TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

GRAPH THEORY IN HIGH SCHOOL: AN APPROACH THROUGH PROBLEM SOLVING

TEORÍA DE GRAFOS EN LA ESCUELA SECUNDARIA: UNA APROXIMACIÓN A TRAVÉS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Gerson Pastre de Oliveira

Jefferson Ricart Pezzeta

RESUMO

A resolução de problemas tem sido objeto de estudos e pesquisas no sentido de definir estratégias que facilitem sua adoção nas escolas. Deste ponto de vista, a investigação relatada neste artigo, efetuada tendo como sujeitos um grupo de estudantes do Ensino Médio, utiliza a Teoria dos Grafos como base para a criação de oficinas destinadas a resolver problemas típicos, envolvendo, além dos conceitos básicos da referida teoria, tópicos que abordam questões relativas a percursos econômicos, coloração, contagem, entre outros, no âmbito da Matemática, proporcionando meios para que o aluno estruture e modele o pensamento e as ações de resolução. As reflexões e observações dos sujeitos são trazidas ao longo deste texto, favorecendo análises que levaram em conta as dificuldades dos mesmos na resolução de problemas e as possibilidades abertas pela teoria dos grafos nas formalizações solicitadas. O suporte teórico foi completado com ideias de autores como Polya e Brousseau (teoria das situações didáticas), com significativas participações no embasamento das oficinas e das estratégias aplicadas na elaboração das sequências empregadas.

Palavras-chave: *Resolução de Problemas. Teoria dos Grafos. Teoria das Situações Didáticas. Matemática Discreta.*

ABSTRACT

Problem solving has been the subject of studies and research in order to define strategies to facilitate its adoption in schools. From this point of view, the research reported in this paper, taking as participants a group of high school students, uses the graph theory as a basis for the creation of workshops aimed at solving typical problems involving, beyond to the basic concepts of this theory, topics that address issues related to economic paths, coloring, counting, among others, in the context of mathematics, providing a means for the student to structure and shape the thinking and actions of resolution. Reflections and observations of the subjects are brought throughout this text, favoring analyzes that took into account the difficulties in solving the problems and the possibilities opened by the graph theory in formalizations requested. The theoretical support was supplemented by ideas of authors like Polya and Brousseau (theory of didactic situations), with significant holdings in the construction of workshops and of strategies applied in the preparation of the sequences employed.

***Keywords**: Problem solving. Graph Theory. Theory of Didactic Situations. Discrete Mathematics.*

RESUMEN

La resolución de problemas ha sido objeto de estudios e investigaciones con el fin de definir estrategias para facilitar su adopción en las escuelas. Desde este punto de vista, la investigación en este trabajo,que tuvo como participantes un grupo de estudiantes de secundaria, utiliza la teoría de grafos, como base para la creación de talleres dirigidos a resolver los problemas típicos que involucran, además de los conceptos básicos de esta teoría, temas que abordan cuestiones relacionadas con los caminos económicos, coloración, contaje, entre otros, en el contexto de las matemáticas. Estos temas proporcionan un medio para que el estudiante estructurar y dar forma al pensamiento y las acciones de la resolución. Reflexiones y observaciones de los sujetos fueran trabajadas a lo largo de este texto, lo que favorece los análisis que tuvieron en cuenta las dificultades para resolver los mismos problemas y las posibilidades abiertas por la teoría de grafos en formalizaciones solicitados. El soporte teórico se complementa con las ideas de autores como Polya y Brousseau (teoría de las situaciones didácticas), con participaciones significativas en la creación de los talleres y de las estrategias aplicadas en la preparación de las secuencias empleadas.

Palabras clave: *Resolución de Problemas. Teoría de Grafos. Teoria de las Situaciones Didácticas. Matemática Discreta.*

Introdução

Este trabalho traz parte dos resultados de uma investigação, cujos resultados culminaram na dissertação de mestrado profissional em Educação Matemática de um dos autores, com foco na resolução de problemas a partir da construção de situações didáticas, tendo por perspectiva de trabalho algumas aplicações advindas da teoria dos grafos.

Desta maneira, os autores que formam os principais sustentáculos do referencial teórico desta pesquisa são Brousseau (1986), por meio de sua teoria das situações didáticas (TSD), e Polya (2006), cujo trabalho foi pioneiro em relação à resolução de problemas. Os elementos relativos à teoria dos grafos foram empregados como tema principal dos problemas elaborados no âmbito da pesquisa aqui descrita, e que foram submetidos a um grupo de alunos do ensino básico de uma escola particular da cidade de São Paulo.

Em relação ao assunto central da investigação exposta neste texto, estabelecer estratégias para resolução de problemas tem sido um grande desafio para os educadores. A LDB enfatiza a necessidade do trabalho didático neste sentido, designando, inclusive, um capítulo específico, denominado “Resolução de Problemas e o Ensino

Aprendizagem da Matemática” (Brasil, 1996, p.39-x). A atenção às situações ligadas ao cotidiano também é destacada no mesmo documento, com a recomendação de “ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas” (Brasil, 1996, p.20).

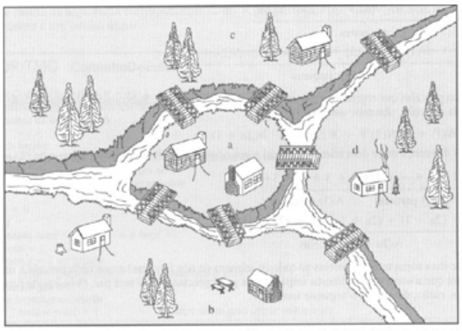
A investigação, argumentação, comprovação, o estímulo à criatividade e a iniciativa pessoal também ocupam papéis de destaque. A LDB indica uma preocupação com técnicas e estratégias de resolução de problemas, buscando adequá-las aos ambientes de vivência do aluno, estimulando-o a pensar e criar seus caminhos, de modo que o mesmo possa desenvolver um sentido autônomo na capacidade de solucionar tais desafios. Neste sentido, indica o referido documento:

> Para atender as demandas do trabalho contemporâneo, é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender Matemática na sala de aula. Também o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo favorecem o desenvolvimento dessas capacidades (Brasil, 1998, p. 34)

Desta forma, uma série de poderiam servir de base para um trabalho didático que viesse a explorar a resolução de problemas em sala de aula. Para este estudo, conforme mencionado, elegeu-se a teoria dos grafos como base para os objetos matemáticos de referência. Esta escolha pode ser justificada pelo ineditismo desta teoria para os sujeitos da pesquisa, o que representou um elemento facilitador para a eleição de problemas que estimulassem o trabalho investigativo dos estudantes.

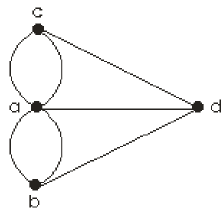
Assim, em relação à teoria dos grafos, cujas primeiras ideias podem ser encontradas nos trabalhos de Lehonard Euler (Gersting, 2001), por meio do conhecido problema das pontes de Königsberg (Figura 1(a) refere-se ao problema examinado por Euler; Figura 1(b) diz respeito à proposta do grafo respectivo), pode-se dizer que a mesma foi sendo sistematizada a partir de abordagens advindas de pesquisas quase sempre motivadas por questões práticas, como a descoberta de rotas mais rápidas, percursos mais curtos, gasto mínimo de conexões, entre outras propostas, configuradas como problemas sobre os quais os matemáticos se debruçaram.

Figura 1a. **O problema das pontes de Königsberg**



Fonte: Adaptado de Gersting, 2001, p. 297

Figura 1b. **Grafo relativo ao problema das pontes de Königsberg**



Fonte: Adaptado de Gersting, 2001, p. 297

Uma vez criada a interface de abordagem para determinadas questões, então, a própria teoria pode funcionar como ferramenta para a modelagem e resolução de problemas, como campo teórico da Matemática Discreta. De outra forma, o uso da teoria dos grafos com finalidades didáticas se consolidou primeiro como disciplina em si, prevista em diversos currículos de Ciência da Computação, por exemplo, ou inserida na disciplina Matemática Discreta neste mesmo nível de ensino.

Assim, a teoria dos grafos, traz uma série de problemas típicos, que podem fomentar, por meio de uma estratégia didática adequada por parte dos professores, o desenvolvimento de habilidades importantes e desejáveis para alunos do ensino médio: modelar problemas por meio de grafos, explorar questões do ponto de vista da existência ou não de soluções, conjecturar sobre as condições gerais de uma determinada resolução.

Entre os problemas típicos constam, por exemplo, a determinação de rotas mais curtas e trajetos mais eficientes a partir de certos percursos. Evidentemente, existem algoritmos já desenvolvidos para problemas desta natureza – para a questão dos caminhos mínimos em grafos, por exemplo, podem ser exploradas as resoluções propostas por Dijkstra ou Floyd (Gersting, 2001), que preveem o armazenamento do grafo como estrutura matricial e sua manipulação através de estratégias baseadas em tabelas de valores decrescentes, que vão sendo refinados do vértice de origem para os demais, considerando todos os outros nós como possíveis destinos. São bastante conhecidas as aplicações relativas ao problema do carteiro chinês, que consiste em realizar a rota mais eficiente em determinado percurso composto, por exemplo, por um grafo de ruas de um bairro. O problema em si usa os resultados de Euler para grafos ditos “eulerianos”, como estratégia para minimizar as vias que seriam repetidas (no caso, seriam a de menor extensão) quando se pretende cobrir o trecho de forma completa – como em um serviço de entrega de correspondências, por exemplo (Oliveira, 2004).

Os grafos são, portanto, representações de abstrações relativas, geralmente, a modelos existentes ou potenciais (Oliveira, 2004). Em síntese, têm-se as definições seguintes:

> Um grafo é uma tripla ordenada (N, A, g) onde
>
> N = um conjunto não-vazio de vértices (nós ou nodos); A= um conjunto de arestas (arcos);
>
> g = uma função que associa cada aresta a com um par não ordenado x-y de vértices chamados extremos de a (Gersting, 2001, p.231).

Em uma definição menos formal, “um grafo é um conjunto de nós (vértices) e um conjunto de arcos (arestas) tais que cada arco conecta dois nós” (Gersting, 2001, p.231). Do ponto de vista da representação, a Figura 1 traz o esquema relativo às pontes de

Neste trabalho, analisam-se algumas produções de sete estudantes do Ensino Secundário, especificamente referentes aos conceitos iniciais da teoria dos grafos e suas aplicações, obtidas por meio de oficinas didáticas. Os elementos teóricos norteadores, bem como a natureza do problema de pesquisa, são esclarecidos a seguir.

Referencial teórico e problematização

Várias leituras foram realizadas no processo de eleição de um quadro teórico deste trabalho. A opção por Polya (2006) e Brousseau (1986), especificamente quanto à resolução de problemas, se deu em função da maior correlação de seus trabalhos no campo de estudo em questão.

Deste ponto de vista, utilizar aplicações da Teoria dos Grafos como estratégias é uma medida que deve vir acompanhada dos principais elementos da resolução de problemas: o pensar, o analisar, o definir, o concluir. Saber para onde ir e como chegar. Desta forma, Polya (2006) e Brousseau (1986) aparecem de forma estrategicamente importante no desenvolvimento deste estudo.

Para Polya (2006), a resolução de problemas pode ser dividida em quatro fases: a primeira consiste em compreender o problema, percebendo claramente o que é necessário; a segunda diz respeito ao estabelecimento de um plano a partir da percepção de como a incógnita está relacionada aos dados, e como os diversos itens estão inter-relacionados; a terceira trata da execução do plano e; a quarta está ligada à realização de uma retrospectiva da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

No que diz respeito à compreensão de problemas, Polya (2006) afirma que "é uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida" (Polya, 2006, p.5). Na verdade, a resposta, nesta eventualidade, provavelmente estaria longe da solução do problema, dado que o aluno responderia sem saber como proceder. Essencialmente, o aluno deve compreender o problema, mas isso não é tudo: ele deve ser estimulado a desejar resolvê-lo. Para o autor, o problema deve ser muito bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante. Primeiro, o enunciado deve estar em condições de permitir a identificação das partes principais do problema, as quais, segundo Polya (2006), seriam a incógnita, os dados e a condicionante. O professor, para isso, não deve dispensar as indagações relativas a estes três elementos.

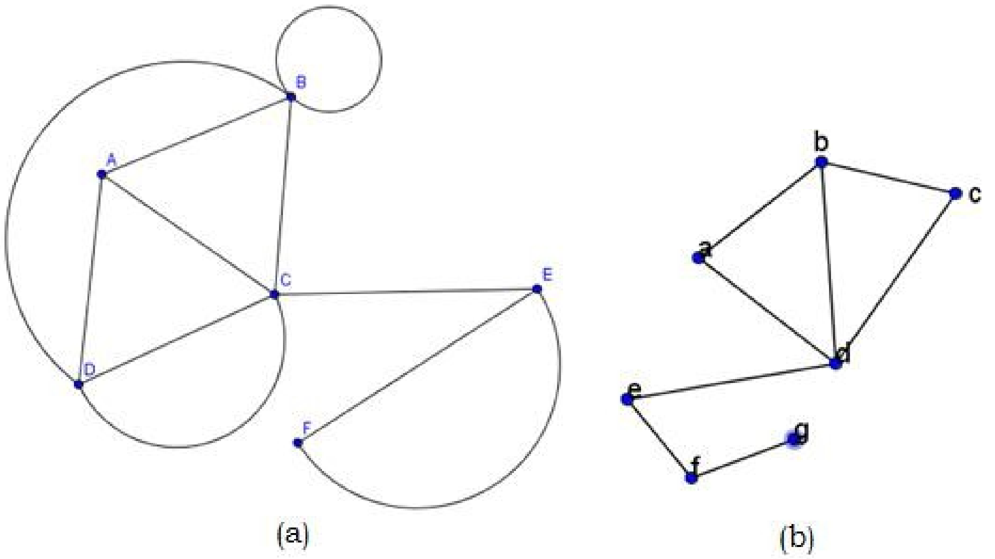
Uma vez que as perguntas da fase de compreensão dos problemas sejam respondidas corretamente, deve-se passar para a próxima fase, o estabelecimento de um plano. Um plano é possível de ser estabelecido quando se conhecem, pelo menos de um modo geral, os elementos envolvidos na descoberta da incógnita (cálculos, construções geométricas, figuras, entre outros). Para o autor, no momento da elaboração do plano, o professor deve se posicionar como o estudante, pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas. As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados. Deve-se, muitas vezes, começar o trabalho por uma indagação relativa ao conhecimento a respeito de um problema correlato. Ao definir um plano, outras questões devem ser propostas: “Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?” (Polya, 2006, p.8).

Uma vez que o plano tenha sido definido, deve-se passar à próxima fase, a execução. Conceber um plano não é fácil, sendo necessários conhecimentos anteriores e bons hábitos mentais. Entretanto, o plano fornece apenas um roteiro geral. Para o autor, é preciso ficar convicto de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, para isso, os mesmos devem ser examinados, um após o outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e que não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro.

Uma vez que o plano tenha sido executado e o aluno tenha alcançado a solução, não se deve simplesmente fechar o livro e passar a outro assunto. A quarta fase na resolução é o retrospecto, que consiste, na visão de Polya (2006), em reexaminar o resultado final e o caminho adotado, para que o conhecimento seja consolidado e a resolução do problema proposto seja aperfeiçoada. O retrospecto pode, inclusive, auxiliar o aluno a perceber outros caminhos possíveis na resolução do problema. Aqui, pode-se mesmo questionar o aluno se é possível chegar ao resultado por um caminho diferente, ou, ainda, se é possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema.

Polya (2006) trata também de um elemento peculiar aos grafos: a notação. Segundo Polya (2006), é possível raciocinar profundamente sem o auxílio de quaisquer palavras, apenas pela observação de figuras geométricas ou pela operação de símbolos geométricos. Figuras e símbolos estão intimamente relacionados com o raciocínio matemático: o seu emprego auxilia o raciocínio. A partir daí, um passo importante na resolução de um problema matemático é o uso da notação. Um grafo é uma forma de notação que se beneficia de símbolos, de signos, encaixando-se nas definições de Polya (2006, p.111). Os signos devem ser inequívocos, ou seja, se na resolução de um problema uma grandeza for denominada de a, deve-se evitar chamar, no mesmo problema, qualquer outra grandeza de a. Nada impede, no entanto, que se use essa letra com um sentido diferente em um problema diferente. Tal situação é facilmente percebida em grafos. Os grafos apresentados na Figura 1 são exemplos de denominações iguais em modelos diferentes. Ambas foram usadas no material entregue aos sujeitos (alunos) quando da proposição dos problemas relativos a este estudo. O grafo da Figura 2(a) representa uma realidade (estrada, redes de computadores etc.) e tinha como objetivo propor aos alunos que fizessem uma representação usando apenas números naturais. Era uma introdução ao conceito de lista de adjacências. Já o grafo da Figura 2(b) foi usado para institucionalizar os conceitos de lista de adjacências e matriz de adjacências. Apesar de representarem realidades diferentes, ambos usaram as mesmas notações para representarem os vértices.

***Figura 2*. Exemplos de grafos.**



Fonte: Adaptado de Oliveira, 2004, p. 5

A proposta de resolução de problemas, no âmbito da investigação aqui descrita, não prescinde de uma organização didática. Assim, o conceito de situação é muito importante neste estudo. Segundo Brousseau (2008, p.21), "situação é o modelo de interação de um determinado sujeito com um meio específico que determina certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável". Brousseau (2008, p.20) ressalta também que a palavra situação "serve para descrever tanto o conjunto (não necessariamente determinado) de condições que delimitam uma ação como um dos modelos (eventualmente formais) usados para estudá-los."

Desta forma, uma “situação” é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado, onde o meio é considerado como um sujeito autônomo, antagônico ao sujeito.

De outra maneira, pode-se definir situação didática como

> uma coleção de relações criadas de forma implícita e/ou explícita entre um aluno ou um conjunto de alunos, certo meio (que alcança eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educacional (representado pelo docente) com o objetivo de permitir que tais alunos passem a deter um saber constituído ou em vias de constituição (Brousseau, 1986, p. 15, tradução nossa).

Assim, julgou-se necessário compor as oficinas de Teoria dos Grafos, utilizadas como meio de coleta de dados na pesquisa da qual trata este artigo, de forma que as situações engendradas dependessem o mínimo possível da intervenção do professor, possibilitando que a aprendizagem fosse alcançada pela adaptação do sujeito em relação ao meio típico dessa situação e das consequentes retroações do meio (*milieu*) às ações do aprendiz. Neste cenário, justamente, o estudante aprende a partir de suas adaptações a este *milieu*, estabelecido de forma antagônica, e que é fator de contradições e dificuldades inerentes ao processo de investigação que subjaz à busca do conhecimento. Assim, a resposta a um problema contido no âmbito de uma situação é o próprio conhecimento que se buscava construir.

Desta forma, segundo Brousseau (2008), na concepção mais geral de ensino, a marca de um saber é a associação de boas perguntas e boas respostas. O professor propõe um problema; se o aluno resolver, demonstra que sabe; caso contrário, fica clara a necessidade de conhecimento, que requer uma informação, um ensino. O aluno é capaz de adquirir conhecimento por meio da própria experiência e interação com o meio: ele aprende vendo o mundo ou formulando hipóteses dentro das possibilidades da própria experiência, ou mesmo em interações mais complexas, formadas por assimilações.

De acordo com o que assevera Almouloud (2007), à semelhança do que acontece na sociedade humana, o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, dificuldades, desequilíbrios. Esse saber, fruto de sua adaptação, manifesta-se por intermédio de novas respostas, que são a marca da aprendizagem.

Ainda segundo Brousseau (2008, p.34) as concepções atuais do ensino exigem do professor que provoque o aluno – por meio da solução sensata dos “problemas” que propõe – às adaptações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, com que o aluno fale, reflita e evolua. Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento deve ser inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. Tal situação foi denominada por Brousseau (2008) como situação adidática.

De outra maneira, ainda, segundo Brousseau (2008), o processo de aprendizagem de temas matemáticos supramencionado pode ser dividido em fases ou dialéticas, que caracterizam o nível de interação dos estudantes em relação ao problema em jogo.

A primeira das dialéticas a ser considerada é a de ação, na qual o aluno se volta integralmente para resolução do problema, caracterizando uma fase experimental do conhecimento, sem, portanto, grandes preocupações de ordem teórica, na qual o estudante se esforçará por mobilizar seus conhecimentos prévios, no intuito de busca uma resposta para o problema em tela.

A dialética seguinte é chamada pelo autor francês de situação adidática de formulação, e se dá quando o sujeito emprega modelos ou esquemas teóricos para elaborar afirmações sobre suas interações em relação ao problema, sem que possa, neste momento, garantir a validade de suas conjecturas – e nem há, realmente, esta preocupação neste instante.

Em seguida, ocorre a situação adidática de validação, quando o aprendiz percebe a demanda por construção de provas ou demonstrações acerca do que construiu até aquele momento, no que tange às afirmações engendradas. Ao elaborar um discurso que julga pertinente para exarar suas descobertas, o estudante pode ter suas afirmações contestadas ou não no que diz respeito ao conhecimento em construção.

Por último, ocorre a situação de institucionalização, fase didática e que prevê a intervenção formal do professor, que deverá sintetizar as construções elaboradas pelos aprendizes, buscando dar às mesmas um estatuto do saber matemático consolidado, bem como mapear as interações pertinentes com os saberes correlatos. Isto pode ocorre por meio de sessões coletivas, nas quais frequentemente surgem debates relativos às produções estudantis e suas eventuais relações com o estatuto formal do saber matemático.

Para Brousseau (2008, p.32), cada situação pode fazer com que o sujeito progrida de tal modo que a gênese de um conhecimento pode ser o fruto de uma sucessão de novas perguntas e repostas, em um processo que Brousseau (2008) chamou de dialética. Nesses processos, as sucessões de situações de ação, formulação e validação podem conjugar-se para acelerar as aprendizagens. A ação e, posteriormente, a formulação, a validação e a institucionalização parecem constituir uma ordem razoável para a construção dos saberes. Essa ordem parece ir contra aquela em que os saberes são primeiro reorganizados em discursos comunicáveis conforme o destinatário e, depois, somente "aplicados" a situações pessoais e "transformados" em decisões. Na verdade, não há uma lei geral que qualifique ou desqualifique nenhum desses processos; há que se analisar as propriedades de cada um deles.

Assim, nesta investigação, não se buscou meramente criar um material didático capaz de trabalhar a Teoria dos Grafos junto aos alunos. A estratégia, a comunicação, a forma pelo qual as interações com os alunos foram planejadas, a relação com o meio e sua estruturação foram totalmente mediadas pelos pressupostos das teorias aqui apresentadas.

Considerando as contribuições principais dos dois teóricos supramencionados, as atividades relativas às oficinas foram elaboradas considerando que um aluno deve ser estimulado, em relação a um problema, a buscar seus dados, as incógnitas e as condicionantes, além de agir, formular, criar conjecturas, enxergar caminhos. Deve o aluno, igualmente, receber estímulos para buscar situações correlatas, discutir com seus pares, formar validações de seus pensamentos, bem como traçar retrospectivas de suas ações, com vistas a validar continuamente suas formulações. Já o professor deve interferir o mínimo possível no meio, sendo um mediador e trabalhando ao máximo com devolutivas que façam o aluno pensar, formular, concluir, além de institucionalizar um assunto apenas quando as etapas investigativas a cargo dos alunos tiverem sido concluídas.

Especificamente em relação aos grafos, de acordo com Gersting (2001), ainda que a ideia seja muito simples, uma quantidade enorme de estruturas e de situações podem ser representadas desta maneira. Além de uma série de elementos computacionais que são assim constituídos, podem-se elencar, como grafos, redes computacionais, mapas rodoviários, rotas de distribuição de serviços e/ou produtos, entre outras coisas. Isto torna a proposta de trabalho didático com o tema, no âmbito do Ensino Secundário, bastante adequada, em função de sua natureza modelável, do rigor e formalismo que podem ser associados às aplicações, do ponto de vista matemático, e da possibilidade da criação de cenários investigativos (Skovsmose, 2003), os quais podem ser abordados a partir de uma proposta desafiadora, calcada na resolução de problemas do mundo real (English e Sriraman, 2010).

Neste sentido, a propositura encetada a partir desta investigação tinha a intenção de colocar os estudantes em posição de investigar problemas oriundos de pressupostos da teoria dos grafos, criando situações didáticas nas quais, do ponto de vista de Brousseau (1986), os mesmos pudessem, autonomamente, constituir dialéticas de ação, formulação e de validação em relação aos desafios existentes. O espaço crítico de suporte, no qual as interações dos sujeitos com os artefatos disponíveis e com o conhecimento em jogo se dão, de caráter antagônico, é o que o autor francês chama de *milieu*. Como o professor só faz suas intervenções, à guisa de institucionalização, após o percurso dos estudantes se completar, pode-se afirmar que as aprendizagens se desenvolvem a partir de retroações do *milieu*, em resposta às intervenções dos sujeitos no curso da investigação.

Assim, para buscar respostas para a questão *"de que forma uma estratégia didática com base na Teoria dos Grafos pode concorrer para a construção do conhecimento Matemático sob o enfoque da resolução de problemas entre alunos do Ensino Secundário?"*, optou-se, no âmbito desta investigação, pela organização de oficinas de resolução de problemas utilizando Teoria dos Grafos, estruturadas na forma de sequências didáticas.

Aportes metodológicos

As oficinas mencionadas foram realizadas em uma escola particular, localizada na cidade de São Paulo (Brasil), tendo como participantes sete jovens, três do segundo ano do ensino secunsário e quatro do terceiro ano, escolhidos de forma aleatória.

A abordagem metodológica utilizada na investigação tem caráter qualitativo (Bogdan e Bliken, 1994), tendo por base as descrições das atividades dos estudantes ao longo da realização das oficinas, que ocorreram em quatro encontros. Neste trabalho, são analisados os elementos obtidos nas duas primeiras sessões, por meio de observação sistemática, considerando as interações entre os alunos que participaram da oficina para a análise dos dados. Importante ressaltar que se trata de uma realidade local, envolvendo a investigação de um fenômeno cuja base para considerações repousa mais no processo do que no resultado.

Para buscar respostas para a questão direcionadora da investigação aqui descrita, optou-se pela organização de oficinas de resolução de problemas utilizando Teoria dos Grafos, estruturadas na forma de sequências didáticas. As questões presentes em cada atividade procuraram seguir as propostas de Polya (2006), com a lógica prevista na teoria das situações didáticas, ou seja, têm precedência os conceitos de devolução, de *milieu* antagônico, de percurso investigativo dos sujeitos por meio de dialéticas de ação, formulação e validação, e de institucionalização por parte do professor/pesquisador, além do cuidado para evitar eventuais efeitos deletérios do contrato didático (Brousseau, 1986), em relação às recomendações de direcionar as ações dos estudantes e do uso de analogias em excesso.

De forma geral, procurou-se fomentar a compreensão dos estudantes sobre resolução de problemas matemáticos com o uso da teoria dos grafos, para, a partir da análise de suas propostas, discutir as estratégias e resoluções dos mesmos diante das situações didáticas engendradas.

Para que isto fosse possível, todas as atividades previram a inserção dos estudantes como investigadores dos conceitos matemáticos, relativos à teoria dos grafos. Deste modo, foi possível, por meio de uma postura de orientação e não intervenção, evitar a ocorrência de efeitos deletérios do contrato didático previstos por Brousseau (1986), à medida que não foram fornecidas pistas facilitadoras para as respostas, não se aceitaram respostas corriqueiras como tendo valor científico, não forma usadas excessivamente as analogias e/ou metáforas, e assim por diante.

Partiu-se de uma situação fundamental que consistia, em termos gerais, na descoberta dos conceitos iniciais sobre grafos e sua mecânica, quais sejam as noções de aresta, vértice, adjacência e percurso. A partir de tais propostas, a expectativa passou a ser a de que os estudantes se engajassem em uma dialética de ação, quando começassem a manipular, em relação aos problemas, os dados, a incógnita e a condicionante; partissem para formulações, quando, conscientes destes elementos, passassem a conjecturar sobre as soluções prováveis, propondo aos pares suas construções provisórias a título de validação. Uma sessão coletiva de debates encaminhou a institucionalização, após o término do trabalho investigativo dos sujeitos.

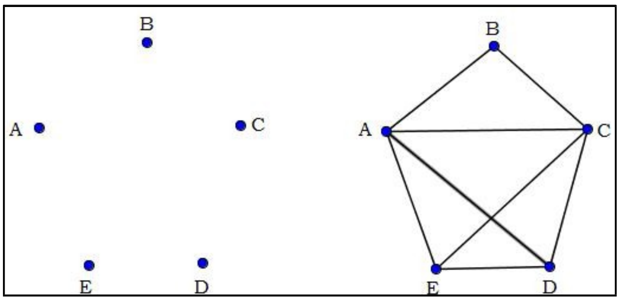
Foram sujeitos da pesquisa sete jovens, três do segundo ano do ensino secundário e quatro do terceiro ano, selecionados de forma aleatória[1]. Por ter sido realizada em época de recuperação de final de ano, os alunos convidados não podiam estar em recuperação para que as oficinas não atrapalhassem seus estudos. Portanto, os sete alunos já haviam sido aprovados em todas as disciplinas, o que os caracteriza como alunos de bom rendimento, dentro das exigências avaliativas institucionais. Não houve qualquer exigência, na seleção dos estudantes, de que os mesmos tivessem excelente desempenho em matemática, ou que tivessem na matemática sua disciplina preferida.

Cada uma das quatro oficinas foi realizada em um dia distinto, com 3 horas de duração, totalizando, portanto, 12 horas. As sessões foram coordenadas por um dos autores deste trabalho, e possuíam planejamento específico, de acordo com o que se exibe em seguida, quando são explorados os dados coletados e as respectivas análises.

As sessões de resolução de problemas e suas análises

A primeira oficina apresentava uma sequência para os estudantes, baseada em três atividades. A primeira delas estava relacionada à figura 3.

***Figura 3*. Problema a ser resolvido na primeira questão da etapa específica, de acordo com dados da pesquisa.**



Fonte: dados da pesquisa

O enunciado disponível era o seguinte: "*Ligue os pontos abaixo sem tirar o lápis do papel e sem passar mais de uma vez pelo mesmo traço (aresta), conforme modelo*". Essa construção, apropriada como um elemento passível de ser usado na teoria dos grafos, é bastante conhecida pelos estudantes, que, em algum momento, usaram esta proposta como brincadeira. Antes de iniciar a resolução, entretanto, os

[1] Uma vez que os temas relativos à teoria dos grafos não compõem o currículo do Ensino Médio, não havia qualquer pré-requisito para a escolha dos sujeitos.

sujeitos deveriam responder: “Qual é a incógnita?”, “Quais são os dados fornecidos pelo problema?” e “Qual é a condicionante?”.

Em relação ao primeiro item, as respostas tiveram como foco o “modo de traçar os segmentos de acordo com as regras do enunciado”. Um aluno respondeu: “Formar a figura especificada”. Quanto ao segundo item, relacionado aos dados do problema, alguns alunos mencionaram que os mesmos tinham por fonte a figura e seus vértices. Outros citaram também a restrição de não passar pela mesma aresta duas vezes e não retirar o lápis do papel. Em relação ao item c, todos os alunos descreveram que as restrições fazem parte da condicionante do problema.

Em seguida, de forma a apurar as soluções encontradas, o pesquisador perguntou qual seria a condição para que o problema fosse resolvido. Aqui, todos os alunos perceberam que o problema só poderia ser resolvido caso o desenho fosse iniciado pelos vértices D ou E, em conformidade com o conceito de grafo semieuleriano.

Na última questão desta parte, os estudantes foram convidados a descrever, em linguagem matemática, a solução que encontraram para o problema. Aqui, dois alunos responderam formulando regras para validação de um grafo, citando número de diagonais que ligariam os vértices. Os outros alunos descreveram a sequência dos vértices a serem ligados. Nenhum estudante enunciou formalmente o conceito de grafo semieuleriano, assim definido como todo o grafo que contém exatamente dois vértices ímpares, de forma que existe um percurso por meio do qual é possível passar por todos os vértices do grafo e por todas as arestas, mas apenas uma vez em cada aresta, e que começa em um dos vértices ímpares e termina no outro.

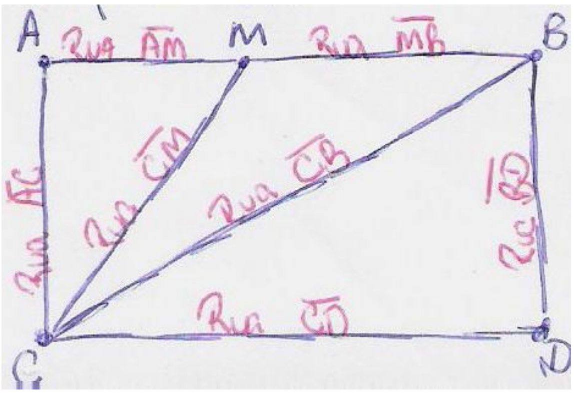
Esta etapa teve o objetivo de possibilitar uma noção intuitiva do conceito de grafo. Não era esperado que as terminologias próprias fossem empregadas, mas que a noções como vértice, aresta, adjacência e percurso surgissem de forma inicial. Interessante perceber que os alunos, mesmo a partir do primeiro problema, já foram capazes de perceber as restrições do grafo quanto à resposta procurada, assim como relacionar estas restrições com os conceitos básicos de vértices e arestas.

Superada esta fase do trabalho investigativo dos estudantes, correspondente às dialéticas de ação, formulação e validação, previstas por Brousseau (1986), uma discussão coletiva, com a participação do pesquisador, buscou encaminhar as institucionalizações necessárias. Para isto, buscou-se retomar a ideia de retrospectiva de Polya (2006), a partir da questão “O que você pode dizer que aprendeu, em termos de novos conhecimentos, com as atividades realizadas até agora? Que elementos lhe chamaram a atenção?”. Como resposta, os alunos destacaram que, a partir das atividades, foi possível “melhorar a visão dos conceitos de arestas, dados, incógnitas e perceber o que vem a ser uma condicionante”. Também destacaram a percepção da diferença entre os conceitos de condicionante e condição, a formação de conjecturas, a diferença entre conjecturas e teoremas, a necessidade de buscar a formulação autonomamente, a validação de uma descoberta aplicada em outras situações.

Como última atividade desta primeira sessão, os alunos deveriam elaborar uma situação problema na qual pudesse ser aplicado o conhecimento adquirido até aquele momento. O enunciado não deveria ter textos como “ligue os pontos sem tirar o lápis do papel”, ou seja, a proposta consistiria em pensar em um problema diferente, mas inspirado, de alguma forma, nas ideias iniciais sobre grafos que estavam sendo formadas. Aqui, os alunos, divididos em dois grupos (2º e 3º anos do ensino secundário), criaram situações problema usando os conhecimentos obtidos com vértices, arestas, adjacências e percursos. Essa etapa tinha como objetivo propor novas formulações, a partir dos conceitos iniciais adquiridos, e a validação das observações realizadas durante a primeira sessão.

O grupo formado por alunos do 3º ano criou o seguinte cenário (figura 4): “*Um entregador de pizzas precisa realizar algumas entregas em residências localizadas nas ruas AM, MB, AC, BC, CD e BD do quarteirão esquematizado abaixo. A pizzaria já recebeu algumas ligações reclamando quanto a demora, e portanto as entregas precisam ser feitas rapidamente, evitando assim que se passe pela mesma rua mais de uma vez. Supondo que o entregador possa partir de qualquer um dos cruzamentos A, B, C e D, qual (quais) seria (seriam) o(s) mais adequado(s) para iniciar as entregas? Exemplifique um percurso.*”

Figura 4. Atividade proposta pelos alunos do 3º ano como conclusão da sessão1, de acordo com dados da pesquisa.

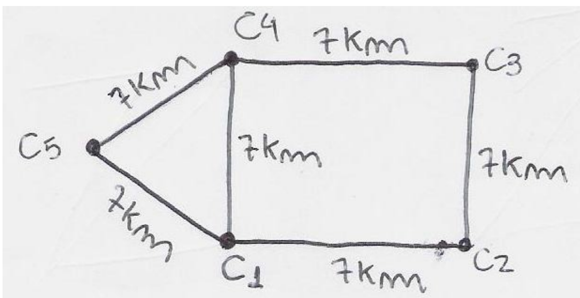


Fonte: dados da pesquisa

O grupo mencionado apresentou como solução a seguinte proposta: "*Para atender as exigências do tempo, o entregador precisa, necessariamente, partir dos pontos M ou B (os quais, 'curiosamente', são os únicos dos quais Partem 3 arestas, um número ímpar de arestas... como no problema anterior do pentágono). Assim, M-A-C-M-B-C- D-B e B-D-C-B-M-C-A-M seriam caminhos possíveis dentro desse cenário.*"

O grupo formado por alunos do 2º ano criou o seguinte cenário (figura 5): "*João quer realizar, com seu irmão, 5 entregas, passando pelas cidades representadas pela figura abaixo. Sabendo-se que ele parte da cidade C1, e que, em seu tanque, possui gasolina para um percurso máximo de 42 km, represente. Sabe-se também que ele não precisa retornar à cidade de origem*". Neste caso, a proposta de solução apresentada contemplava, a exemplo da anterior, o conceito de grafos semieulerianos, e indicava a necessidade de terminar o percurso em C4.

Figura 5. Atividade proposta pelos alunos do 2º ano como conclusão da sessão1, de acordo com dados da pesquisa.



Fonte: dados da pesquisa

Outro objetivo desta sessão foi o de levar os alunos a iniciarem a resolução de um problema tentando identificar a incógnita, os dados e a condicionante. Em relação à incógnita, os alunos, demonstraram entender bem o conceito. Apesar de alguns alunos terem citado apenas “a figura e seus vértices” como dados, a observação dos diálogos dos alunos durante a execução da atividade permitiu ao pesquisador identificar que eles haviam compreendido este conceito, apenas não souberam expressar na forma escrita. A resposta da questão relativa à condicionante mostrou que os alunos compreenderam este conceito, uma vez que responderam “as restrições dadas são a condicionante”. De uma forma até mais rápida do que se esperava, os alunos conseguiram finalizar a tarefa. O professor apenas disse que eles haviam acertado, mas em momento algum lhes disse o motivo, pois a sequência das atividades levaria os alunos a estabelecerem conclusões de maneira autônoma. Ao fazerem uma retrospectiva da aula, os alunos puderam resgatar o que aprenderam e o que mais lhes havia chamado atenção nesta primeira sessão. Ao finalizarem, os alunos tiveram que criar uma situação problema e depois foram à lousa e cada grupo propôs ao outro grupo que a resolvessem e fizessem observações. Os grupos também formularam condições relativas aos problemas que haviam criado, quanto ao grafo esperado como resposta.

A segunda sessão, cujo planejamento se encontra na tabela 1, possibilitou aos alunos trabalharem mais diretamente com grafos. A sequência didática estabelecida ao longo das etapas possibilitou ao professor a institucionalização da noção de grafos ao final da sessão.

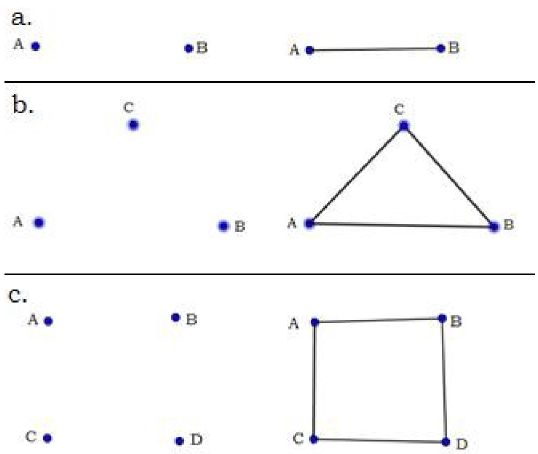
Tabela 1. ***Planejamento da segunda sessão de atividades, de acordo com os dados da pesquisa***

Sessão 2 – perspectiva de tempo: 3 horas		
Realizada dia 04/12, das 14h às 17h		
Objetivos:	- Possibilitar uma noção intuitiva da Teoria dos Grafos - Possibilitar a relação de grafos com os pressupostos teóricos de Euller - Institucionalizar a noção de grafo e a própria teoria relacionada - Relacionar Teoria dos Grafos com conhecimentos adquiridos em outras	
Etapa	Descrição	Perspectiva de Tempo
1	- Identificar quando um grafo possui um percurso de certo tipo	10 minutos
2	- Modelar o problema das Pontes de Königsberg proposto por Euler [1]	30 minutos

3	- Buscar a solução do problema das Pontes de Königsberg	30 minutos
4	- Propor a definição de Teoria dos Grafos	30 minutos
5	- Buscar situações em outras disciplinas que possam ser modeladas por grafos	30 minutos
6	- Definição de modelos e Institucionalização de Teoria dos Grafos	30 minutos

A primeira etapa desta sessão ofereceu aos alunos algumas tarefas cujo objetivo era o de ligar os pontos sem tirar o lápis do papel (figura 6). Além de ligar os pontos, os alunos tinham que descrever, em linguagem matemática, a solução encontrada. Os itens a, b e c ocorreram sem problemas. Todos os vértices tinham quantidade de arestas pares, e a sequência proposta em linguagem matemática apresentou os segmentos na ordem em que foram criados. A partir do item b os alunos deveriam descrever ao menos duas soluções.

***Figura 6*. Itens a, b e c da sessão 2, de acordo com dados da pesquisa.**

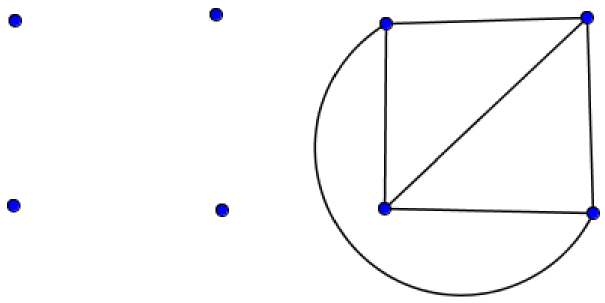


Fonte: dados da pesquisa

Já era esperado que não houvesse qualquer tipo de dificuldade neste momento. Alguns alunos descreveram as arestas criadas demonstrando os segmentos de reta por elas criados e outros demonstraram a sequência dos vértices que foram sendo ligados.

No item d os alunos, após várias tentativas e análises, perceberam que cada um dos vértices tinha um número ímpar de arestas incidentes. Começaram então a relacionar a quantidade de arestas ligadas aos vértices para estabelecer como chegar à construção do percurso solicitado em um grafo (figura 7).

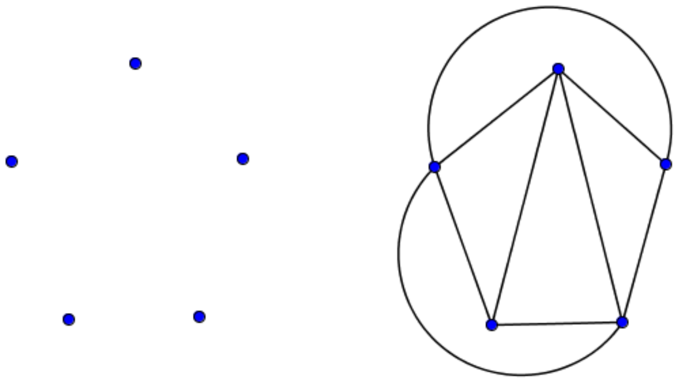
Figura 7. **Item d da sessão 2, parte 1, de acordo com dados da pesquisa.**



Fonte: dados da pesquisa

Ao chegarem ao item e, perceberam que havia tanto vértices pares como ímpares, e concluíram que a solução consistia em partir de vértices ímpares, no caso um dos dois cujo grau era três. Também começaram a relacionar os segmentos como sendo arestas, pois são “linhas” que ligam dois vértices (figura 8).

Figura 8. **Item e da sessão 2, parte 1, de acordo com dados da pesquisa.**

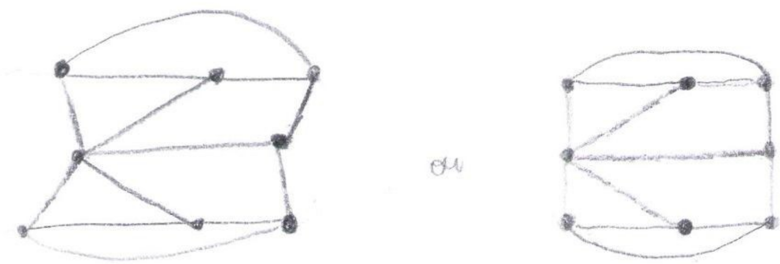


Fonte: dados da pesquisa

Estas atividades foram propostas com o objetivo de que os alunos pudessem continuar, a partir de dialéticas de ação, formulação e validação, o processo investigativo que buscava determinar a existência de trilhas ou circuitos eulerianos em um grafo dado. Ao propor que a solução fosse representada por um modelo matemático, objetivou-se introduzir aos alunos em questão um modelo baseado em listas de adjacências a serem trabalhadas nas sessões seguintes.

Nesta etapa os alunos são apresentados ao problema das Pontes de Königsberg. Um texto descreve o cenário, sutilmente comentado pelo pesquisador, o qual teve o cuidado de não evidenciar soluções. Após os alunos terem tido contato com modelagem por grafos, esse momento teve como objetivo possibilitar que eles começassem a criar seus próprios modelos. Assim sendo, após a leitura do texto, foi solicitado aos alunos que tentassem descrever um grafo que representasse o cenário descrito. Apesar de terem condições de perceberem um grafo e sua validação, os alunos demonstraram dificuldades em determinar se os vértices seriam pontes ou ilhas, e o mesmo para as arestas. Alguns alunos também relacionaram os caminhos nas margens como sendo vértices ou arestas. Foi um momento de muita interação e discussão entre eles. Perceberam que enxergar um modelo é muito diferente de construí-lo. A grande dificuldade estava em definir o que é representado por vértices e o que o é por arestas (figura 9).

***Figura 9*. Tentativas dos alunos em representar o problema resolvido por Euler na forma de grafo, de acordo com dados da pesquisa.**



Fonte: dados da pesquisa

Em seguida, foi apresentado o modelo de grafo relativo ao problema das pontes. Inicialmente, os alunos tiveram que definir a incógnita. A seguir, foi solicitado que identificassem os dados. Todos os alunos reconheceram como dados as ilhas, as margens, as pontes. Por fim, os alunos tiveram que identificar a condicionante. Todos os alunos reconheceram as relações enquanto vértices e arestas das ilhas, margens e ponte, e a incógnita como sendo atravessar todas as pontes uma única vez, passando por todas as ilhas e retornando ao ponto de partida sem repetir as pontes. Após algumas tentativas e análises todos os alunos concluíram que não há solução por serem todos os vértices ímpares. Essa conclusão surgiu rapidamente e validou as formulações sobre percursos possíveis em grafos (dadas certas condições) que os alunos haviam feito em tarefas anteriores. Os alunos sugeriram a construção de novas pontes, ligando ilhas ou margens.

Na etapa seguinte, o aluno é informado, pela primeira vez, de que já está trabalhando com grafos. Até este momento, os alunos não haviam tido qualquer informação a este respeito, mas alguns já desconfiavam que os vários modelos de representação gráfica usando arestas e vértices fossem representações de grafos. Desta forma, foi solicitado aos alunos que analisassem todos os trabalhos por eles realizados até então e dessem a própria definição sobre a Teoria dos Grafos. Os alunos demonstraram terem observado os cenários das atividades anteriores. Embora definidos com textos diferentes, e centralizando as definições em torno do problema resolvido por Euler, as definições giraram em torno de grafos como um recurso para modelagem de problemas, com relação direta entre arestas e vértices ímpares e pares, o que tornaria possível traçar percursos continuamente unindo todos os vértices sem passar mais do que uma vez por uma mesma aresta. Deram exemplos válidos com imagens dos respectivos modelos. Descreveram, ainda que de forma limitada, que cada vértice com número ímpar de arestas se liga a dois com números pares[2], e que a Teoria dos Grafos fornece meios para resolver questões relacionadas a trajetos ou percursos a partir de sua representação gráfica, buscando o melhor caminho. Vale observar que, até este momento, os alunos não tiveram contato com a noção de "caminho mínimo", mas alguns começaram a enxergar esta possibilidade.

A parte final desta sessão teve como objetivo institucionalizar noções relativas à Teoria dos Grafos. Até este momento os alunos tiveram oportunidade de trabalhar com grafos, sem que tenham sido apresentados a conceitos formais. A institucionalização é uma etapa prevista por Brousseau (2008) na TSD e que consiste na fixação do estatuto formal do conhecimento matemático, onde os conceitos são discutidos de forma mais direta pelo professor em sessões coletivas e as conclusões dos alunos são trabalhadas de forma a que o conceito se forme na visão dos alunos. Aproveitou-se este momento para introduzir, de maneira ainda superficial, o conceito de grafo orientado. Ao longo das próximas atividades os alunos teriam contato com

[2] Esta, na verdade, não é absolutamente uma condição de existência para um grafo qualquer, nem para a existência de uma trilha euleriana em um grafo; desta forma, a asserção não pode ter o estatuto de acerto, em relação ao rigor teórico, mas de circunstância particular a certos grafos.

grafos deste tipo e poderiam estabelecer as suas próprias definições e conclusões. Entretanto, tais sessões não são analisadas neste trabalho.

Considerações Finais

Na problematização referente à pesquisa relatada neste artigo, aventou-se, como objetivo, a identificação de possibilidades do uso dos pressupostos da teoria dos grafos como elementos de uma estratégia didática com base na resolução de problemas, a partir da constituição de sequências didáticas que incentivassem os estudantes ao trabalho investigativo. As trajetórias explicitadas ao longo da análise das oficinas aqui mencionadas puderam dar conta da importância da investigação exercida pelos estudantes, à medida que debatiam e se apropriavam da teoria subjacente. As etapas do percurso indicado por Polya (2006) foram amplamente percorridas pelos estudantes, envolvidos em situações adidáticas, em relação às quais deviam buscar, autonomamente, propostas de resolução em dialéticas de ação, formulação e validação, justamente como propõe Brousseau (1986).

O que a pesquisa descrita neste trabalho pode apurar, em resposta mais direta ao questionamento levantado, é que a resolução de problemas não surge como uma proposta que prescinda de método e estratégia, pelo contrário: as propostas de Polya (2006) ganharam consistência a partir da lógica e da dinâmica investigativa, responsáveis pelo incentivo à autonomia dos estudantes. Diante de situações de caráter adidático, ou seja, nas quais a vontade de ensinar do professor e sua intencionalidade não são explicitadas, os aprendizes passam a mobilizar seus recursos e agir em colaboração, percorrendo distintas dialéticas como passos de uma trajetória que, de maneira espontânea, imita a atividade do matemático: conjecturar, recorrer à teoria, assumir estratégias de demonstração prova.

Outro aspecto de destaque deste trabalho surge na percepção de que a maioria dos alunos participantes adotaram, autonomamente, as ações sugeridas por Polya (2006), o que foi um elemento facilitador nas investigações propostas ao longo das sessões, e em particular daquelas referidas aqui. Os alunos responderam satisfatoriamente às questões propostas, sendo capazes de identificar incógnitas, dados, atribuições de notações, retrospectivas, elementos importantes a serem destacados quando um problema é analisado.

As atividades foram elaboradas, também, procurando proporcionar a construção de soluções com base na sequência de dialéticas definida por Brousseau (1986), quais sejam de ação, formulação, validação e institucionalização. Ao longo deste percurso, os alunos compreenderam os conceitos relativos à teoria dos grafos, bem como de que forma poderiam usar grafos como modelos para a resolução de problemas.

Outra conexão teórica notável no trabalho investigativo dos alunos pode ser percebida quando, a partir dos conceitos de Polya (2006), os estudantes passaram a buscar uma retrospectiva, na qual explicitaram o que de novo se aprendeu. Além disso, ainda neste âmbito, durante a aplicação das oficinas, os alunos foram estabelecendo conjecturas. Nestas ocasiões, foi possível realizar importantes conexões entre estas concepções, fruto do labor investigativo, e as teorias e/ou teoremas empregados. Na institucionalização, etapa didática da proposta de Brousseau (1986), estas relações foram destacadas, bem como a importância de suas descobertas, mesmo quando parciais, incompletas e/ou provisórias – daí a relevância das dialéticas de formulação e validação, inclusive no âmbito de variadas situações-problema.

Vale a pena ressaltar, também, que, durante todas as etapas da sessão 2, os alunos continuaram trabalhando em atividades as quais, a partir da proposta de Brousseau (1986), tiveram como objetivo possibilitar que os mesmos pudessem definir autonomamente os conceitos atinentes à teoria dos grafos. A última atividade desta sessão possibilitou a institucionalização, quando o docente fixa o estatuto do conhecimento matemático válido.

A partir de reflexões desta natureza é que foi possível propor que os alunos tivessem como atividade desenvolver eles mesmos uma situação-problema, como ocorreu na primeira oficina aqui relatada. Esta etapa é incentivada por Polya (2006), e permite que os alunos revisitem as etapas de ação, formulação e validação, propostas por Brousseau (1986), como gestores do processo e proponentes de seus próprios modelos. Particularmente, os alunos, sempre divididos em dois grupos, foram à lousa e propuseram ao outro grupo que resolvesse e comentasse a atividade proposta. Interessante que, neste momento, eles começaram a formular e validar quando um problema pode ser modelado a partir de um grafo, e estabeleceram relações entre os vértices e a quantidade de arestas, por exemplo. A par das conjecturas e conclusões que obtiveram, é preciso ressaltar que não haviam sido "ensinados" pelo professor sobre os aspectos axiais da teoria dos grafos e nem sobre a questão de grafos eulerianos, semieulerianos, com vértices de grau ímpar, e a relação destas características com a possibilidade de construção de determinados percursos.

Assim, a estratégia e as opções teóricas foram fundamentais neste estudo. Neste âmbito, os alunos puderam perceber, a partir da leitura atenta de um problema, as incógnitas, os dados e as condições que relacionam estes dois elementos. Além disso, de forma específica, puderam entender como utilizar grafos como modelos na resolução de determinadas situações-problema e maneiras de relacionar um grafo com a realidade estudada em dado problema.

De toda forma, o assunto está longe de seu esgotamento. Outros tópicos da teoria dos grafos poderiam ser explorados, com especial destaque para os problemas de percurso (problema do carteiro chinês, do caixeiro viajante, entre outros). Os mesmos tópicos aqui tratados poderiam ser explorados em outros contextos e realidades escolares, ou mesmo servir de base para oficinas que visassem compor um processo de formação continuada de professores de Matemática. Ficam estas ideias como sugestões para futuras pesquisas.

Referências

ALMOULOUD, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Edição atualizada. Curitiba: Ed. UFPR.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

BRASIL. Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996. (1996). *Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional*. Brasília: Ministério da Educação.

BROUSSEAU, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. 1. ed. São Paulo: Ática.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de Ia didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble, n.7.2, p.33-115.

ENGLISH, L., SRIRAMAN, B. (2010). Problem solving for the 21st century. In: Sriraman, B., & English, L. *Theories of mathematics education*: seeking new frontiers. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

GERSTING, J. L. (2001). *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação*. São Paulo: LTC.

OLIVEIRA, G. P. (2004). O aprendizado da matemática discreta sob o enfoque algorítmico: autonomia e interdisciplionaridade. *Actas do XVI Simpósio Iberoamericano de Enseñanza Matemática*. Castellón, UNIJUI.

POLYA, G. (2006). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

SKOVSMOSE, O. (2008). *Educação Matemática Crítica*: a questão da democracia. 4ª. ed. Campinas: Papirus.