TEORIA DOS JOGOS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Frederico Augusto de Almeida Kasper[1]

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma atividade para o Ensino Médio que teve por base pressupostos da Teoria dos Jogos, concebendo que tal teoria oferece instrumental para o desenvolvimento do pensamento matemático por meio de um aprendizado ativo, e que incentive os alunos a se tornarem protagonistas de seu próprio processo educacional. A pesquisa que resultou na atividade teve como fonte material bibliográfico incluindo documentos oficiais. Utilizamos a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau (1996), como referencial metodológico para elaborar e analisar a sequência didática, procurando pautar sua construção, na seleção de temas atuais, de interesse público geral e próximo à realidade da vida cotidiana. A investigação forneceu parâmetros do como, pela Teoria dos Jogos, conceber atividades didáticas adequadas às necessidades educativas atuais, sobretudo no que diz respeito a tornar o ensino da Matemática mais interessante e de modo a favorecer a participação dos estudantes, desenvolvendo a imaginação, a investigação e o prazer em aprender.

Palavras-Chave: Jogos de estratégia, Teoria dos Jogos, Teoria das Situações Didáticas, Ensino Médio, Sequência Didática.

ABSTRACT

This work aims to present a motivational teaching technique sequence to the High School curriculum that contributes to develop a mathematical thinking and motivate students to participate in the educational process. Based on a qualitative approach and several researches about games as a pedagogical strategy, this study also analyzes ideas offered by official pieces. The Didactics Situations Theory by Guy Brousseau (1996) was used as reference to elaborate and analyze teaching techniques. Current daily life experiences and general public interests situations were chosen to develop the Activity Guideline. The study enables us to conclude that the Game Theory is an important asset to adapt the school curriculum to the current educational needs, bringing the mathematical teaching to a more participative level and rescuing the school ambiance from being outdated, to an ambiance that motivating creativity and the pleasure in studying and learning.

Key words: Strategy Games, Game Theory, Didactics Situations Theory, High School, Teaching Technique Sequence.

[1] Licenciado em Matemática pela PUC/SP.
e-mail: kasper@basenaweb.com.br

Introdução

A situação em que se encontra a Educação brasileira impõe desafios dos mais relevantes. Desatar o nó górdio formado pelo conteúdo escolar, a realidade dos professores e a vontade de estudar dos alunos, constitui tarefa primordial para qualquer sociedade que planeja prosperar de maneira justa e sustentável. Faz-se necessário transcender a abordagem tradicional de ensino e de aprendizagem, que hoje é compartimentada e descontextualizada, e buscar provocar no aluno, que se encontra numa postura passiva, a força motivadora que o leve a trilhar o próprio caminho e a construir o próprio aprendizado. Para isso, precisamos pensar em métodos de aprendizado ativo, divertido e participativo.

Neste trabalho investiga-se o uso da Teoria dos Jogos buscando nela características favoráveis ao desenvolvimento de habilidades que despertam o interesse dos alunos e possam promover sentimentos afetivos em relação aos conteúdos abordados em sala de aula. Com alta aplicabilidade em diversos ramos da sociedade, além de uma estrutura constituída de situações-problema, modelagem matemática e jogos de estratégia, a Teoria dos Jogos é uma possibilidade interessante e merece a atenção de pesquisadores comprometidos com a busca de métodos pedagógicos eficazes.

Justificativa da Pesquisa

O Ensino Médio possui duração mínima de três anos (LDB, Art. 35), com oferta preferencial à população de 15 a 17 anos. No Brasil, essa fase encerra a Educação Básica, sendo o elo entre o Ensino Fundamental e o Ensino Superior. É uma etapa muito importante da educação, pois nela os alunos começam a delinear suas opções profissionais. Atualmente, o Ensino Médio atravessa uma fase crítica.

> Hoje, o Ensino Médio encontra meninos e meninas desanimados e com dificuldades nas aulas, que vão ficando mais complexas. É um convite para a evasão escolar. Na prática, metade de quem começa a estudar no Brasil não termina o Ensino Médio. (FOLHA DE SÃO PAULO, 2016, p.3).

O Ideb (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) obteve, em 2015, o pior resultado desde o início da série histórica.

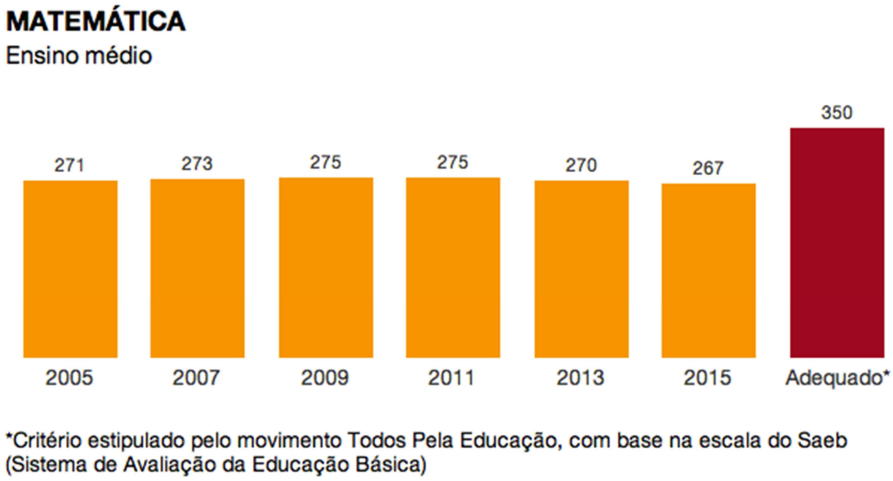

Figura 1 – Série histórica do Ideb Ensino Médio (FOLHA DE SÃO PAULO, 08/09/2016)

Esse índice, principal referência da Educação Básica no país, é calculado a cada dois anos, por meio de uma combinação entre taxa de aprovação e o fluxo escolar (repetência e evasão).

Grando (2000) aponta algumas possíveis causas dessa situação, como:

> [...] a passividade dos alunos, o acúmulo de informações, a pouca experimentação, os altos índices de reprovação em Matemática e a grande dificuldade dos alunos em estabelecer relações lógicas nas aulas de Matemática. (GRANDO, 2000, p.13).

Estudos mostram que, atraídos pelos estímulos vivenciados fora das dependências escolares, muitos alunos abandonam a escola e seguem caminhos, algumas vezes, controversos. Esse cenário caracterizado por evasão, repetência e baixa proficiência escolar agrava as condições de exclusão social e precisa ser enfrentado, pois, impacta nos processos de trabalho, educação e saúde. D'Ambrosio (1996) *apud* Grando (2000, p.10) "defende um redimensionamento dos objetivos da escola – os quais, hoje, se apresentam vinculados a uma apresentação de conhecimento obsoleto, ultrapassado e, muitas vezes, morto."

A proposta deste trabalho é investigar se a Teoria dos Jogos pode ser um recurso eficaz na elaboração de uma sequência didática, voltada para o Ensino Médio, com potencial de acrescentar significado ao processo de aprendizagem do aluno e também contribuir para o desenvolvimento de práticas docentes mais criativas e atraentes.

Delimitação do Problema

Conforme destacado por Feliciano (2007), atualmente, a Teoria dos Jogos possui grande aplicabilidade em diversas áreas da atividade humana, como por exemplo: Política, Negócios, Medicina, Economia, Estratégias Militares, Esportes, Lazer, etc. Sua estrutura conceitual apresenta situações-problema por meio de jogos de estratégia e utiliza modelagem matemática como forma de representação. Esses elementos podem facilitar a execução de abordagens pedagógicas por apresentarem cenários identificados com a realidade, permitindo ao docente relacionar temas escolares com acontecimentos cotidianos.

Tais características convergem para as sugestões contidas nos PCNEM.

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 2000, p.40).

Assim, considerando a natureza da Teoria dos Jogos de grande aplicabilidade, emprego de situações-problema e utilização de modelagem matemática, buscamos responder nesta pesquisa a questão: A Teoria dos Jogos apresenta potencial para tornar o ensino da Matemática mais participativo e despertar o interesse dos alunos em relação ao aprendizado desta disciplina?

Delimitamos, desta forma, o problema que deverá orientar o progresso da pesquisa, procurando contribuir para o debate de uma concepção curricular para o Ensino Médio, que deve ao mesmo tempo, expressar utilidade e se mostrar prospectiva.

Pesquisas Balizadoras

“A literatura sobre questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem deixa claro que sem um agente motivador, dificilmente o aprendiz se torna disponível para o processo educativo, ocorrendo apenas uma aprendizagem mecânica e não uma aprendizagem significativa.” (TEIXEIRA & APRESENTAÇÃO, 2014, p.304).

As pesquisas mostram que a utilização de jogos em sala de aula pode valer-se da função de agente motivador e criar um ambiente descontraído de integração social que favoreça a aprendizagem significativa, desenvolvendo habilidades como criatividade, pensamento lógico e resolução de situação problema. Feliciano (2007) utiliza a definição de jogo elaborada pelo historiador holandês, Johan Huizinga, em seu livro Homo Ludens, de 1938.

> O jogo é uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e de espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias; dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da vida cotidiana. (FELICIANO, 2007, p.13).

Strapason (2011) destaca que, ao longo da História, é possível observar a ligação entre jogo e aprendizagem em diversas classes sociais. Segundo a autora, a ideia de "aprender brincando" surgiu com Platão, ao dizer que aqueles que jogam têm a oportunidade de desenvolver-se física, afetiva, social e moralmente. Posteriormente, Aristóteles indicou a utilização de jogos como preparação das crianças para a vida adulta, ou seja, a formação de valores para convivência em sociedade.

> [...] mais tarde os humanistas começaram a enxergar os jogos como um "recurso educativo" propriamente dito, ou seja, com fins de educação escolar, inicialmente para a leitura e para o cálculo, e [...] como "instrumento de aquisição de conhecimento" para qualquer disciplina. (STRAPASON, 2011, p.15).

Conforme Teixeira & Apresentação (2013), os jogos possuem uma dimensão lúdica, voltada para a diversão e prazer, e uma dimensão educativa, aquela que favorece a construção de conhecimentos escolares. Cabe ao professor determinar a exata medida nas atividades propostas aos alunos para que os objetivos pedagógicos sejam alcançados. O professor deve ser o mediador entre os alunos e o conhecimento, "ora como observador, juiz e organizador, ora como questionador, enriquecendo o jogo, mas evitando interferir "muito" no seu desenrolar." (GRANDO, 2000, p.36).

Strapason (2011) corrobora os autores acima:

> O jogo escolhido pelo professor não deve propiciar ao aluno somente diversão, mas deve explorar o desenvolvimento de habilidades de organização, concentração, observação, análise, levantamento de hipóteses, reflexão, tomada de decisões e argumentação, além das competências e habilidades específicas em relação à resolução das situações-problemas [...] (STRAPASON, 2011, p.36).

Devemos ressaltar que a proposta deste trabalho não sugere a substituição das atividades em sala de aula por situações de jogo. Investigamos o objeto como uma possibilidade complementar e facilitadora da construção de conceitos e saberes escolares. Também, vale atentar para o adequado tempo necessário de aplicação das atividades, bem como a geração de ruídos pelos alunos, que pode atrapalhar o trabalho das salas adjacentes. Dedicando-se a um cuidadoso planejamento da ação educativa, o docente aumentará as chances de ser pedagogicamente bem sucedido.

Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) são documentos elaborados pela Secretaria de Educação Fundamental, vinculada ao Ministério da Educação (MEC). Nesses documentos está contida uma série de orientações sobre o desenvolvimento de projetos pedagógicos escolares, bem como sugestões de atividades a serem realizadas pelos professores em salas de aula. Os documentos estão organizados em 4 volumes: o primeiro de 1997, trata do primeiro ciclo (2º e 3º anos) e do segundo ciclo (4º e 5º anos), o segundo de 1998, do terceiro ciclo (6º e 7º anos) e do quarto ciclo (8º e 9º anos), ambos relativos ao Ensino Fundamental. (TUPINAMBÁ, 2013, p.22).

Tupinambá (2013) ainda esclarece que o PCNEM (2000) é composto por um único volume organizado em quatro partes: 1ª - Bases Legais; 2ª Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; 3ª Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 4ª Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Por fim, as orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, que não possuem caráter normativo, foram destinadas ao PCN+.

Vale mencionar Espinoza (2013) que ao comparar os PCNEM e os PCN+, mostra que enquanto o primeiro documento é muito genérico nas suas recomendações, os PCN+ contêm detalhes e sugestões de organização do conteúdo, muito valiosas para o professor de Matemática.

As sugestões de utilização de jogos como estratégia pedagógica, encontram-se, principalmente, nos Parâmetros Curriculares que abordam o terceiro e o quarto ciclos do Ensino Fundamental. Dentre elas, destacamos:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p.46).

O PCNEM não menciona orientações em relação ao uso de jogos em atividade escolares, porém apresenta elementos com características que vão ao encontro das atividades pesquisadas neste trabalho, como, por exemplo, o trecho destacado abaixo:

> O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. (BRASIL, 2000, p.78).

Ao mesmo tempo, encontramos no PCN+ argumentos que indicam benefícios de ações características da aplicação de jogos:

> Um importante recurso para o desenvolvimento das competências é o trabalho em grupo. Apesar de rejeitado por muitos, sob alegação de que os alunos fazem muito barulho e não sabem trabalhar coletivamente, essa modalidade de trabalho é valiosa para várias das competências que se deseja desenvolver. (BRASIL, 2002, p.129)

Dessa forma, constatamos que as pesquisas selecionadas para este estudo e os documentos oficiais descritos acima estão em consonância e vão ao encontro de práticas pedagógicas que buscam a construção de métodos de ensino/aprendizagem eficazes.

Teoria das Situações Didáticas

Primeiramente, vale ressaltar que iremos balizar o estudo da Teoria das Situações Didáticas a uma síntese de seus conceitos elementares com vistas a obter os elementos que permitam a elaboração da sequência de ensino proposta nesta pesquisa.

Guy Brousseau, desenvolveu sua teoria no âmbito da A Didática da Matemática, um ramo da Educação Matemática originada na França a partir da década de 60 e desenvolvida pelo IREM (Instituto de Investigação do Ensino de Matemática). Essa teoria teve por alvo compreender as relações pedagógicas que ocorrem dentro da sala de aula entre professor, aluno e o saber matemático. Os principais conceitos foram publicados em sua tese de doutorado, de 1986. Esses conceitos são: situação didática; contrato didático; devolução; milieu[2] (antagonista e aliado) e situação adidática.

Segundo Brousseau (1996a), uma situação didática caracteriza-se pelo conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente em um sistema didático (Figura 2) com o objetivo de reproduzir e aperfeiçoar os processos de aquisição de conhecimento escolar.

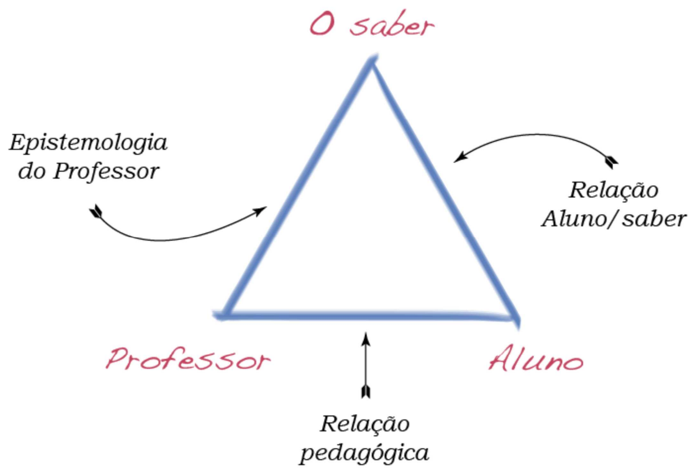

Figura 2 – Sistema Didático Stricto Sensu ou Triângulo Didático

Assim, Brousseau (1996a,b) buscou caracterizar os papéis do aluno, do professor e do saber frente às situações de aprendizagem em Matemática, sendo que inicialmente, professor e aluno possuem uma relação assimétrica em relação ao saber. Portanto, cabe ao docente inicialmente procurar situações de aprendizagem em que os alunos imprimam sentido às informações, por meio de contextualização e personalização do saber; e depois orientar os alunos no sentido inverso, descontextualizando e despersonalizando o conhecimento, para que esse seja reutilizado em diferentes cenários e novas situações. Por sua vez, espera-se que o aluno aceite a devolução do problema, ou seja, que ele assuma a responsabilidade frente ao processo de sua própria formação, que tenha iniciativa, desenvolva autonomia e seja o protagonista na resolução das atividades propostas. Definidos os papéis dos sujeitos frente ao saber escolar, fica

[2] O termo em francês ‘milieu’ não tem sido traduzido pelo termo, em português, meio, para manter o aspecto da intenção didática imanente ao conceito proposto por Brousseau.

configurado o contrato didático, que pode ser entendido como um conjunto de normas, geralmente implícitas, que norteiam as intenções recíprocas do professor e dos alunos, em relação à situação didática.

Breve Histórico da Teoria dos Jogos

De acordo com Feliciano (2007), o matemático John Von Neumann[3] apresentou as bases da Teoria dos Jogos em 1928, com a publicação do artigo intitulado *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. Graminho (2013) e Salgado (2009) acrescentam que Von Neumann e Oskar Morgenstern lançaram, em 1944, o livro "*Theory of Games and Economic Behavior*", incluindo, de forma definitiva, a Teoria no meio científico, ao enunciar teoremas gerais e analisar escolhas econômicas que buscam maximização dos resultados por meio de jogos de estratégia. Em 1994, os matemáticos John Nash, John Harsanyi e Reinhard Selten ganharam o prêmio Nobel de Economia utilizando e ampliando os conceitos da Teoria dos Jogos em seus trabalhos. A análise de Nash dilatou o espectro da Teoria sendo precursor da abordagem "ganha-ganha"[4], distinguindo-se do enfoque exclusivamente não-cooperativo utilizado até então. (GRAMINHO, 2013).

Em 2001 mais um trabalho de Economia, valendo-se da Teoria dos Jogos, foi agraciado com o Prêmio Nobel. Os pesquisadores Joseph Stigliz, George Akerlof e Michael Spence foram laureados devido ao desenvolvimento das questões envolvendo informações assimétricas[5]. Atualmente, as análises sob a luz da Teoria dos Jogos, se alastraram para os campos da Filosofia, História, Ética, Ciências da Computação, Direito, Biologia, Ciências Políticas, etc.

Estrutura da Teoria dos Jogos

Graminho (2013) afirma que a Teoria dos Jogos é um estudo matemático de interações entre jogadores que buscam maximizar os ganhos ou minimizar as perdas de forma racional e conscientes de que as escolhas estratégicas de um, afetam as decisões estratégicas dos demais participantes.

---

[3] John von Neumann, (1903- 1957), matemático húngaro considerado o pai da Teoria dos Jogos.
[4] Ganha-ganha é o termo que define uma relação bilateral vantajosa para ambas as partes.
[5] Informação assimétrica é o fenômeno que ocorre quando uma das partes de uma transação possui conhecimentos quantitativos e/ou qualitativos superiores às demais.

> Sua grande relevância está na possibilidade de traduzir problemas complexos em esquemas estilizados e simples, possibilitando visão da inter-dependência entre os resultados das partes por meio da lógica matemática. (GRAMINHO, 2013, p.53).

Salgado (2009, p.178) defende que “a inovação trazida pela teoria é a análise estratégica dos participantes não somente das suas ações, e sim dos objetivos e possibilidades de seus adversários, facilitando a tomada de decisão e a conquista de suas metas.”

Os elementos básicos estruturais da Teoria dos Jogos, necessários à compreensão e análise do objeto deste estudo, são:

- **Jogo:** é um modelo matemático, que expressa opções de decisão seguindo regras formais, em que agentes racionais (jogadores) agem no sentido de maximizar a utilidade de suas ações, considerando as reações de outros agentes.

- **Jogador:** é qualquer agente com capacidade de decisão para afetar os demais participantes do jogo. O jogador poderá ser uma pessoa, uma equipe, uma empresa, uma nação, etc. Conjunto de jogadores: $P = \{ i, j, k, l, \ldots , n \}$

- **Racionalidade ou pensamento estratégico:** é a consciência de que a ação de um jogador afeta os demais participantes. Em outras palavras, admite-se que cada jogador conhece os objetivos de seu oponente e que suas ações influenciam, mas não determinam o resultado do jogo.

- **Estratégia:** é a descrição de como um jogador deverá agir para alcançar um determinado objetivo. Podemos relacionar diferentes estratégias nos seguintes modos:

  $\alpha \succ \beta$: Estratégia *Alfa* é preferível em relação à estratégia *Beta;*

  $\alpha \sim \beta$: Estratégia *Alfa* é indiferente à estratégia *Beta;*

  $\alpha \prec \beta$: Estratégia *Beta* é preferível em relação à estratégia *Alfa.*

Conjunto de estratégias do jogador *i* : $S_i = \{s_i^1, s_i^2, s_i^3, \ldots, s_i^n\}$

- **Pay-offs:** são as recompensas, os resultados ou os ganhos almejados pelos jogadores. Seus valores são arbitrados pelo pesquisador, sendo mais ilustrativos do que matematicamente exatos. A importância do *pay-off* reside na possibilidade de demonstrar as inter-relações (combinações) entre as estratégias e o quanto elas influenciam uma às outras.

Pay-off do jogador i é a função, $u_i(s)$, que representa a recompensa (ou utilidade) da estratégia s para o jogador i, com $s \in S_i$.

$$u_i : S_i \to \Re$$
$$s \to u_i(s)$$

Uma função de utilidade é a quantificação numérica das preferências de uma pessoa com relação a certos objetos, ou seja, é a tradução de ganhos qualitativos em números. (FELICIANO, 2007).

Como será mostrado adiante, na Teoria dos Jogos, descrevemos um jogo (situação de disputa) na forma de situação-problema e elaboramos sua modelagem matemática por meio de uma Matriz de Resultados ou Matriz *pay-offs.* Essa Matriz deve mostrar os jogadores, as estratégias e os valores dos possíveis *pay-offs*, da seguinte forma: jogadores e estratégias são listados em linhas e colunas e, em cada célula correspondente são apresentados, em forma de par ordenado, os ganhos de cada jogador. (GRAMINHO, 2013).

Tipos de Jogos

Os jogos podem ser categorizados segundo critérios e parâmetros definidos conforme o resultado, tipo de informação ou de acordo com a quantidade de repetições de jogadas.

A seguir, descreveremos, de forma abreviada, algumas modalidades de jogos com base nos trabalhos de Salgado (2009) e Graminho (2013):

a) **Jogos Cooperativos**: os jogadores desejam maximizar o resultado da coalizão e para isso colaboram uns com os outros. Porém, nos **Jogos Não Cooperativos** cada jogador se preocupa em maximizar seus próprios resultados independentemente do resultado coletivo.

b) **Jogos Simultâneos**: são aqueles em que os jogadores movem-se simultaneamente e as jogadas de ambas as partes ocorrem no mesmo momento. Nos **Jogos Sequenciais**, cada jogador se movimenta separadamente, um por vez, tendo os movimentos intercalados.

c) **Jogos de Informação Simétrica**: ocorrem quando todos os jogadores conhecem as mesmas e suficientes informações a respeito dos possíveis resultados e da reputação do outro jogador. Nos **Jogos de Informação Assimétrica** uma das partes detém mais ou toda a informação e a outra parte a ignora.

d) **Jogos de Informação Perfeita**: todos os jogadores conhecem todas as informações disponíveis, inclusive os movimentos prévios feitos por todos os outros jogadores (neste caso somente os jogos sequenciais são de informação perfeita). Nos **Jogos de Informação Imperfeita** há informação privilegiada, e uma das partes pode blefar ou omitir informações a outra parte.

e) **Jogos Simétricos**: as estratégias são equivalentes para os jogadores, sendo assim intercambiáveis, ao contrário dos **Jogos Assimétricos** nos quais não há tal equivalência.

f) **Jogos de Soma Zero:** o resultado das escolhas é constante – sempre nulo – e um jogador só ganha com o prejuízo do outro, neste jogo a cooperação de um jogador acaba provocando sua própria derrota. Nos **Jogos de Soma Não-Zero** os participantes têm interesses tanto comuns como opostos, e o resultado é positivo ou negativo para ambos. Os **Jogos de Soma Positiva** são denominados quando todos os jogadores ganham; o contrário ocorre com os **Jogos Soma Negativa**, em que todos os perdem.

g) Quanto à duração, podem ser classificados em: **Jogos Infinitamente Longos** que duram por número infinito de rodadas, **Jogos com Rodadas Finitas e Repetidas** com diversas, mas em quantidade finita de rodadas, e **Jogos de Rodada Única (*Single-shot Game*)** que possuem uma rodada apenas.

h) Quanto à quantidade de jogadores, podem ser: **Jogos *One-Player*** com apenas um jogador, **Jogos *Two-Players*** com dois jogadores, (o que é o mais usual na Teoria dos Jogos), **Jogos *Many-Players*** definidos por mais de três jogadores.

i) **Jogos de Ação Discreta** consistem em um número finito de participantes, roda- das ou resultados, desencadeando um conjunto finito de estratégias que podem ser representados num formato de **Matriz de *Pay-off*** (ou Matriz de Resultado). De forma inversa, nos **Jogos de Ação Contínua**, os jogadores podem entrar e sair do jogo, ou os resultados possíveis podem ser alterados entre as rodadas, produzindo um conjunto contínuo e alterável de estratégias.

Proposta de Sequência Didática para o Ensino Médio

Em sua estrutura fundamental, a Teoria dos Jogos utiliza jogos de estratégia para descrever situações problema requisitando modelagem matemática para análise e busca das soluções. Consideramos como vantajosa essa característica implícita à Teoria dos Jogos, pois está de acordo com as recomendações contidas nos trabalhos e documentos oficiais que constam no referencial teórico pesquisado.

O PCN (1998) afirma que:

> Nos jogos de estratégia (busca de procedimentos para ganhar) parte-se da realização de exemplos práticos (e não da repetição de modelos de procedimentos criados por outros) que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático. (PCN, 1998, p.47).

A aplicação de tarefas embasadas na Teoria dos Jogos pode ser viabilizada de maneira simples, sem a necessidade de elaboração ou aquisição de materiais e instrumentos complexos. Impressas em simples folhas avulsas, as situações-problema possibilitam o desenvolvimento de atividades em sala de aula (individual ou em grupo), tarefas para casa e também, como formas de avaliações diagnósticas, formativas e somativas.

A concepção da Sequência Didática

As situações-problema utilizadas nesta pesquisa são adaptações realizadas pelo autor. Foram elaboradas a partir do curso, de Teoria dos Jogos, oferecido pela Universidade de Yale, podendo ser acessado via *youtube*.

A seleção dos contextos das situações considerou os seguintes critérios:

- São próximos à realidade do aluno;
- Possuem relação com possíveis interesses do aluno;
- Mobilizam raciocínio lógico e estratégico;
- Destacam a importância da tomada de decisão consciente.

Atividade 1: O DILEMA DOS PRISIONEIROS

A primeira situação da sequência didática é uma adaptação do jogo "O Dilema dos Prisioneiros". Nessa atividade, objetivamos apresentar a dinâmica funcional da Teoria dos Jogos de forma lúdica e participativa. Para isso, propomos que o aluno se familiarize com o material e as regras do jogo durante uma partida de treinamento. Esse método ágil pode garantir a devolutiva de Brousseau, ou seja, o engajamento e compromisso do estudante com o processo pedagógico. Ao professor caberá, inicialmente, desempenhar o papel de orientador e guia da atividade, buscando encontrar o devido grau de antagonismo e aliança do 'milieu' que favoreça o domínio, cada vez maior, da estrutura do jogo.

Assim, na situação-problema que introduz a 1ª atividade, é esperado que o aluno reconheça a notação matricial, o par ordenado referente a cada estratégia, a organização das informações, o raciocínio lógico implícito ao jogo e que, ao longo desse processo, sociabilize com os colegas da classe.

Jogo 1: O DILEMA DOS PRISIONEIROS

Delcídio e Nestor foram detidos pelas autoridades por obstrução à justiça e deverão cumprir 3 anos de reclusão. São também suspeitos de participarem de um mega esquema de corrupção ligado a empresas estatais. Na delegacia, foram simultaneamente conduzidos coercitivamente para diferentes salas de interrogatório, onde eram esperados por um Procurador Geral da República. Importante ressaltar que os prisioneiros não tiveram tempo hábil para combinar versões do depoimento e, portanto, um não sabe ao certo como o outro irá se comportar. Com o objetivo de desvendar o caso de corrupção (o maior e mais grave), os procuradores oferecem as seguintes propostas:

- Aquele que colaborar com a Justiça e fizer delação premiada receberá o indulto de dois anos de prisão. Quem não confessar e caso seja comprovada culpa, pegará oito anos de prisão.

- Se ambos confessarem, a reclusão será de cinco anos para os dois.
- Se ambos não confessarem, serão condenados por obstrução de justiça e ficarão detidos por três anos.

Se você fosse um dos suspeitos, qual decisão (ou estratégia) adotaria nesta situação?

Figura 3 – Reprodução da Atividade 1

Modelagem matemática do Jogo 1

Como descrever a situação-problema acima em linguagem matemática?

Primeiramente, devemos identificar: os jogadores, suas estratégias e os respectivos prêmios (*pay-offs*) associados a cada estratégia. Para isso, organizamos todas as informações por meio da construção da Matriz de resultados (ou matriz *pay-offs*).

a) Construimos a Matriz 2x2 (pois, temos dois jogadores com duas estratégias cada.)

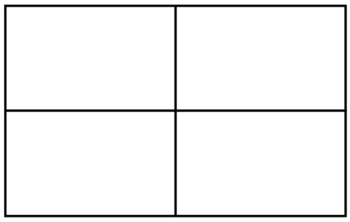

Figura 4 – Estrutura da Matriz *pay-offs* (etapa 1)

b) Identificamos os jogadores:

Delcídio - jogador 1 - linha

Nestor - jogador 2 - coluna

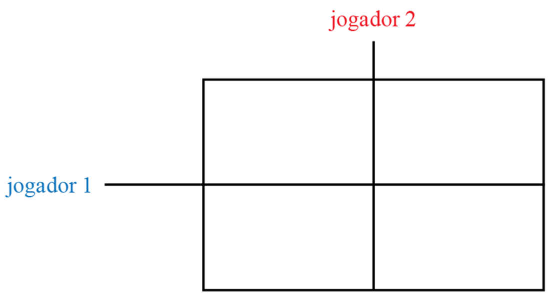

Figura 5 – Estrutura da Matriz *pay-offs* (etapa 2)

c) Estratégias

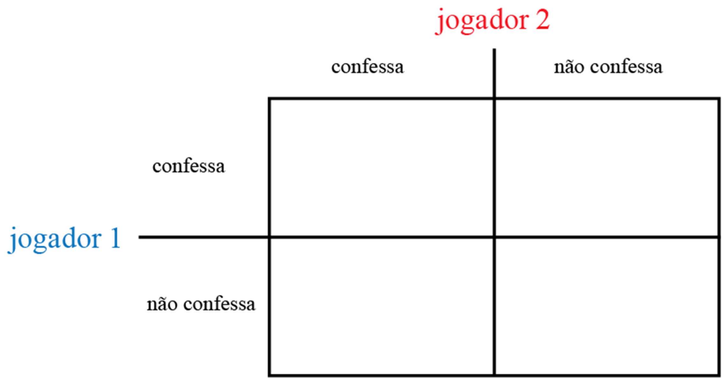

Figura 6 – Estrutura da Matriz *pay-offs* (etapa 3)

d) Prêmios (*Pay-offs*)

- Se Delcídio e Nestor optarem por confessar, ambos receberão 5 anos de reclusão.
- Se Delcídio optar por confessar e Nestor optar por não confessar, Delcídio receberá pena de 2 anos e Nestor, 8 anos de reclusão.
- Se Delcídio optar por não confessar e Nestor optar por confessar, Delcídio receberá 8 anos de prisão e Nestor, 2 anos.
- Se Delcídio e Nestor optarem por não confessar, ambos ficarão presos por 3 anos.

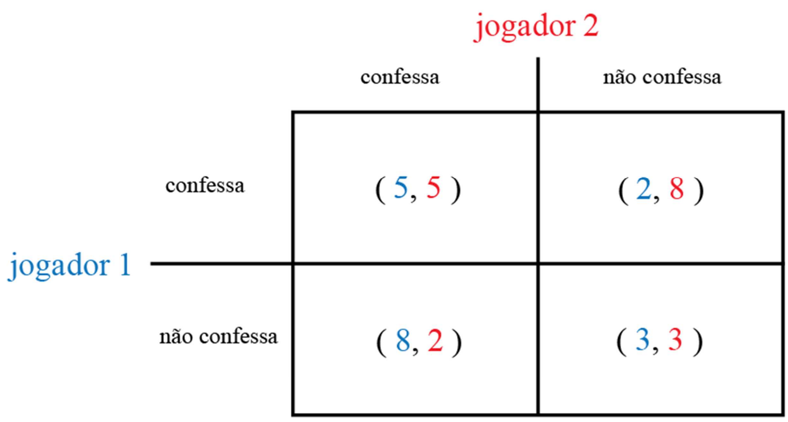

Figura 7 – Estrutura da Matriz *pay-offs* :Jogo 1

Deste modo, completamos o processo de modelagem matemática do jogo O Dilema dos Prisioneiros. Vale ressaltar que este modelo não é descrito por meio de funções, equações ou inequações. Essa característica pode ser um facilitador do desenvolvimento de atitudes positivas perante aos saberes escolares, pois apresenta uma forma diferenciada de abordar assuntos matemáticos.

Análise do jogo 1

Analisando o jogo sob a óptica do jogador 1:

Se o jogador 2 optar pela estratégia *confessar*, quais serão os possíveis prêmios do jogador 1?

5 : se optar também por *confessar,* ou

8 : caso a opção seja *não confessar*.

Constatamos que 5 $\succ$ 8, ou seja, o *pay-off* da estratégia *confessar* é preferencial ao *pay-off* da estratégia *não confessar*.

Se o jogador 2 optar pela estratégia *não confessar*, os possíveis prêmios do jogador 1 serão:

2 : se optar por *confessar,* ou

3 : se a opção também for *não confessar*.

Constatamos que 2 $\succ$ 3, ou seja, novamente o *pay-off* da estratégia *confessar* é preferencial ao *pay-off* da estratégia *não confessar*.

Assim, comprovamos que a estratégia *confessar* do jogador 1, domina sua estratégia *não confessar*. Com isso, podemos definir uma estratégia estritamente dominante como aquela cujos *pay-offs* correspondentes são preferíveis aos *pay-offs* das demais estratégias, independentemente das ações do oponente.

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \succ u_i(s_i^n, s_{-i}) \text{ , para todo } s_{-i}$$

De forma inversa, uma estratégia estritamente dominada é aquela cujos *pay-offs* correspondentes são inferiores aos *pay-offs* das demais estratégias.

Ao estudarmos o jogo sob a óptica do jogador 2, percebemos que sua estratégia *confessar* também domina a estratégia *não confessar*. Podemos deliberar, nesse caso, que ambos devam adotar a estratégia *confessar,* pois, ao jogá-la, terão garantido o melhor resultado para si.

Vale ressaltar que de acordo com os critérios de Salgado (2009) e Graminho (2013), O Dilema dos Prisioneiros é classificado como um jogo não cooperativo, de soma zero, simétrico e simultâneo.

Reflexões sobre o Jogo 1

Interessante notar que, no Jogo 1, uma escolha racional (optar pela estratégia dominante) pode levar a um prêmio menos vantajoso dentre os possíveis *pay-offs*, pois se ambos tivessem decidido pela estratégia *não confessar*, a pena seria de 3 anos, ao invés de 5 anos de reclusão. Porém, essa escolha teria como premissa a confiança de que o cúmplice também não viesse a confessar e, como apontado por Graminho (2013, p.32), “a confiança é, em essência, um comportamento de risco.”

Feliciano (2007) destaca que a análise de situações de conflito na lógica da Teoria dos Jogos não sugere a adoção de uma estratégia vencedora, mas sim, da estratégia mais vantajosa, independentemente da ação que o oponente execute. Dessa forma, os jogadores devem buscar a maximização do lucro mínimo ou a minimização da perda máxima. Esse critério chama-se MINIMAX ou MAXIMIN e está representado na figura a seguir:

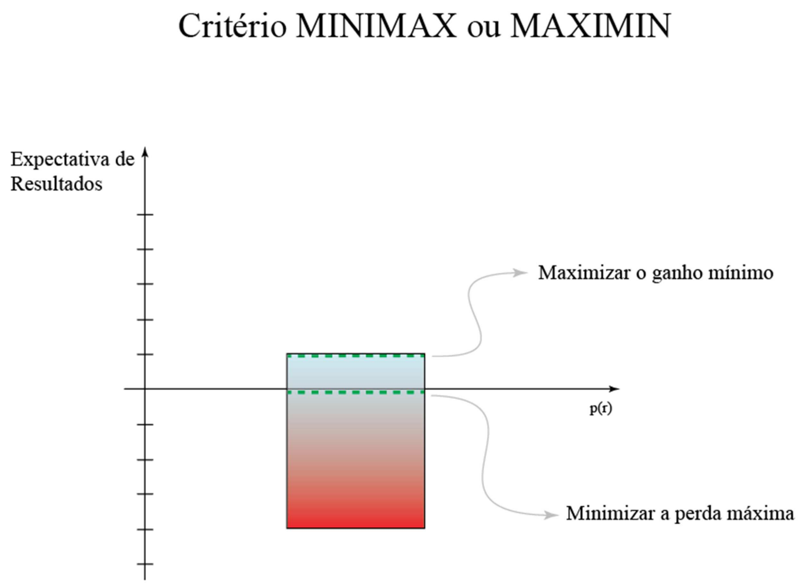

Figura 8 – Representação gráfica do critério minimax

Sumarizamos algumas diretrizes constituintes da Teoria dos Jogos:

01- Antes de adotar uma estratégia, devemos conhecer nossos objetivos.

02- Nunca optar por uma estratégia estritamente dominada.

03- Analisar o jogo sob a óptica do adversário.

04- Escolhas racionais não necessariamente levam a resultados mais vantajosos.

Atividade 2: A COBRANÇA DE PÊNALTI

Jogo 2: A COBRANÇA DE PÊNALTI (NEYMAR X HORN)

O Maracanã está lotado! Neymar se prepara para cobrança, ajeita a bola com carinho, recua alguns passos. - Após o jogo terminar empatado em 1 a 1, no tempo regulamentar e prorrogação, os times foram para os pênaltis. O Brasil vêm de uma dramática derrota de 7X1 sofrida frente a equipe alemã no mundial de 2015. Pela primeira vez na história, a seleção brasileira de futebol pode tornar-se medalha de ouro nas Olimpíadas. - Neymar encara o goleiro. A tensão é grande, se converter, o Brasil será campeão. A multidão prende a respiração em suspense. O juíz autoriza. Neymar corre em direção à bola. Coração na mão, olhos atentos, tudo pode acontecer!

Estabelecemos que o atacante possa chutar a bola em três direções: canto esquerdo (E), meio do gol (M) ou canto direito (D). Por sua vez, o goleiro pode optar em defender o canto esquerdo (e) ou o canto direito (d).

Dada a representação matemática da situação descrita acima, determine qual deve ser a estratégia adotada por Neymar para aumentar suas chances de marcar o gol?

		Horn	
		estratégia (e)	estratégia (d)
	estratégia (E)	(8, -4)	(4, -9)
Neymar	estratégia (M)	(6, -6)	(6, -6)
	estratégia (D)	(4, -9)	(10, -4)

A- Complete as lacunas das sentenças, determinando os *pay-offs* (função utilidade) referentes ao jogador 1 e suas respectivas estratégias, conforme os exemplos abaixo:

u_1 (E,e)	=	{8}	: *pay-off* do jogador 1 escolhendo a estratégia (E) contra (e)
u_1 (E,d)	=	{ }	: *pay-off* do jogador __ escolhendo a estratégia ( ) contra (d)
u_1 (,)	=	{ }	: *pay-off* do jogador __ escolhendo a estratégia (M) contra (e)
u_1 (M,d)	=	{6}	: *pay-off* do jogador 1 escolhendo a estratégia (M) contra (d)
u_1 (D,)	=	{ }	: *pay-off* do jogador __ escolhendo a estratégia (D) contra ( )
u_1 (,)	=	{ }	: *pay-off* do jogador __ escolhendo a estratégia ( ) contra ( )

B- Agora, indique o mesmo para o jogador 2.

C- Algm jogador possui uma estratégia dominante? Caso positivo, qual?

Figura 9 – Reprodução da Atividade 2

Análise do jogo 2

A) Determinando os *pay-offs* (função utilidade) referentes ao jogador 1 e suas respectivas estratégias

u_1 (E,e)	=	{8}	: *pay-off* do jogador 1 escolhendo a estratégia (E) contra (e)
u_1 (E,d)	=	{4}	: *pay-off* do jogador 1 escolhendo a estratégia (E) contra (d)
u_1 (M,e)	=	{6}	: *pay-off* do jogador 1 escolhendo a estratégia (M) contra (e)
u_1 (M,d)	=	{6}	: *pay-off* do jogador 1 escolhendo a estratégia (M) contra (d)
u_1 (D,e)	=	{4}	: *pay-off* do jogador 1 escolhendo a estratégia (D) contra (e)
u_1 (D,d)	=	{10}	: *pay-off* do jogador 1 escolhendo a estratégia (D) contra (d)

B- Fazendo o mesmo para o jogador 2:

u_2(E,e)	=	{-4}	: *pay-off* do jogador 2 escolhendo a estratégia (E) contra (e)
u_2 (E,d)	=	{-9}	: *pay-off* do jogador 2 escolhendo a estratégia (E) contra (d)
u_2 (M,e)	=	{-6}	: *pay-off* do jogador 2 escolhendo a estratégia (M) contra (e)
u_2 (M,d)	=	{-6}	: *pay-off* do jogador 2 escolhendo a estratégia (M) contra (d)
u_2 (D,e)	=	{-9}	: *pay-off* do jogador 2 escolhendo a estratégia (D) contra (e)
u_2 (D,d)	=	{-4}	: *pay-off* do jogador 2 escolhendo a estratégia (D) contra (d)

C- Algum jogador possui uma estratégia dominante? Caso positivo, qual?

Conforme podemos constatar, ambos os jogadores não possuem estratégia dominante. Trata-se de uma situação nova em comparação ao primeiro jogo. Pode-se elaborar um jogo em que apenas o oponente detenha a estratégia dominante (Kasper, 2016); e agora, na segunda atividade, nenhum dos jogadores parece ter uma escolha clara a fazer. Como proceder na análise do jogo de modo a obter a melhor alternativa, ou fazer a melhor decisão?

Para determinar o resultado desse jogo precisaremos de uma nova abordagem.

Utilizaremos o método gráfico para auxiliar a resolução dessa situação.

Primeiramente, criamos os seguintes eixos: x, y_1 e y_2.

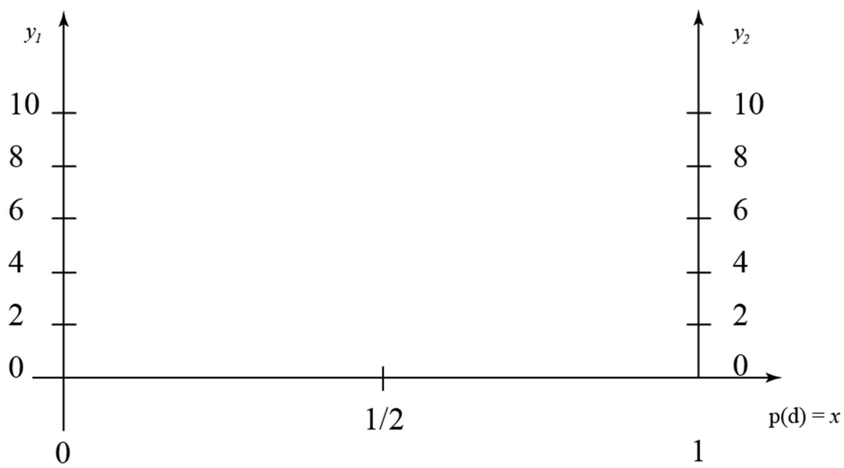

Figura 10 – Representação gráfica: Melhor Resposta (etapa 1)

Representamos no eixo das abcissas, x, o domínio da função utilidade do jogador 1, ou seja, a probabilidade, p(d), variando de zero a um, de Neymar chutar no canto direito. Em outras palavras:

- Se Neymar optar por chutar no canto esquerdo, teremos p(d) = 0, significando 0% de chances de chutar no canto direito;
- Se Neymar optar por chutar no meio do gol, teremos p(d) = ½, significando 50% de chances de chutar no canto direito;
- Se Neymar optar por chutar no canto direito, teremos p(d) = 1, significando 100% de chances de chutar no canto direito.

Nos eixos das ordenadas, y_1 e y_2 , representaremos os *pay-offs* do jogador 1, frente às respectivas estratégias (opções de escolhas).

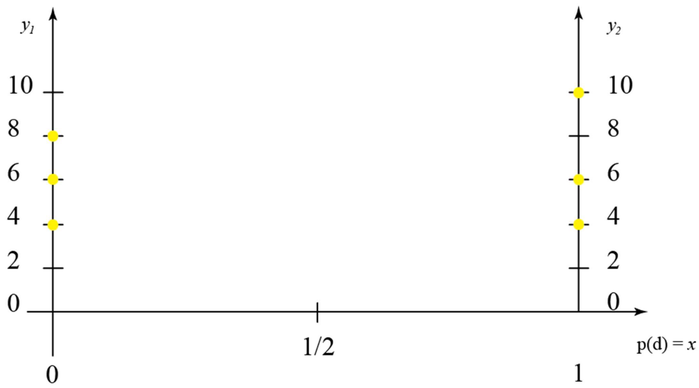

Figura 11 – Representação gráfica: Melhor Resposta (etapa 2)

No eixo y_1 temos os seguintes pares ordenados:

(0,8): escolhendo a estratégia (E) contra (e)

(0,6): escolhendo a estratégia (M) contra (e)

(0,4): escolhendo a estratégia (D) contra (e)

No eixo y_2 temos os seguintes pares ordenados:

(1,4): escolhendo a estratégia (E) contra (d)

(1,6): escolhendo a estratégia (M) contra (d)

(1,10): escolhendo a estratégia (D) contra (d)

Traçando as retas correspondentes a variação linear das probabilidades em relação às estratégias, temos:

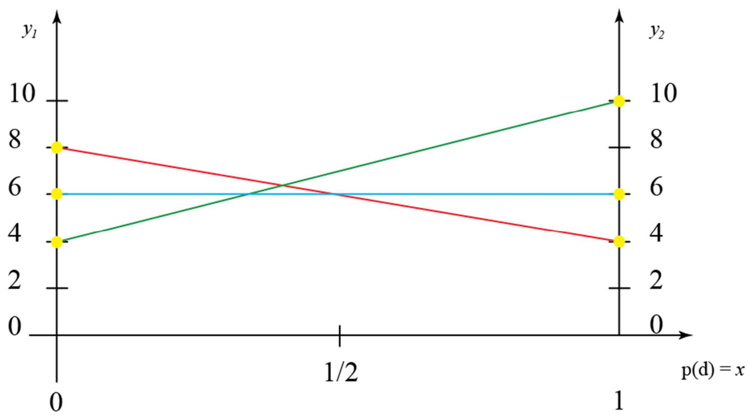

Figura 12 – Representação gráfica: Melhor Resposta (etapa 3)

Assim, podemos perceber que, de acordo com o critério MINIMAX, o jogador 1 pode definir o conjunto de pagamentos máximos esperados que correspondem à fronteira superior da área sombreada no gráfico formada pelos segmentos de retas vermelha e verde. Verificamos também, que o ponto mínimo desse conjunto, representado pelo ponto M, se encontra na intersecção desses segmentos.

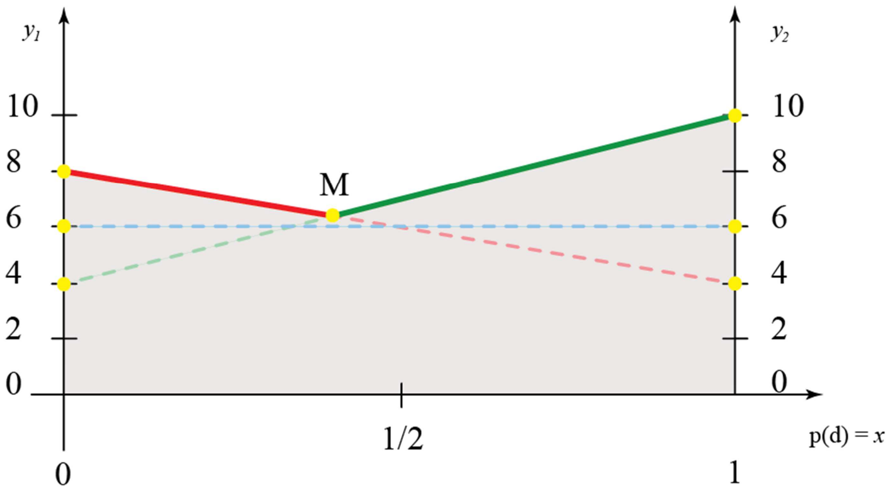

Figura 13 – Representação gráfica: Melhor Resposta (etapa 4)

Observamos que o segmento azul encontra-se abaixo do ponto mínimo, significando que chutar no meio do gol não é opção vantajosa frente a qualquer estratégia adotada pelo atacante. Essa estratégia é definida como uma <u>estratégia estritamente dominada</u> e, portanto, deve ser descartada. Também, pelo gráfico, constatamos que chutar no canto esquerdo (segmento vermelho) resultaria em chances menores de 50% de marcar o gol. A melhor estratégia, no caso, reside em Neymar chutar no canto direito (segmento verde), pois a probabilidade de sucesso é maior que 50%.

A abcissa do ponto M pode ser determinada, de forma analítica, igualando as equações das retas vermelha e verde, da seguinte forma:

Coeficiente angular da reta vermelha

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m_1 = \frac{(4-8)}{(1-0)} = -4$$

Coeficiente angular da reta verde

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m_2 = \frac{(10-4)}{(1-0)} = 6$$

Equação da reta vermelha

$$y - y_0 = m_1(x - x_0)$$
$$y - 4 = -4(x - 1)$$
$$y = -4x + 8$$

Equação da reta verde

$$y - y_0 = m_2(x - x_0)$$
$$y - 4 = 6(x - 0)$$
$$y = 6x + 4$$

Igualando as equações (ponto de intersecção), teremos:

$$-4x + 8 = 6x + 4$$
$$-10x = 4 - 8$$
$$x = 0,4$$

Ou seja, a abcissa do ponto M é 0,4, indicando que p(d) = 40%.

Pelo princípio da complementaridade de eventos probabilísticos, temos:

$$P + \bar{P} = 1$$
$$0,4 + \bar{P} = 1$$
$$\bar{P} = 0,6$$

Dessa forma, se Neymar optar por chutar no canto direito, terá 60% de chances de marcar o gol e levar o Brasil à vitória, ganhando um título inédito para o futebol nacional.

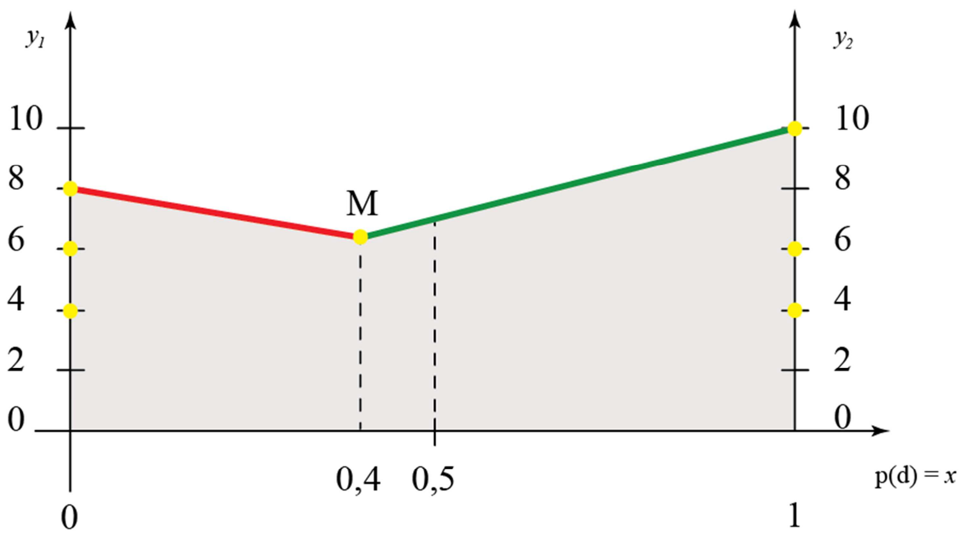

Figura 14 – Representação gráfica: Melhor Resposta (etapa 5)

Esta análise é a Melhor Resposta Probabilística e é definida como: partindo de uma expectativa do jogdor *i*, sobre as possíveis ações dos oponentes, a estratégia s_i^* será a melhor resposta para toda estratégia s_{-i} (dos outros jogadores) se o *pay-off*, $u_i(s_i^*, s_{-i})$ for preferível a $u_i(s_{i'}, s_{-i})$ para toda $s_{i'}$ do conjunto S_i.

O modelo matemático apresentado possui limitações (implícitas em toda modelagem) no que tange às características dos jogadores de como a bola pode ser chutada, como por exemplo: o jogador e o goleiro podem ser canhotos ou destros; o chute do atacante pode ser forte ou "colocado"; etc. Essas qualidades, provavelmente, alterariam os valores dos *pay-offs*, impactando, desse modo, na escolha da estratégia mais vantajosa.

Vale destacar que essa situação-problema evidencia a importância do pensamento matemático na realização de escolhas e de tomadas de decisões, frente aos desafios impostos pela Vida. Aprender a estudar e a perceber as melhores estratégias, avaliar as probabilidades e refletir sobre as possíveis escolhas pode favorecer o desenvolvimento da autoconfiança e contribuir para a formação de cidadãos mais preparados na desafiadora tarefa de obterem êxito em seus objetivos pessoais.

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos 2 das 3 atividades elaboradas para um Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática. Essas atividades compuseram uma sequência didática, embasada na Teoria das Situações de Brousseau, de modo a contribuir com um ensino de Matemática que busque despertar nos alunos atitudes positivas em relação aos saberes matemáticos.

Para isso, utilizamos o ferramental da Teoria dos Jogos na obtenção dos objetivos almejados e procuramos pautar a construção das atividades em temas atuais, de interesse público geral e próximos à realidade da vida cotidiana.

Os estudos realizados indicaram que a Teoria dos Jogos constitui uma possibilidade promissora com potencial de contribuir para uma concepção curricular adequada às necessidades educativas atuais, sobretudo no que diz respeito a tornar o ensino da Matemática mais participativo e garantir que o ambiente escolar seja um espaço que assegure a imaginação, a investigação e o prazer em aprender.

REFERÊNCIAS

Yale Courses, Game Theory. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=nM3rTU927io&list=PL6EF60E1027E1A10B

BRASIL. Ministério de Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - Lei no 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Brasília : MEC, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) – Ciências da Natureza e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

ESPINOZA, A. S. **Ensino e aprendizagem das funções trigonométricas: um estudo e uma proposta de abordagem**, Monografia em Licenciatura Matemática - PUC/SP, São Paulo, 2013.

FELICIANO, L. P. S. **Teoria dos Jogos: uma nova proposta para o Ensino Médio**. Mestrado profissional em Educação Matemática - PUC/SP, São Paulo, 2007.

GRAMINHO, J. M. J. **Contribuição da Teoria dos Jogos à Gestão de Desempenho**. Mestrado em Administração - PUC/SP, São Paulo, 2013.

GRANDO, R.C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos em sala de aula**. Tese de Doutorado - UNICAMP/SP, São Paulo, 2000.

SALDANA, P. Desempenho do ensino médio em matemática é o pior desde 2005. **Folha de São Paulo**, São Paulo: 08 set. 2016. Cotidiano, p.3

SALGADO, P. M. **Conciliação como forma de solução de conflito no Direito: Teoria dos Jogos aplicada à conciliação trabalhista**. Mestrado em Direito - PUC/SP, São Paulo, 2009.

STRAPASON, L. P. R. **O uso de jogos como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática no 1º ano do Ensino Médio**. Mestrado Profissionalizante em Física e Matemática - CUF/SM, Rio Grande do Sul, 2011.

TEIXEIRA, R. R. P; APRESENTAÇÃO, K. R. S. Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática. **Revista Linhas**, Florianópolis, v.15, n.28, p.302-323, jan./jun. 2014.

TUPINAMBÁ, M. C. **Ensino e Aprendizagem de Número Real: Uma Metodologia de Ensino Diferenciada**, Monografia em Licenciatura Matemática - PUC/SP, São Paulo, 2013.