MODELAGEM MATEMÁTICA: A ARTICULAÇÃO DA MATEMÁTICA E DA MÚSICA NO ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

JOÃO DIMAS SARAIVA DOS SANTOS
Doutorando da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC
j.dimas.santos@bol.com.br

DOUGLAS BORREIO MACIEL DOS SANTOS
Doutorando da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC
douglas.borreio@gmail.com

Resumo
Este artigo tem por alvo apresentar uma pesquisa que trata do uso da modelagem matemática como estratégia de ensino. Trata-se do ensino de progressão geométrica em articulação com a música. Nele consta um breve histórico acerca da criação da escala musical temperada a qual se fundamenta no conceito de progressão geométrica. O desenvolvimento das atividades da modelagem seguiu as etapas, de acordo com (Bassanezi, 2013), e foi realizada com um grupo de alunos da segunda série do Ensino Médio de um colégio localizado na região metropolitana de São Paulo. A experiência com a aplicação da MM em sala de aula foi exitosa, mas acompanhada também por vicissitudes. Detectamos posturas, por parte de alguns dos alunos, resistentes à implementação da atividade nos moldes que foi sugerida. Creditamos a isso a utilização do livro didático como único instrumento de estudo. Esse geralmente utiliza-se do objeto de estudo para então explorá-lo em situações-problema, as quais, em podem ter pouca relação com fenômenos reais.

Palavras-chave: modelagem matemática; progressão geométrica; música

1. Introdução

Esta pesquisa se insere no âmbito das pesquisas que buscam desenvolver alternativas metodológicas para a sala de aula, aquelas que visem a suplantar a metodologia tradicional de ensino, na qual o aluno não desempenhe um papel secundário no processo de ensino-aprendizagem, isto é, que seja receptor passivo de informações, o que tende a inibir a autonomia e a criatividade dos sujeitos aprendizes. Trata-se de uma proposta de modelagem matemática, doravante substituída pelo acrônimo MM.

A pesquisa sobre MM, produzida pelos principais pesquisadores brasileiros na área, revela que, essa metodologia tem o potencial de prover aos estudantes um protagonismo que pode atenuar os problemas relacionados à postura indiferente desses diante de conteúdos matemáticos e fornecer-lhes possibilidades de aplicação desses conteúdos no mundo real, o que responde à frequente questão dos porquês, ou seja, onde podem aplicar tal e tal conteúdo e/ou questões correlatas. Creditamos também a essa estratégia de ensino a potencialidade de contribuir para a formação de cidadãos mais autônomos e criativos.

A opção pela utilização da MM no contexto escolar visa além da promoção da relação entre a matemática e as diversas áreas do conhecimento, despertar o interesse dos alunos pelas ciências, favorecendo um aprendizado com significado e historicamente contextualizado. Essa metodologia também pode ser uma grande aliada no desenvolvimento da criatividade, ampliação do repertório cultural dos alunos, assim como contribuir para o processo de iniciação científica dos discentes.

Na apresentação de sua obra, a qual discute as aplicações da MM no ensino, Biembengut e Hein (2014) afirmam que a MM se encontra entre nós desde as sociedades mais primitivas, em outras palavras, enfatizam que a matemática e a modelagem aparecem juntas, articulando-se com o objetivo de representar por meio da linguagem matemática, situações-problema presentes desde sempre no cotidiano de nossos antigos ancestrais.

Os mesmos autores destacam que foi na Renascença, período histórico em que se procurava exaltar as potencialidades realizadoras do homem, que a MM adquiriu contornos tal qual hoje a conhecemos. Naquele momento, assim como nos dias atuais, o objetivo era de explicar situações reais por meio da linguagem matemática adequada, para assim ter o potencial de melhor entender, fazer prognósticos e verificar o comportamento de situações ainda não estabelecidas como verdadeiras, para com isso antecipar-se aos acontecimentos, intervir e antever estratégias de ação na realidade.

2. Modelagem Matemática

Neste tópico, descrevemos a concepção de MM segundo Bassanezi (2013)., escolha teórica para esta pesquisa Este autor sugere técnicas para realização do processo de modelagem e a consequente obtenção do modelo, as quais atendem aos interesses dos autores deste trabalho.

Outrossim, comungamos com Bassanezi no que tange a escolha do tema a ser modelado, o qual deve ser escolhido junto com os alunos, cabendo ao professor orientar e mediar quanto a possibilidade e viabilidade de obtenção do referido modelo. Segundo o autor, isso é primordial para que os alunos desenvolvam o sentimento de corresponsabilidade pelo processo de aquisição de conhecimentos.

Outro aspecto a ser destacado é a visão desse autor sobre a implementação da MM na educação. No que é do interesse dos investigadores desta pesquisa, a qual está restrita ao Ensino Médio, o método se resume à investigação de uma ou duas variáveis, desprezando-se relações mais complexas presentes no fenômeno estudado. Apesar de não representarem a realidade com a necessária exatidão para que sejam feitas previsões, o grande mérito de tais modelos é o de permitir ao aprendiz aperfeiçoar estratégias, percebendo a necessidade de aplicar novas técnicas e conhecimentos para a formulação de modelos mais adequados à realidade estudada.

De acordo com Bassanezi (2013), a MM possui as seguintes etapas:

1. Experimentação - É o momento da obtenção de dados. Esses terão grau maior de confiabilidade se acompanhados do uso de métodos estatísticos ao longo da pesquisa experimental.
2. Abstração – É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos. Nesta fase, procura-se estabelecer:

a) A seleção de variáveis – É imprescindível que variáveis presentes na pesquisa sejam definidas com clareza e que haja diferenciação entre àquelas que são de controle que atuam no sistema e as de estado, que descrevem sua evolução.

b) Problematização – Etapa em que se formula o problema teórico, no jargão da área em que se está lidando. O problema deve ser enunciado com clareza, precisão e operacionalidade e com exatidão expor o que ele pretende resolver.

c) Formulação de hipóteses – As hipóteses são elaborações gerais que guiam a pesquisa e possibilitam que o pesquisador tenha acesso às manifestações empíricas pontuais. O modelo matemático obtido neste estágio dependerá essencialmente do número de variáveis interagindo entre si e também do nível de dificuldade das hipóteses.

d) Simplificação – Não é incomum que devido ao alto grau de dificuldade do problema matemático gerado por algum determinado modelo, nos deparemos com a impossibilidade de estudá-lo. De modo a torná-lo cognoscível, é importante limitar os dados integrados ao modelo original, tendo a cautela de não adulterá-lo irremissivelmente e, que ainda assim, resulte em um problema passível de tratamento matemático.

3. Resolução – a substituição da linguagem natural das hipóteses pela linguagem matemática adequada indica que estamos diante de um modelo. Muitas vezes, devido ao nível de dificuldade da resolução de um modelo, a única alternativa é recorrer aos métodos computacionais. É uma alternativa para que se prossiga na direção de soluções analíticas.

4. Validação – Nesse momento o modelo obtido é aprovado ou refutado. O conjunto de hipóteses associadas ao modelo é validado em confronto com os dados empíricos. A validação do modelo se dará em função do grau de aproximação pretendido. Às vezes, pretende-se aprimorar o modelo para melhor interpretar os resultados obtidos. A melhor maneira de fazer isso é usar gráficos das soluções, que também são eficazes no aprimoramento do modelo.

5. Modificação – Algumas vezes torna-se necessário modificar o modelo original. Pode-se ter incorrido no uso de alguma hipótese falsa ou mesmo optado por uma não razoavelmente próxima do real. Outra possibilidade é de que algum erro possa ter sido cometido acerca dos dados obtidos. Também, pode ser que a impressão sobre o real não seja adequada e, desse modo as hipóteses ou informações, ainda que verdadeiras não são o bastante. O modelo hipotético pode carecer de outras variáveis não presentes no modelo teórico, ou mesmo algum erro pode ter sido cometido ao longo do processo matemático de formalização.

3. Desenvolvimento

No ambiente escolar, durante o intervalo, é muito comum observarmos grupos de jovens reunidos em torno de alguém que esteja tocando um violão ou um teclado, por exemplo, o que indica o fascínio que a música tem exercido sobre as pessoas, na realidade sobre os povos desde os tempos mais antigos. Além disso, a música tem relação com a matemática e, portanto se constitui um campo profícuo para o trabalho com MM..

A partir dessas constatações decidimos trabalhar a relação da matemática com a música. E então em uma das aulas, foi sugerido aos alunos o desenvolvimento de atividades que abordassem essa articulação. Prontamente eles aceitaram, evidenciando a motivação de realizar tarefas em que a passividade daria lugar à proatividade.

A articulação da matemática e da música, encontra-se nos anos 570-500 A.C., período em que se acredita que tenha vivido o filósofo e matemático Pitágoras.

Naquele contexto histórico, a matemática era dividida no que se denominou de *Quadrivium*. De acordo com ROQUE (2012), essa divisão consistia de quatro frentes, quais sejam: a aritmética, a geometria, a astronomia e a música.

Acredita-se que Pitágoras tenha sido o primeiro a estabelecer uma relação entre a matemática e a música, a partir da criação da escala musical pitagórica. No entanto, essa escala tinha limitações que se justificam pela observação de ROQUE (2012), quanto o significado em importância dos números para os pitagóricos. Ela faz uso da Metafísica de Aristóteles para justificar a filosofia pitagórica.

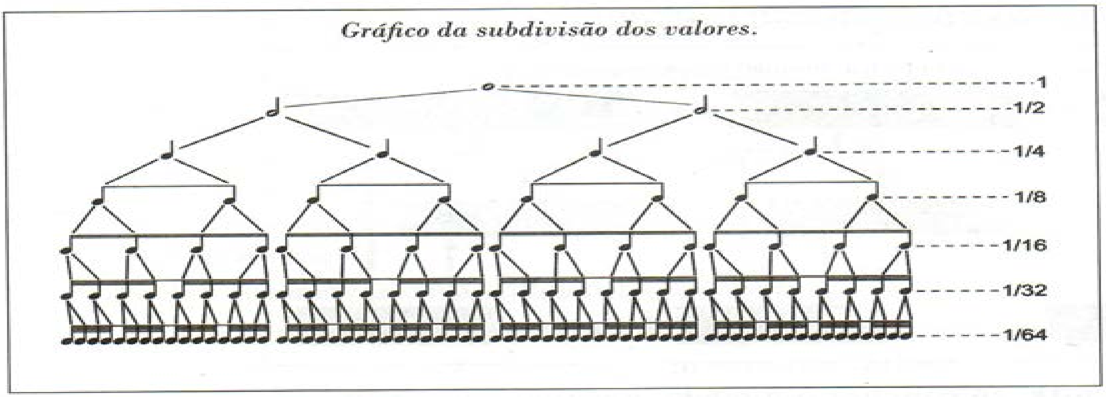
> Para Aristóteles, a filosofia pitagórica, que teria pontos em comum com o Platonismo, parte de uma semelhança estrutural vaga entre coisas e números para afirmar que as coisas imitam os números. Para compreender a verdadeira natureza das coisas existentes, explica Aristóteles, os pitagóricos se voltavam para os números e as razões das quais todas as coisas são feitas. Nada podia ser conhecido sem os números. Tanto as quantidades quanto as grandezas deviam ser finitas e limitadas a fim de servirem de objeto para a ciência, uma vez que o infinito e o ilimitado, segundo os pitagóricos, não convinham ao pensamento. (ROQUE, 2012, p. 109)

Obviamente, essa restrição dos pitagóricos em não trabalhar com o infinito trouxe limitações no que se refere à escala pitagórica que foi substituída pela escala temperada. Mas, primeiramente, vamos ponderar sobre como Pitágoras criou tal escala.

Biembengut e Hein (2014), destacam que, dentre as grandes obras atribuídas a Pitágoras, uma delas está relacionada à música. Os autores citam que Pitágoras descobriu que os sons musicais têm durações diferentes. Ele esticou um fio, verificando o som produzido pela vibração e em seguida, fixou-o ao meio e vibrou-o novamente, repetindo o processo, fixando ao meio as demais partes do fio e obtendo o som. Destacam que,

> Pitágoras percebeu que a cada vez que fixava obtinha uma nota uma oitava mais alta. Após verificar que a oitava tinha a proporção de dois para um usou frações simples para medir as distâncias das cordas adicionais. Essas frações criaram a nossa escala musical, base de toda a música ocidental. Cada tempo de duração é representado por figuras gráficas de uma notação musical. (BIEMBENGUT, HEIN, 2014, p. 16)

Figura 1: uma representação do processo de subdivisão.



Fonte: BIEMBENGUT, HEIN, 2014, p. 16

Apesar de existirem outros modelos matemáticos, o do grego Pitágoras foi o mais aceito pela comunidade musical do Ocidente até a Idade Média. No entanto ele apresentava "falhas" que se relacionavam ao intervalo entre duas notas da escala que não poderia ser sempre o mesmo.

Como já discutido, e agora em outras palavras, o fato dos pitagóricos não aceitarem os números irracionais, por não ser possível escrevê-los como a razão entre dois inteiros, criava um entrave para a possibilidade de "corrigir os erros" inerentes à escala pitagórica.

O problema só foi resolvido com o advento do Renascimento, período de grandes transformações científicas e tecnológicas. Na música, durante esse período, por exemplo, sentiu-se a necessidade de transpor melodias para outras tonalidades, o que até então não era possível.

O problema foi sanado por um processo criado em 1691 por Andréas Weckmeister, chamado de Escala Temperada. Sendo assim, ocorreu uma mudança de paradigma, pois foram inseridas mais cinco notas entre as sete já existentes na escala anterior.

Com relação à escala temperada, que agora deveria ter 12 sons sendo que o intervalo entre esses, por sua vez, deveria ser o mesmo. Esse fato gera um problema matemático interessante: como encaixar 12 sons, com o mesmo espaçamento, entre os valores 1 e 2, que seriam os valores de referência estipulados entre duas oitavas consecutivas? O problema foi resolvido no século XVII, utilizando-se a Progressão Geométrica.

Logo, entendido o problema de interpolação, pode-se dizer que o temperamento nada mais é do que a interpolação de 11 meios geométricos entre 1 e 2. Portanto, a partir da fórmula do termo geral da P.G., fica simples determinar a relação numérica entre os sons.

É esse um dos fatores de articulação entre a matemática e a música. E relaciona-se com a MM, pois se pode explicar um fenômeno de outra área do conhecimento, a música, situação do mundo real, por meio de um conceito matemático, Progressão Geométrica. Isto é modela-se a organização dos sons pela PG..

4. Processos Metodológicos

A pesquisa foi realizada nas dependências de um colégio localizado na Grande São Paulo, com os alunos dos segundos anos do Ensino Médio, A e C, nos quais um dos pesquisadores é professor.

Previamente à consecução das atividades de MM, verificamos junto à coordenação pedagógica a possibilidade de realização das mesmas, com os argumentos de que a metodologia teria o potencial de despertar o interesse dos alunos, tornando-os mais autônomos. Prontamente, houve a permissão para que os trabalhos se iniciassem.

Os dois pesquisadores buscaram intervir o menos possível durante a realização das atividades, mas ao mesmo tempo preocupavam-se em adequá-las às etapas de modelagem matemática, segundo Bassanezi (2013). Os trabalhos foram realizados em três encontros de uma hora e trinta minutos cada:

Primeiro encontro:

Dois alunos da turma do 3º A, que estudam música, fizeram uma apresentação, por meio de *slides,* sobre o significado dos símbolos que representam sons. Utilizando um teclado que, sincronizado aos movimentos dos pés, apresentavam o significado do som. A ideia subjacente às explicações era a de que o som não pode ser visto, no entanto, pode ser representado. Sanadas as dúvidas, teve início uma ampla discussão sobre o contexto histórico, a importância de Pitágoras no desenvolvimento da primeira escala musical e o fato de ele ter o agnome de pai da música.

Segundo encontro:

O encontro teve início a partir de revisão dos conhecimentos sobre o conceito matemático Progressão Aritmética, o qual havia sido ensinado em aulas anteriores. Foram solicitados, aos alunos, exemplos de Progressões Aritméticas. A partir desses exemplos retomamos o conceito de sequências. Foram solicitados exemplos de sequências crescentes, decrescentes e constantes. Discutidos os exemplos, foi solicitado que se encontrasse o vigésimo termo de uma Progressão Aritmética e que se explicitasse o modo mais eficiente de obter tal número. Com isso, em conjunto, pesquisadores e alunos, foi escrito na lousa o conceito de Progressão Aritmética, assim como a fórmula do termo geral de uma P.A.

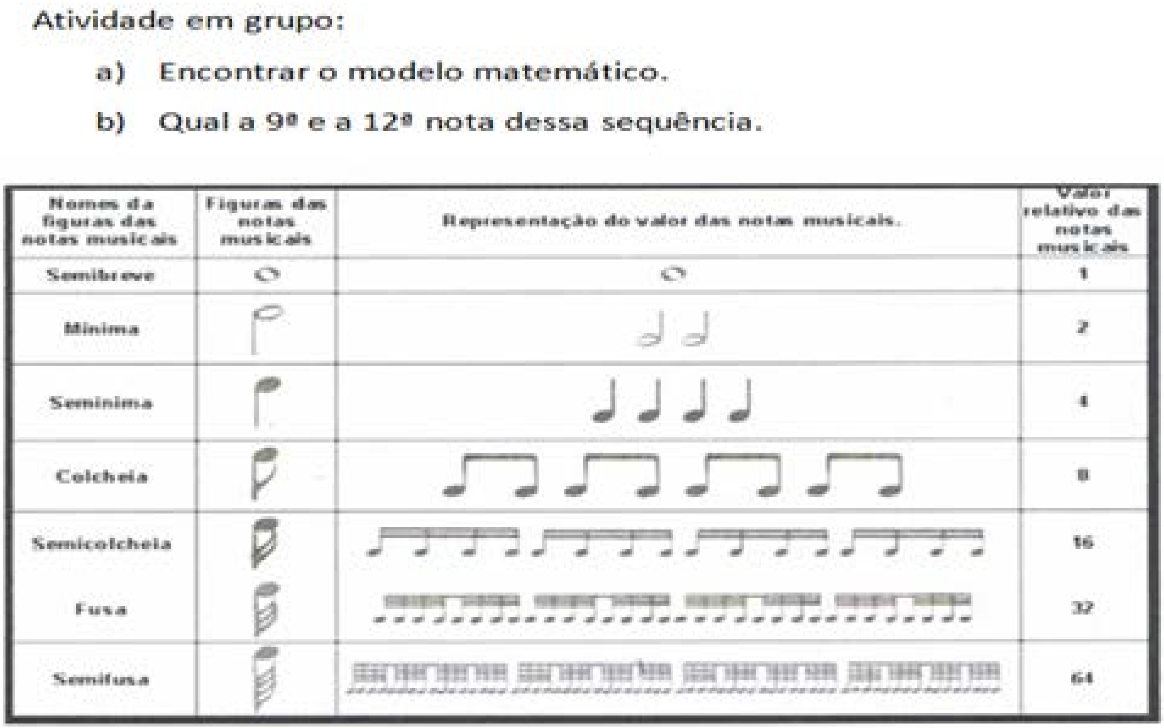
Progressão Aritmética* é *uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior adicionado a um número fixo, chamado razão da progressão.

A fórmula do termo geral de uma P.A. é dada por $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)\cdot r}$

Esse processo se deu de modo rápido e tranquilo, pois de uma maneira geral os alunos se apropriaram bem do conceito de P.A. e, aqueles que apresentaram alguma dificuldade foram auxiliados pelos colegas do grupo durante a validação da fórmula do termo geral.

Em seguida foi proposto que os alunos, organizados em grupos de 4, analisassem o gráfico da subdivisão de valores (Figura 2) e, encontrassem um modo de expressar matematicamente (modelo matemático) a divisão dos sons.

Figura 2: Gráfico da subdivisão de valores.



Atividade em grupo:

a) Encontrar o modelo matemático.

b) Qual a 9ª e a 12ª nota dessa sequência.

Nomes da figuras das notas musicais	Figuras das notas musicais	Representação do valor das notas musicais.	Valor relativo das notas musicais
Semibreve			1
Mínima			2
Semínima			4
Colcheia			8
Semicolcheia			16
Fusa			32
Semifusa			64

Fonte: Imagens de representação do valor das notas musicais

Os alunos receberam uma cópia da atividade a ser realizada em grupo e houve uma ampla discussão, a partir da forma geral de uma Progressão Aritmética, a qual representa um modelo matemático que nos permite calcular qualquer elemento da sequência. Também, foram registradas na lousa as definições dadas por Bassanezi à Modelagem Matemática e a Modelo.

A MM é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Modelo Matemático e o conjunto de símbolos e relações matemáticas que de alguma forma representa a situação a ser modelada.

Também, destacou-se que a importância da MM está na concisão da linguagem, apta a expressar novas ideias com clareza, sem ambiguidades, proporcionando um grande arsenal de resultados que permita usar métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas.

Terceiro encontro

Nesse dia, eles apresentaram os modelos e fizeram a validação dos mesmos, respondendo à questão solicitada. Aqui apresentamos algumas das soluções propostas pelos grupos.

Figura 3: uma das resoluções apresentadas.

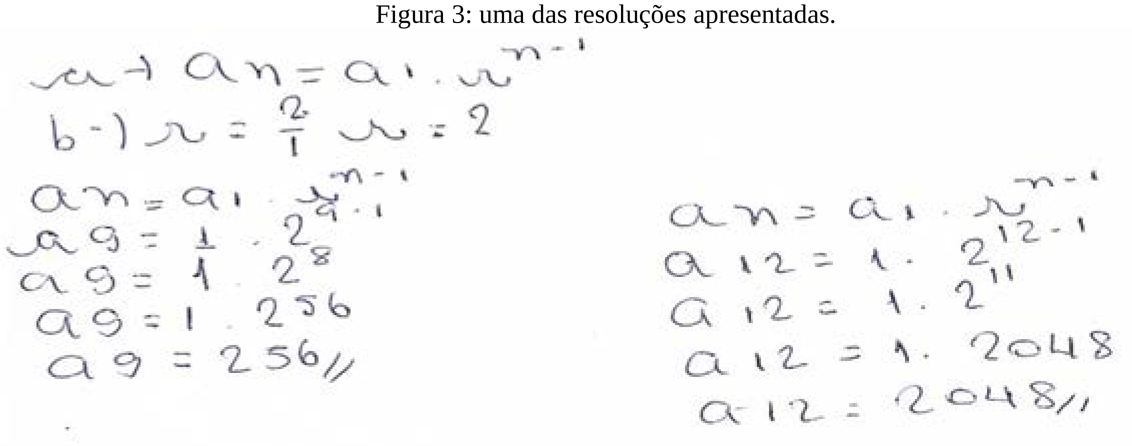


Figura 4: uma das resoluções apresentadas

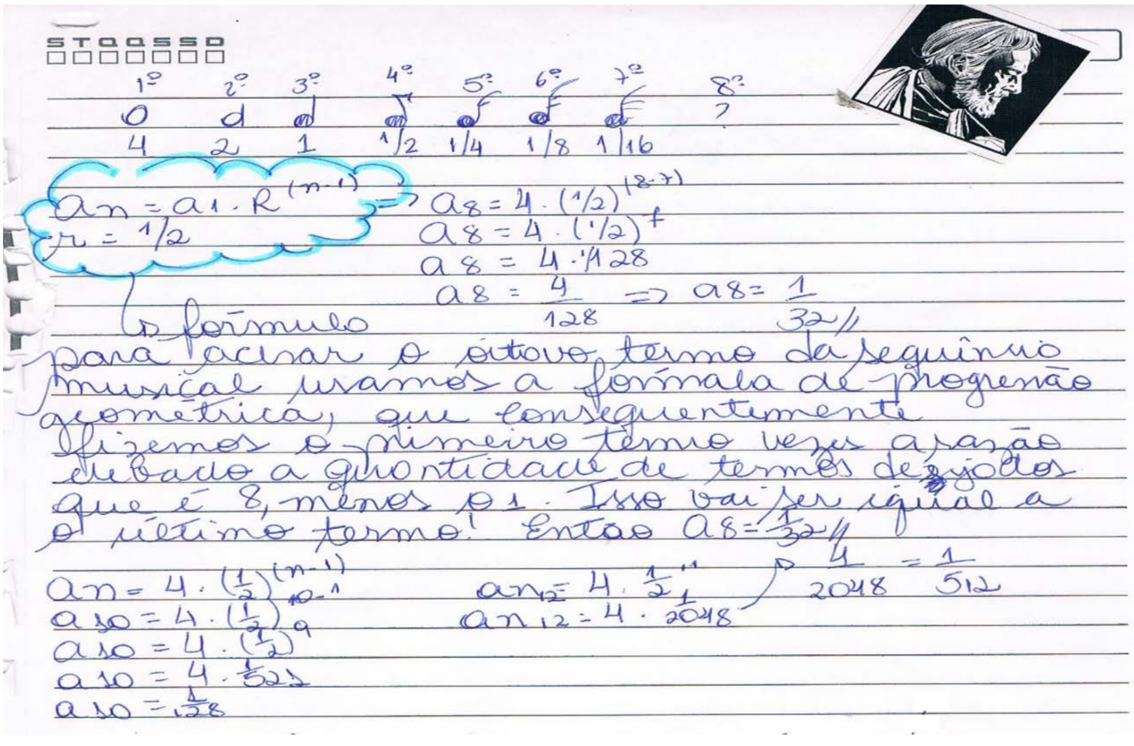
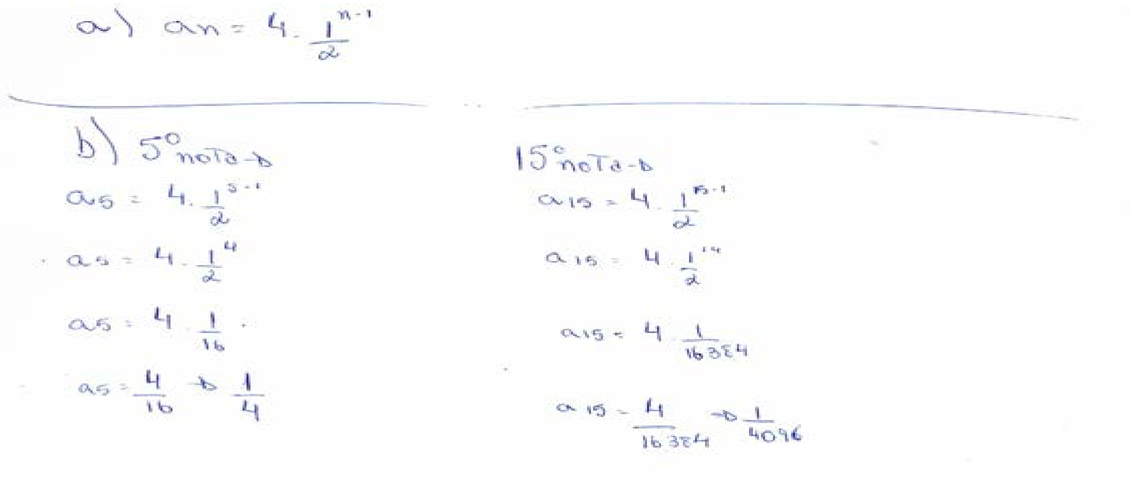


Figura 5: Uma das resoluções apresentadas.



Nota: Os alunos foram alertados sobre a necessidade do uso de parênteses em $a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Destacamos que após termos optado pela estratégia de MM sugerida por Bassanezi (2013), fomos fiéis à sua implementação. Quando foram citados os três encontros com os grupos para a consecução do processo da modelagem, seguimos as atividades intelectuais envolvidas no processo de modelagem que o autor divide em cinco etapas.

Nesse último encontro, discutimos acerca da necessidade de formalização dos conceitos, isto é, o uso adequado da linguagem matemática, a qual deve ser padronizada.

Nesse momento, os alunos foram solicitados a fornecer uma definição adequada para P.G., assim como, obter a fórmula do termo geral correspondente. Os pesquisadores fizeram os registros na lousa, a partir do que os discentes sugeriam e, quando necessário eram efetuados ajustes no que concerne à linguagem e ao rigor matemático.

Progressão geométrica é uma sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número fixo, chamado de razão da progressão.

A fórmula do termo geral de uma P.G. é dada por $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

5. Conclusões finais

Durante a realização da atividade, percebemos que houve grande mobilização por parte dos alunos em face do desafio que lhes foi proposto, isto é, obter o modelo matemático em questão, bem como encontrar soluções das atividades que foram propostas na sequência. Isso também é resultado da metodologia ativa de ensino que se procurou implementar.

Vale destacar que a experiência com a aplicação da MM em sala de aula foi acompanhada também por vicissitudes. Detectamos posturas, por parte de alguns dos alunos, resistentes à implementação da atividade nos moldes que foi sugerida. A concepção é de que houve certa oposição por parte desse pequeno grupo no sentido de assumir sua parcela de responsabilidade no processo de aprendizagem. Isto se deve a utilização do livro didático como único instrumento de estudo. Este geralmente utiliza-se do objeto de estudo para então explorá-lo em situações-problema, as quais, em geral, têm pouca relação com fenômenos reais.

Apresentar, por exemplo, a sequência, (4, 8, 16, 32, 64), para, a partir dela, conceituar Progressão Geométrica, é um modo tradicional de se apresentar ao aluno o objeto matemático a ser estudado. Esta é exatamente uma das barreiras a serem transpostas, que de acordo com Bassanezi (2013), implica na adoção por parte dos docentes de processos alternativos para a transmissão e aquisição de conhecimentos.

Na literatura acerca da aplicação da MM na educação, os autores defendem a MM na educação como uma alternativa ao modo tradicional de se ensinar, mas não a colocam como a "solução para todos os problemas", visão que nós pesquisadores compartilhamos. Nessa mesma literatura sobre o tema há relatos objetivos de que muitos professores são contrários à adoção da MM, apresentando como alegação: programa a ser cumprido e o tempo disponível para isso; reação desfavorável dos alunos ante a metodologia; insegurança com relação à implementação do método.

Nossa constatação é de que precisamos apresentar aos discentes alternativas que se sobreponham às formas tradicionais de ensinar. Tudo começa com uma pequena semente que é lançada. Uma abordagem diferente, que questione os modelos matemáticos mais básicos, como por exemplo, em geometria quando se ensina o conceito de área buscar situações que envolvam figuras elementares do nosso dia a dia, como quadrados, retângulos e círculos, por exemplo. Ou mesmo trabalhar com o conceito de volume de um sólido geométrico, a partir de objetos comuns encontrados nos supermercados, farmácias e outros estabelecimentos. Caixas que podem ser desmontadas e medidas podem representar um bom começo.

Estamos conscientes dos muitos desafios e dificuldades a que nós educadores estamos submetidos e, cientes de que o destino da escola não está nas mãos apenas dos professores.

Para suplantar o descompasso entre o ensino e a aprendizagem, numa relação em que essa segunda se encontra fragilizada em função da imposição de que seja exibida como um resultado quase imediato do ensino faz-se necessário, que o contrato que une a escola e a sociedade seja reformulado e, os atores aí envolvidos estejam conscientes de seus papéis para que tenhamos avanços significativos na educação matemática.

6. Referências

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** 5. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

FIALHO, F. A. P.; SOUZA, A. C.; OTANI, N. **TCC:** métodos e técnicas. Santa Catarina: Visual Books, 2007.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2009.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.