O QUE PODEMOS APRENDER COM AS RESOLUÇÕES "INCORRETAS"? UMA EXPERIÊNCIA COM SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

WHAT CAN WE LEARN FROM THE "INCORRECT" RESOLUTIONS? AN EXPERIENCE WITH SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

André Luis Trevisan[1]

Resumo

Este texto relata uma experiência envolvendo a análise de resoluções "incorretas" apresentadas por estudantes do 9º ano a uma tarefa que remete ao conteúdo sistemas de equações lineares, realizada por um grupo de professores participantes de um grupo de estudos. O foco reside nas aprendizagens que decorreram dessa ação, em especial no que diz respeito à"(re)invenção", pelo grupo em tela, de estratégias aritméticas para a resolução de sistemas lineares. O exame da produção escrita levou tanto à formulação de hipóteses a respeito das dificuldades daqueles estudantes, quanto à motivação dos professores em incorporar as aprendizagens realizadas a partir delas às suas práticas.

Palavras-chave: *ensino de Matemática; análise da produção escrita; intervenção.*

Abstract

This text reports an experiment involving the analysis of "incorrect" resolutions presented by students from 9th grade to a task that refers to the content of linear equations, performed by a group of teachers participating in a study group. The focus lies in the learning that took place in this action, in particular with regard to "(re)invention", by the group, of arithmetic strategies for solving linear systems. Examination of the written production has led to the formulation of hypotheses about the difficulties of those students, and to the motivation of teachers to incorporate what they have learned from them to their practices.

Keywords: *Mathematics teaching; writing production analysis; intervention.*

Introdução

Este texto é o relato de uma experiência vivenciada no âmbito de um grupo de estudos coordenado pelo autor, do qual participam professores que ensinam Matemática

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática - UEL. Professor do Departamento de Matemática e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – UTFPR – Londrina/PR, e-mail: andrelt@utfpr.edu.br.

nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio, em escolas públicas de um município do interior do estado do Paraná, região metropolitana de Londrina[2].

Tal grupo vem se reunindo desde 2013. Juntos, trocam suas experiências, planejam suas aulas conjuntamente e analisam tarefas e instrumentos de avaliação a serem aplicados em suas salas de aula. A partir de tematizações da própria prática, especialmente examinando produções escritas de seus estudantes, formulam hipóteses a respeito de dificuldades por eles apresentadas, buscando formas de incorporar essas análises às suas práticas.

A cada semestre, um tema gerador de discussões é proposto; alguns docentes acabaram por participar por apenas um ou dois semestres, enquanto outros permanecem desde o início da proposta. No ano de 2015 participaram do grupo quatro professores, que permanecem desde 2013, com idades (à época do início do projeto), compreendidas entre os 32 e os 56 anos, apresentando experiências docentes que variam entre os sete e os 20 anos de ensino, todos licenciados em Matemática, com formação em nível de pós-graduação, sendo um deles mestre.

Nos dois semestres desse ano, o tema gerador foi "pensamento algébrico". A escolha justifica-se pelas inquietações dos professores participantes acerca das dificuldades apresentadas por seus estudantes no desenvolvimento do pensamento algébrico, na manipulação da linguagem algébrica e no lidar com situações que envolvem a álgebra como linguagem para representar a generalização de padrões.

Como desencadeadoras de discussões, foram propostas leituras de Bianchini e Machado (2010), Cury e Bortoli (2011) e Silva e Savioli (2014), além do estudo de Kindt (2004)[3]. Esse último consiste em uma coletânea de tarefas para o trabalho com álgebra, organizadas, segundo o autor, com a intenção de desafiar os estudantes a pensar e raciocinar. Os conteúdos subjacentes às tarefas propostas são, no Brasil, usualmente são trabalhados entre o 7º e o 9º anos do ensino fundamental.

Segundo Kindt (2004), as queixas sobre a falta de habilidade algébrica elementar não são infundados, e é frequente a falta de confiança dos estudantes em usar álgebra.

---

[2] Ação decorrente de projetos de extensão, desenvolvidos em paralelo com o projeto de pesquisa "Avaliação da aprendizagem em ensino de Ciências da Natureza e Matemática", aprovado em Edital da Fundação Araucária (Conv. 386/2012), ambos coordenados pelo autor deste texto. Os encontros ocorrem na própria escola na qual os professores atuam, em horário comum de duas horas-atividade dos participantes.

[3] Trata-se de uma coletânea de tarefas inspirada em ideias da abordagem conhecida como Educação Matemática Realística (para maiores detalhes, consultar Trevisan (2013)), que teve como precursor o matemático naturalizado holandês Hans Freudenthal (1905 – 1990). Martin Kindt é docente do Instituto Freudenthal, em Ultrecht, Holanda (http://www.uu.nl/staff/MKindt/).

Para ele, esse déficit pode, em parte, ser atribuído à didática orientada à reprodução; sem a pretensão de ter uma solução pronta, o que o autor propõe é “lançar algumas ideias que poderiam envolver o estudante de forma mais ativa no processo de ensino e, consequentemente, lhe dariam mais oportunidade de utilizar a álgebra, de forma adequada, em situações apropriadas” (KINDT, 2004, p. 4, tradução nossa).

Os professores participantes mostraram-se bastante interessados em resolver as tarefas propostas no livro, inclusive selecionando várias delas para utilizar em suas turmas (do 6º ao 9º ano do ensino fundamental, e também no EJA). Uma proposta de trabalho na qual o grupo está empenhado no momento é a tradução para o português dessas tarefas, fazendo as adaptações que julgam necessárias e organizando sugestões de encaminhamento para o trabalho em sala de aula.

Por tratar-se de sequências de tarefas que podem ser propostas a grupos de estudantes sem a necessidade de uma “aula expositiva” ou precedidas de exemplos similares, instigam o professor a assumir um papel diferente: ao invés de sempre fornecer explicações, é convidado a incentivar os alunos a apresentar e discutir suas ideias. Os estudantes, por sua vez, trabalham sempre que possível em pequenos grupos e participam de discussões matemáticas, mostrando, explicando, justificando suas ideias (PALHA et al., 2013).

Figura 1 – Tarefa proposta aos estudantes.

Fonte: Kindt (2004, p. 25).

Apresentamos aqui o relato do processo de analisar soluções “incorretas” a uma dessas tarefas (Figura 1), que remete ao conteúdo sistemas de equações lineares, ocorrido ao longo de dois encontros do grupo de estudos. Nosso foco reside nas aprendizagens que decorreram dessa ação, em especial no que diz respeito à “(re)invenção” de estratégias aritméticas para a resolução de sistemas lineares, a partir do planejamento feedback para a produção escrita dos estudantes na tarefa.

O planejamento de ações de feedback e intervenção

É uma constante nas discussões realizadas no grupo o planejamento de ações de feedback (retorno) das tarefas realizadas pelos estudantes. A partir da análise de sua produção escrita, são vários os encaminhamentos possíveis.

Cury e Bortoli (2011), por exemplo, apontam algumas sugestões: a) partir dos equívocos cometidos pelos estudantes e criar tarefas nas quais sejam desafiados a retomar os conteúdos nos quais apresentam dificuldades; b) utilizar jogos para retomar procedimentos, regras ou cálculos algébricos; c) apresentar listas de tarefas cujas soluções apresentam algum equívoco e solicitar aos estudantes o reconhecimento do mesmo e a possibilidade de corrigir. Carvalho e Ponte (2014) propõe a criação de tarefas que proporcionem o aparecimento de equívocos comumente observados em tarefas escritas, enquanto Vaz e Nasser (2015) sugerem fomentar momentos de discussão coletiva na qual os estudantes identifiquem equívocos nas resoluções dos colegas.

Já Trevisan e Mendes (2015) propõem, como estratégia de feedback, a elaboração de questionamentos/apontamentos por escrito, propostos com a intenção de levar o estudante a ajustar/aprimorar/modificar a resolução apresentada. O trabalho desenvolvido pelos autores fez uso de um instrumento de avaliação que denominaram *prova em fases*:

> [...] uma prova escrita, resolvida individualmente e em sala de aula, contendo questões associadas aos objetivos de aprendizagem a serem explorados ao longo de determinado espaço de tempo (um bimestre, um semestre, um ano), a qual os estudantes tem acesso desde a primeira fase (portanto, antes mesmo das aulas na qual serão explorados tais objetivos). Os próprios estudantes podem reconhecer/escolher quais questões resolver em cada fase podendo alterar as resoluções, nas etapas subsequentes, sempre que julgarem necessário (TREVISAN; MENDES, 2015, p. 52).

Ao discutir a questão do planejamento de ações de intervenção nesse contexto de avaliação, esses autores apontam que esse “deve ser uma constante na prática pedagógica do professor, não restringindo (porém englobando) episódios de avaliação, mas sendo ampliada por meio da prática do trabalho em equipes" (TREVISAN; MENDES, 2015, p. 53).

Uma experiência envolvendo uma tarefa similar à apresentada na Figura 1 (envolvendo o preço de uma saia e uma blusa) foi desenvolvida por Pires (2013), junto a um grupo de professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais. A tarefa, apresentada no contexto de uma prova em fases, foi o "estopim" para um processo de (re)invenção guiado pelo pesquisadora, na qual as participantes foram estimuladas a utilizar sua própria produção escrita como ponto de partida.

Sob essa ótica, resoluções "incorretas" são vistas "não como algo que o estudante ainda não sabe, mas como indícios de um conhecimento parcial, como um elemento inerente ao processo de construção do conhecimento, como um caminho na busca do acerto para reconstruir o que não foi aprendido" (TREVISAN; MENDES; SOUZA, 2015, p. 103).

É fundamental ter em mente também que, quando

> [...] no desenvolvimento de uma tarefa, o aluno parte de hipóteses erradas, o feedback torna-se eficaz quando, durante o processo de resolução, consegue levar o aluno não só a conseguir rejeitar essas hipóteses, mas também no desenvolvimento de estratégias mais eficientes que permitam entender a informação dada (DIAS; SANTOS, 2010, p. 127).

Na tarefa de compreender a produção do estudante e elencar ações de feedback (seja por meio da proposição de novas tarefas, da organização de momentos de discussões coletiva ou na elaboração de questionamentos/apontamentos escritos), o próprio grupo vivenciou momentos de aprendizagens. Em especial, relatamos aqui um desses episódios, desencadeado pela produção escrita que duas duplas de estudantes apresentaram à tarefa em tela.

A tarefa proposta e análise de sua produção escrita

A tarefa em tela foi proposta a duas duplas de estudantes de uma turma de 9º ano na qual uma das professoras participantes ministrava aulas. A professora optou por apresentar a tarefa com formatação idêntica à apresentada em Kindt (2004), inclusive mantendo a pergunta em inglês ("How long?" – Quanto custa?), visto que os estudantes poderiam consultar um dicionário pelo celular, se necessário, e também mantendo o preço dos itens em euro. Na percepção da professora, tal fato não mostrou qualquer obstáculo à compreensão da questão pelos estudantes. As resoluções dos estudantes foram recolhidas e apresentadas aos professores participantes do grupo de estudos para que fossem analisadas e problematizadas.

Embora a esses estudantes já tivessem sido apresentados métodos para resolução de sistemas de equações lineares (comparação, adição e substituição) durante o 7º e 8º anos, a análise de sua produção escrita indicou que nenhum deles recorreu à linguagem simbólica algébrica ou a algum destes métodos na resolução da questão em tela.

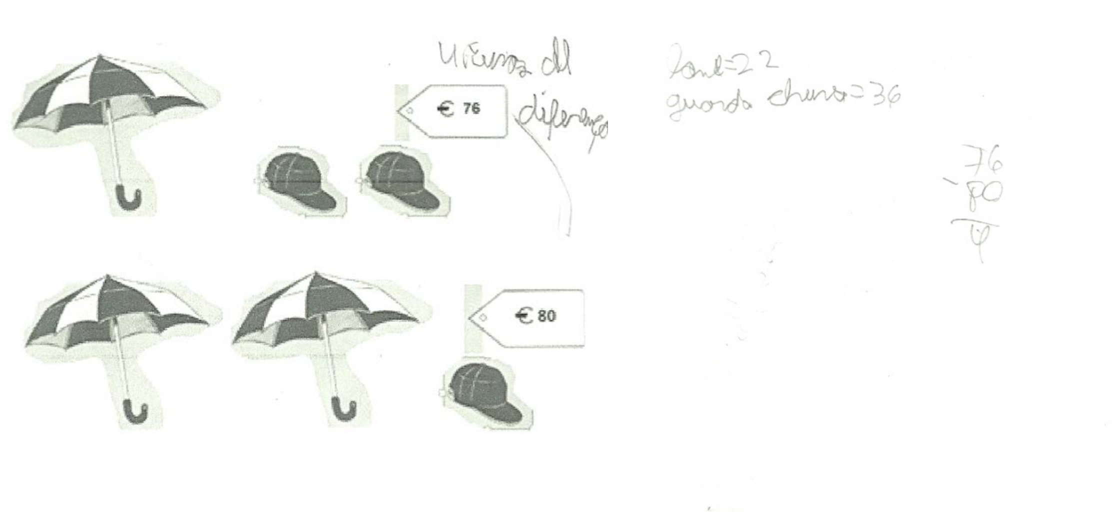
Talvez o modo de “entrada” na álgebra, para esses estudantes, possivelmente tenha se distanciado dos elementos concretos, e ela tenha sido “vista como jogo de símbolos de difícil compreensão”, significando um “momento de ruptura com a matemática”, e deixando de ter significado (FREITAS, 2015, p. 657). Apoiados nos estudos de Vergnaud, Freitas (2015, p. 661) aponta que “a álgebra apresenta para os alunos uma dupla ruptura epistemológica, de um lado por causa da introdução de um desvio formal e, de outro, pela introdução de novos objetos matemáticos”, o que faz com que um grande número de alunos permaneça “ligados às práticas de resolução aritmética”. Tal fato foi observado na produção escrita dos estudantes em tela: embora a grande maioria tenha obtido a resposta “esperada”, uma análise de suas produções indicou que eles pareciam ter usado a “tentativa e erro” para chegar a ela.

Isso não significa, entretanto, que em suas resoluções não haja manifestação do pensamento algébrico, uma vez que esses estudantes “utilizaram notações as quais criaram como ferramentas a fim de resolverem as tarefas propostas, bem como produziram relações e atribuíram significados para os conceitos a partir do que já sabiam” (SILVA; SAVIOLI, 2014, p. 154).

Não é nosso objetivo neste trabalho analisar a produção escrita dos estudantes sob a ótica do pensamento algébrico manifestado, mas, como mencionado anteriormente, discutir as aprendizagens que decorreram do planejamento de ações de feedback para resoluções que, num primeiro momento, pareciam estar “incorretas”.

Silva e Savioli (2015) destacam que uma resolução “incorreta” pode evidenciar características de pensamento algébrico, fato que ocorreu em algumas das produções escritas investigadas por essas autoras e também naquelas que discutiremos a seguir. As duas resoluções apresentadas (Figuras 2 e 3 – resolução 1 e 2, respectivamente) foram escolhidas por conta da “riqueza” das discussões que geraram no grupo de estudos.

Figura 2 – Resolução 1.



Fonte: produção escrita dos estudantes.

Figura 3 – Resolução 2.

Fonte: produção escrita dos estudantes.

Embora a notação utilizada para a “conta armada” esteja incorreta, a resolução 1 evidencia que os estudantes reconheceram que o guarda-chuvas é mais caro que o boné, e a quantidade 4 euros como sendo o quanto o guarda-chuvas é mais caro que o boné (fato 1).

Na segunda resolução encontramos três operações. Qual seria o significado de cada um dos resultados: 156, 52 e 26? O primeiro indica o preço de “todos” os produtos juntos: três guarda-chuvas e três bonés. O segundo, o preço de “um par” de produtos: um guarda-chuva e um boné, juntos, custam 52 reais. O terceiro é o preço médio de cada produto (fato 2). Como instigar cada dupla de estudantes a prosseguir sua resolução, partindo dessas constatações? Para facilitar nossa discussão, elas são destacadas no Quadro 1.

Quadro 1 – Algumas constatações presentes nas resoluções “incorretas”.

Fato 1	O guarda-chuvas é quatro euros mais caro que o boné.
Fato 2	O preço médio de cada produto é 26 euros

Fonte: autor.

O que as resoluções “incorretas” possibilitaram aprender

Uma ação proposta pelo grupo de professores foi instigar a dupla de estudantes que apresentou a resolução 1 a combinar o fato 1 com, por exemplo, a informação que o preço de um guarda-chuva mais dois bonés é 76 euros. Isso permite concluir que o preço de três bonés é, então, 72 euros e, portanto, cada boné custa 24 euros. Outra proposta seria, na tentativa e erro, porém de uma maneira sistematizada, encontrar dois números tais que “um valor mais duas vezes o outro (sendo esse quatro a mais que o primeiro) é 80”(Quadro 2).

Quadro 2 – Tentativa e erro sistematizada.

Primeiro número	Segundo Número (4 a mais que o primeiro)	Primeiro mais duas vezes o segundo	Verificação
20	24	20 + 24 + 24 = 68	✗
26	30	26 + 30 + 30 = 86	✗
24	28	24 + 28 + 28 = 80	✓

Fonte: autor.

De maneira análoga, poderíamos tomar que o preço de dois guarda-chuvas mais um boné é 80 euros; sendo o boné 4 euros mais barato que o guarda-chuva (recíproca do fato 1), então três guarda-chuvas custam 84 euros. O preço de um guarda-chuva é 28 reais.

Como forma de “ilustrar” essas descobertas, propõe organizar as informações constantes no enunciado da questão em um quadro[4] (Quadro 3).

Quadro 3 – Dados da tarefa.

		Quantidade de bonés			
		0	1	2	3
Quantidade de guarda-chuvas	0				
	1			76	
	2		80		
	3				

Fonte: autor.

A apresentação dos dados na tarefa nesse formato facilitou a descoberta de alguns padrões entre os professores:

i) a diferença entre elementos consecutivos da diagonal principal é constante e, nesse caso, igual a 4.

ii) o problema estará resolvido se conseguirmos “chegar” à posição na qual a quantidade de um dos itens seja igual a zero. Assim, subtraindo 4 de 76, concluímos que 3 bonés e 0 guarda-chuvas custam 72 euros (ou, similarmente, 3 guarda-chuvas e 0 bonés custam 84 euros). Isso permite concluir que o guarda-chuva custa 28 euros, e o boné 24 euros.

iii) também resolveríamos facilmente o problema se nos fossem dadas suas informações que, quanto colocadas no quadro, ocupassem uma mesma linha, ou uma mesma coluna.

Seriam as constatações válidas para todo sistema de equações lineares? Na busca de validar as próprias hipóteses, demo-nos[5] conta de que sim! Todas eram consequência de um fato que havia sido percebido por aqueles estudantes, e portanto instigá-los a descobri-las mostrou-se um feedback interessante a ser oferecido a eles. Mais do que isso, professores que estavam ministrando aulas nos 6º, 7º e 8º anos, ou mesmo no Ensino Médio, sentiram-se motivados a explorar a “riqueza” presente em situações como essa. Na verdade, “(re)inventar” outras estratégias para resoluções de sistemas lineares,

[4] Tal proposta foi motivada por um estudo anterior do grupo envolvendo o reconhecimento de padrões em tiras e quadros numéricos (ver Kindt (2004), páginas 29 a 35), bem como experiência vivenciada pelo autor e coordenador do grupo de estudos durante participação em oficina ministrada pelo professor Martin Kindt, no *Summer School - Mathematics and Science Education* (Utrecht University, 2013).

[5] Coloco-me aqui como um participante das discussões que também se sentiu “encantado” com as “descobertas” realizadas conjuntamente.

diferentes daquelas usualmente apresentadas em livros didáticos, reforça a possibilidade apontada pela literatura da elaboração do pensamento algébrico inclusive nos anos iniciais do ensino fundamental, visto que tal forma de pensamento não requer necessariamente a apresentação de uma linguagem simbólica algébrica (SILVA; SAVIOLI, 2014).

No que diz respeito ao fato 2, compreender seu significado foi uma “pista” na direção de elaborar uma estratégia para resolver a tarefa: se cada produto custa, em média, 26 euros, pode-se, num primeiro momento, supor que todos custam 26 reais, como mostrado na segunda linha do Quadro 4 (1ª hipótese). Tal hipótese implica que juntos, um guarda-chuva e dois bonés custariam 78 euros, superior ao valor correto, 76 euros.

Quadro 4 – Hipóteses para resolução da tarefa.

						
1ª hipótese	26	26	26	26	26	26
2ª hipótese	27	27	27	25	25	25
3ª hipótese	28	28	28	24	24	24

Fonte: autor.

Um ajuste possível seria, então, “subir” o preço do guarda-chuva e “baixar” o do boné, ambos em 1 euro, o que nos leva à terceira linha da tabela (2ª hipótese). Ainda não daria certo, porém mais um ajuste nessa direção leva à solução procurada (3ª hipótese).

Numa busca de transpor as descobertas para sistemas lineares com outras “estruturas”, o grupo ajustou os dados originais com vistas a construir um novo problema, mais elaborado que o original. Alguns ajustes foram sendo realizados:

- a diferença entre as equações não deixaria explícito qual dos produtos era mais o caro (na tarefa da Figura 1, apenas pelos dados apresentados, podemos concluir que o guarda-chuvas é mais caro);
- a soma das equações não resultaria em “quantidades iguais” de objetos (como ocorreu anteriormente: três guarda-chuvas e três bonés juntos custam 156 euros);
- a representação dos dados ao quadro similar ao Quadro 3 não resultaria em informações que estivessem na mesma linha ou na mesma coluna.

Atendidas tais condições, chegou-se ao seguinte sistema de equações: $\begin{cases} 3x + y = 74 \\ 2x + 5y = 123 \end{cases}$, representado no Quadro 5.

Quadro 5 – Dados da nova tarefa.

	Quantidade de bonés (x)				
Quantidade de guarda-chuvas (y)		0	1	2	3
	0				
	1				74
	2				
	3				
	4				
	5			123	

Fonte: autor.

Nesta nova tarefa, não é óbvio qual produto tem maior valor. Além disso, não temos mais valores em posições consecutivas da diagonal principal, nem mesmo valores que ocupam ou a mesma linha, ou a mesma coluna. Chegar a uma dessas configurações é uma estratégia possível para resolver o problema.

Para isso, podemos trabalhar com equivalências das equações originais. Se 3 bonés e um guarda-chuvas juntos custam 74 euros, então 6 bonés e 2 guarda-chuvas custam 148 euros. Se 2 guarda-chuvas e 5 bonés custam 123 euros, então 6 guarda-chuvas e 15 bonés custam 369 euros. Isso nos leva a uma ampliação no quadro original (Quadro 6).

Quadro 6 – Quadro ampliado a partir dos dados da nova tarefa.

	Quantidade de bonés (x)							
Quantidade de guarda-chuvas (y)		0	1	2	3	4	5	6
	0							
	1							
	2							148
	3							
	4							
	5							
	6							
	7							
	8							
	9							
	10							
	11							
	12							
	13							
	14							
	15							369

Fonte: autor.

Nessa nova configuração (que nada mais é que um esquema de equivalências entre equações lineares, utilizado no método da adição), temos que um aumento de 13 guarda-chuvas implica em um gasto de 369 – 148 = 221. Então, cada guarda-chuvas custa 17 euros e, portanto, cada boné custa 19 euros. E, *vòila*, o problema está resolvido (e, melhor disso tudo, essa técnica serve para resolução qualquer outro sistema linear com duas equações e duas incógnitas – ou mesmo com três, desde que utilizada uma representação tridimensional).

Para finalizar

Infelizmente, não há dados que nos permitam avaliar as ações planejadas como feedback para aquelas duplas de estudantes que apresentaram soluções "incorretas" para a tarefa em tela. Em função de um longo período de greve nas escolas públicas estaduais do estado do Paraná no ano de 2015, houve um entendimento do grupo que não faria muito sentido retomar tal tarefa após tanto tempo.

Felizmente, a experiência vivenciada no grupo foi "rica" o suficiente pelas discussões que gerou e aprendizagens que oportunizou aos envolvidos. O exame da produção escrita dos estudantes, em especial de resoluções tidas como "incorretas" (mas que na verdade estavam, talvez, incompletas) levou tanto à formulação de hipóteses a respeito das dificuldades daqueles estudantes e planejamento de ações de feedback que levassem em conta o que eles mostravam saber, quanto à motivação dos professores em incorporar as aprendizagens realizadas a partir delas às suas práticas.

Parafraseando Freitas (2015), reconhecemos que, embora a álgebra seja uma ferramenta potente na resolução de inúmeros problemas, sua introdução no mundo do estudante não é uma tarefa simples. Nesse sentido, seu ensino deve priorizar o desenvolvimento do pensamento algébrico, em detrimento da simples manipulação algébrica de símbolos. Reconhecemos que explorar estratégias aritméticas de resolução de sistemas lineares, como as discutidas neste texto, pode contribuir para esse desenvolvimento.

Esperamos assim que este relato tanto traga contribuições para a pesquisa em ensino da Matemática, em especial no que tange ao conteúdo sistemas de equações lineares, quanto instigue professores a Educação Básica a buscarem nas resoluções "incorretas" de seus estudantes oportunidades para novas aprendizagens.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio financeiro recebido da Fundação Araucária (Convênio 386/2012), bem como a disponibilidade dos professores envolvidos e da escola parceira deste projeto.

Referências

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. (2010). A Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n. 2, p. 354-368. Disponível em <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4198/3310>. Acesso em 02 dez. 2015.

CARVALHO, R.; PONTE, J. P. da (2014). O papel das tarefas no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental com números racionais. In: PONTE, J. P. da (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.** 1.ed. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p. 31-56. Disponível em <http://www.ie.ulisboa.pt/portal/page?_pageid=406,1852906&_dad=portal&_schema=PORTAL>. Acesso em 02 dez. 2015.

CURY, H. N.; BORTOLI, M. de F. (2011). Pensamento algébrico e análise de erros: algumas reflexões sobre dificuldades apresentadas por estudantes de cursos superiores. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Rio de Janeiro, v. 1, n.1, p. 101-113. Disponível em <http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/viewFile/1594/773>. Acesso em 02 dez. 2015.

DIAS, S.; SANTOS, L. (2010). O feedback e os diferentes tipos de tarefas matemáticas. In: Seminário de Investigação em Educação Matemática. 21, 2010, Aveiro. **Anais...** Aveiro: Universidade de Aveiro, p. 126 – 136. Disponível em <http://area.fc.ul.pt/pt/Encontros%20Nacionais/S.Dias%26L.Santos,SIEM%20(2010)%20Actas.pdf>. Acesso em 02 dez. 2015.

FREITAS, J. L. M. de (2015). Reflexões e questionamentos sobre a pesquisa em Educação Algébrica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.17, n. 3, p. 655-665. Disponível em <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25808/18460>. Acesso em 02 dez. 2015.

KINDT, M. (2004). **Positive Algebra**: a collection of productive exercises. Utrecht: Freudenthal Instituut. Disponível em <http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=4&supportId=1526>. Acesso em 02 dez. 2015.

PALHA, S.; DEKKERA, R.: GRAVEMEIJER, K.; VAN HOUT-WOLTERSA, B. (2013). Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. **The Journal of Mathematical Behavior**, Springer, v. 32, p. 141-159.

PIRES, M. N. M. (2013). **Oportunidade para aprender***:* uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases. Tese em doutorado em Ensino de Ciências e Educação

Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina. Disponível em <http://www.uel.br/pos/mecem/arquivos_pdf/MAGNA.pdf>. Acesso em 02 dez. 2015.

SILVA, D. P. da; SAVIOLI, A. M. P. das D. (2014). Manifestações do pensamento algébrico em resoluções de tarefas por estudantes do ensino fundamental I. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.3, n.5, p. 139-156. Disponível em <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/921/pdf_100>. Acesso em 02 dez. 2015.

TREVISAN, A. L. (2013). **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Disponível em <http://www.uel.br/pos/mecem/arquivos_pdf/trevisan.pdf>. Acesso em 02 dez. 2015.

TREVISAN, A.; MENDES, M. T. (2015). Avaliação da aprendizagem matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 45, p. 22-29.

TREVISAN, A.; MENDES, M. T.; SUZA, T. da S. (2014). Quando a avaliação torna-se uma ação de investigação e intervenção: produções matemáticas de estudantes do 7º ano em uma prova em fases. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.4, n.6, p. 103-117. Disponível em <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/934/pdf_111>. Acesso em 02 dez. 2015.

VAZ, R. F. N.; NASSER, L.; BELFORT, E. (2015). Alunos analisando suas próprias soluções: Adição de Frações. **Boletim Gepem** (Online), n.65, p. 1-17.