família F = {{b, c}, {b}, ∅} de subconjuntos de C. F é minimamente unitariamente decrescente (Definição 5). Consideremos a caracterização intuitiva de retirada, um a um, dos objetos de C. C não está em F e, portanto, sequer podemos iniciar o processo de retirada, um a um, de elementos de C, o que é contrário ao espírito da caracterização intuitiva.[11]

---

7 A mesma objeção pode ser levantada em relação à noção de família de subconjuntos unitariamente crescente.

8 Esta definição de conjunto finito é uma contribuição original de Sautter (1995).

9 Esta definição de conjunto finito também é uma contribuição original de Sautter (1995).

10 A adaptação da demonstração à prova da equivalência de finito_4 e finito no sentido de Dedekind não apresenta maiores dificuldades.

11 A mesma objeção pode ser levantada em relação à noção de família de subconjuntos minimamente unitariamente crescente. Por exemplo, $F = \{\{b\}, \{b, c\}, C\}$ é uma família de

4 Melhorando o aperfeiçoamento

Famílias de subconjuntos minimamente unitariamente decrescentes são casos particulares de famílias de subconjuntos unitariamente decrescentes, e famílias de subconjuntos minimamente unitariamente crescentes são casos particulares de famílias de subconjuntos unitariamente crescentes. O seguinte par de definições utiliza famílias de subconjuntos ainda mais restritas (e tão próximas quanto possível da noção pré-teórica), a saber, famílias de subconjuntos unitária, mínima e completamente decrescentes são casos particulares de famílias de subconjuntos minimamente unitariamente decrescentes, e famílias de subconjuntos unitária, mínima e completamente crescentes são casos particulares de famílias de subconjuntos minimamente unitariamente crescentes:

Definição 9. A família F de subconjuntos de C é unitária, mínima e completamente decrescente se, e somente se, $C \in F$ e para todo conjunto não-vazio $G \in F$ existe um único conjunto $H \in F$ tal que $H = G - \{g\}$ para $g \in G$.

Definição 10. Um conjunto C é finito_5 se, e somente se, $\varnothing \in F$ para toda família F de subconjuntos de C unitária, mínima e completamente decrescente.[12]

Definição 11. A família F de subconjuntos de C é unitária, mínima e completamente crescente se, e somente se, $\varnothing \in F$ e para todo conjunto $G \in F$, distinto de C, existe um único conjunto $H \in F$ tal que $H = G \cup \{g\}$ para $g \in C - G$.

Definição 12. Um conjunto C é finito_6 se, e somente se, $C \in F$ para toda família F de subconjuntos de C unitária, mínima e completamente crescente.[13]

Nada de essencial, do ponto de vista formal, ganha-se ou perde-se na comparação entre finito_1, finito_3 e finito_5, e entre finito_2, finito_4 e finito_6. Demonstrarei, a título de ilustração, a equivalência das definições de finito_3, que utiliza famílias de subconjuntos minimamente unitariamente decrescentes, e de finito_5, que utiliza famílias de subconjuntos unitária, mínima e completamente decrescentes:

Trivialmente, todo conjunto finito_3 também é finito_5, porque as famílias de subconjuntos unitária, mínima e completamente decrescentes são casos particulares de famílias de subconjuntos minimamente unitariamente decrescentes.

subconjuntos de $C = \{a, b, c\}$ minimamente unitariamente crescente, mas o processo de acréscimo de unidades não se inicia no espírito da caracterização intuitiva, ou seja, ele não se inicia com o conjunto vazio.

12 Ao contrário das definições anteriores, aqui não é exigido que a família seja não-vazia, porque isso já está imposto na definição de família unitária, mínima e completamente decrescente ao exigirmos que $C \in F$. Essa definição de conjunto finito é uma contribuição original deste trabalho.

13 Aqui também não é exigido que a família seja não-vazia, porque isso já está imposto na definição de família unitária, mínima e completamente crescente ao exigirmos que $\varnothing \in F$. Esta definição de conjunto finito também é uma contribuição original deste trabalho.

Fornecerei o esboço da demonstração, por contraposição, que todo conjunto finito$_5$ também é finito$_3$. Seja C um conjunto que não é finito$_3$, ou seja, há uma família não-vazia F de subconjuntos de C minimamente unitariamente decrescente tal que $\varnothing \notin$ F. Seja $A_F = \cup F$, ou seja, A_F é o conjunto dos elementos de C que ocorrem em algum subconjunto de F. F é uma família de subconjuntos de A_F unitária, mínima e completamente decrescente. Portanto, A_F não é finito$_5$. $A_F \subset C$, o que implica que C não é finito$_5$.

5 Considerações finais

Não é difícil demonstrar os seguintes resultados:

Teorema 1. Se C é um conjunto finito$_3$, então toda família de subconjuntos de C unitária, mínima e completamente crescente é unitária, mínima e completamente decrescente.

Teorema 2. Se C é um conjunto finito$_5$, então toda família de subconjuntos de C unitária, mínima e completamente decrescente é unitária, mínima e completamente crescente.

A lição que esses dois teoremas nos oferecem é que, embora tenhamos sido bem sucedidos em representar mudança (acréscimo ou decréscimo de elementos) mediante o imutável (conjuntos), a representação foi capaz de capturar o tempo sem ser capaz de capturar a seta do tempo, ou seja, dada simplesmente uma família de subconjuntos de C unitária, mínima e completa, não somos capazes de determinar se a intenção é descrever um acréscimo de elementos, a começar do conjunto vazio, ou um decréscimo de elementos, a começar de C. Essas duas últimas formalizações têm os seus limites, elas somente são capazes de nos oferecer uma visão, por assim dizer, *sub specie aeternitatis* daquilo que se passa. As primeiras definições, a despeito da não integralidade na captura da noção pré-teórica, tinham ao menos essa qualidade de diferenciar acréscimo de decréscimo, ao menos em alguns casos. Por exemplo, F = {{a, b, c}, {a, b}} é uma família de subconjuntos de {a, b, c} unitariamente crescente, mas não é unitariamente decrescente! A situação toda exemplifica uma cama de Procusto, ou, como disse o poeta: “Um dia você aprende que não pode ter tudo o que quer…”.

Referências

EWALD, William; SIEG, Wilfried (Eds.). David Hilbert’s lectures on the foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933. Berlin: Springer, 2013.

HANSSON, Sven Ove. Formalization in Philosophy. The Bulletin of Symbolic Logic, Cambridge, v. 6, n. 2, p. 162-175, Jun. 2000. DOI: https://doi.org/10.2307/421204.

HANSSON, Sven Ove. How to define: a tutorial. Princípios: revista de filosofia, Natal, v. 13, n. 19-20, p. 5-30, 2006. Disponível em: <https://periodicos.ufrn.br/principios/article/view/508/440.> Acesso em: 18 Abr. 2020.

SAUTTER, Frank Thomas. Definições de conjunto finito. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, SP. 1995. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/278861>. Acesso em: 18 Abr. 2020.