emd Ensino da Matemática em Debate

O conceito de variável e o modelo 3uv – três usos da variável

The concept of variable and the model 3uv – three uses of variable

Jamirley Priscila de Souza de Paula[1]

Gabriel Loureiro de Lima[2]

RESUMO

Este artigo é um recorte de uma dissertação de mestrado em desenvolvimento cujo objetivo é investigar como os livros didáticos abordam o conceito de variável segundo o Modelo 3UV (Três Usos da Variável), desenvolvido pelas pesquisadoras mexicanas Maria Trigueros e Sonia Ursini. Neste artigo, serão apresentados alguns exemplos de atividades que exploram diversos usos da variável inspiradas no livro Enseñanza del Álgebra Elemental, publicado em 2005 pelas pesquisadoras supracitadas em parceria com Fortino Escareño e Delia Montes. O objetivo é auxiliar o professor na sua prática de ensino, mostrando a aplicação do Modelo 3UV. Inicialmente será apresentada uma parte da revisão bibliográfica realizada para a investigação de mestrado anteriormente citada, enfatizando a importância de se analisar materiais didáticos. Por meio deste estudo, busca-se despertar um olhar mais crítico nos docentes que atuam na Educação Básica em relação aos materiais didáticos que utilizam.

Palavras-chave: *Álgebra*; *livro didático; variável; modelo 3UV.*

ABSTRACT

This article is part of a master's dissertation in development in which the objective is to investigate how textbooks approach the concept of variable according to the Model 3UV (Three Uses of the Variable), developed by the Mexican researchers

1. Mestranda do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. E-mail: jamy.priscila@gmail.com

2. Doutor em Educação Matemática. Professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. E-mail: gllima@pucsp.br

Maria Trigueros and Sonia Ursini. In this article, some examples of activities that explore different uses of the variable inspired by the book Teaching Elemental Algebra (Ensenänza del Algebra Elemental) will be presented, it was published in 2005 by the researchers mentioned above, in partnership with Fortino Escareño and Delia Montes. The objective is to assist the teacher in the practice of teaching, showing the application of the Model 3UV. Initially, part of the bibliographic review conducted for the research of the previously quoted master's thesis will be presented, emphasizing the importance of analyzing teaching materials. Through this study, we seek to awaken a more critical view of teachers, who work in Basic Education, in relation to the learning materials they use.

Key-words: *Algebra; textbook; variable; 3UV model.*

Introdução

Neste artigo apresentamos um recorte de uma dissertação de mestrado em Educação Matemática que está sendo desenvolvida na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) com o objetivo de analisar como os livros didáticos abordam o conceito de variável segundo o Modelo 3UV (três usos da variável), a fim de favorecer a compreensão dos estudantes. Se considerarmos a influência dos livros didáticos na prática de ensino dos professores, percebemos o quanto é importante analisá-los.

Apresentamos primeiramente uma breve contextualização da problemática desse estudo e, como o nosso foco está na análise de livros didáticos, em seguida descrevemos três pesquisas de mestrado que analisam esses ou outros tipos de materiais didáticos. Finalmente, tendo por base o modelo 3UV, expomos alguns exemplos inspirados em Ursini *et al*. (2005), a fim de auxiliar os professores na sua prática de ensino. Postulamos que o modelo 3UV possa servir como ponto de partida para o professor em sua prática de ensino e que ele possa contribuir para que os estudantes compreendam o do conceito de variável.

Problematização e base teórica

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável quando se trabalha com a Álgebra. As investigações apontam, no entanto, que o caráter multifacetado da variável é a origem de muitas das dificuldades dos estudantes (URSINI *et al.,* 2005, p.9). Embora a variável possa ter diferentes usos, conforme afirmam Ursini et al. (2005), segundo os PCN a noção de variável tem sido pouco explorada na educação básica e isso possibilita que os estudantes egressos pensem que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra só atua como incógnita (BRASIL, 1998, p.118). Por outro lado, nos próprios PCN ressalta-se que é importante identificar parâmetros, incógnitas, variáveis para resolver problemas por meio de equações e conhecer a "sintaxe" (regras de resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p.84).

As dificuldades dos estudantes para desenvolver uma compreensão adequada dos usos das letras e a capacidade de trabalhar com elas vêm sendo discutidas nos resultados de inúmeras investigações (URSINI et al.,2005, p.11).

De acordo com Ursini *et al*., o modelo 3UV (três usos da variável) contempla os três principais usos da variável na Álgebra elementar. Os autores destacam que, nas situações usuais da Matemática na Educação Básica, se trabalha essencialmente com os três seguintes usos distintos da variável: incógnita, número genérico e relação funcional.

Ursini *et al.* (2005, p.15) afirmam que, ao se trabalhar cada uso em situações distintas (atividades diferenciadas) ou em uma mesma situação (atividades integradoras), espera-se que o estudante desenvolva a capacidade para interpretar, simbolizar e manipular as variáveis de maneira adequada e que possa transitar por elas de forma natural.

Para que os estudantes sejam capazes de desenvolver essas habilidades, é preciso que o professor conheça os diferentes usos da variável e os explore em sala de aula. Nosso objetivo neste artigo é apresentar exemplos de situações desses usos e consequentemente das ideias do modelo 3UV para que o professor possa incorporá-los na sua prática de ensino.

Revisão bibliográfica

Apresentaremos a seguir três pesquisas realizadas por outros autores a respeito da temática discutida nessa investigação. Beltrame (2009) analisou três livros didáticos adotando como base para suas análises o modelo

3UV. Os critérios de análise considerados foram: se nos exercícios e/ou situações-problema constam igualmente os três usos ou é enfatizado um uso em detrimento dos outros, se contém os aspectos que caracterizam cada uso (conforme o Quadro 1) e se apresentam atividades que integram os três usos da variável (atividades integradoras). A autora optou por analisar livros do 7ºano (antiga 6ªsérie) do Ensino Fundamental.

Quadro 1 – Resumo do Modelo 3UV

Variável como Incógnita	Variável como Número Genérico	Variável em uma relação funcional
I1-Reconhecer e identificar, em uma situação problemática, a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema.	G1- Reconhecer padrões e perceber regras e métodos em sequências e em famílias de problemas.	F1-Reconhecer a correspondência entre variáveis relacionadas, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas).
I2- Interpretar a variável simbólica que aparece em uma equação, como a representação de valores específicos.	G2- Interpretar a variável simbólica como a representação de uma entidade geral, indeterminada, que pode assumir qualquer valor.	F2-Determinar os valores da variável dependente, dados os valores da variável independente.
I3-Substituir a variável pelo valor ou valores que fazem com que a equação seja um enunciado verdadeiro.	G3- Deduzir regras e métodos gerais em sequências e famílias de problemas.	F3-Determinar os valores da variável independente, dados os valores da variável dependente.
I4- Determinar a quantidade desconhecida que aparece em equações ou problemas, realizando operações algébricas, aritméticas ou de ambos os tipos.	G4- Manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica.	F4-Reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação funcional, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas).
I5- Simbolizar as quantidades desconhecidas identificadas em uma situação especifica e utilizá-las para formular equações.	G5- Simbolizar enunciados, regras ou métodos gerais.	F5-Determinar os intervalos de variação de uma das variáveis, dado o intervalo de variação da outra.
		F6- Simbolizar uma relação funcional, com base na análise de dados de um problema.

Fonte: Ursini *et al.* (2005, p.35-37) *apud* Beltrame (2009, p.40-41)

Os resultados que emergiram das análises de Beltrame (2009) foram: no livro 1 - **Matemática e Realidade** de autoria de Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce e Antônio Machado:

- O uso da variável como incógnita foi bastante enfatizado e todos os seus aspectos I1, I2, I3, I4, I5 foram contemplados;
- O uso como número genérico foi abordado, mas não com a mesma ênfase, embora englobem todos os aspectos G1, G2, G3, G4,G5 que o caracterizam, sendo três mais destacados: G2, G4, G5;
- O uso como relação funcional não foi constatado.
- Esse livro não apresentou as atividades integradoras.

Uma possível justificativa a respeito do porquê do uso como relação funcional não ter sido explorado nos livros é que o conteúdo função é introduzido efetivamente no 9ºano (8ª série) do Ensino Fundamental.

No livro 2 – **Novo Praticando Matemática**, cujos autores são Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos, somente o uso da variável como incógnita foi contemplado e seus aspectos característicos foram abordados em sua totalidade. Os demais usos não foram contemplados e não foi encontrada nenhuma atividade que possa ser considerada como integradora.

No livro 3 – **Tudo é Matemática**, de autoria de Luís Roberto Dante:

- Foi observada a importância atribuída ao papel da variável como incógnita e todos os aspectos desse uso foram contemplados.
- O mesmo não aconteceu em relação à variável como número genérico; dedicado a esse uso há uma quantidade inferior de exercícios, apesar de todos os seus aspectos terem sido contemplados, sendo os mais enfatizados G2, G4.
- O uso da variável como relação funcional estava presente em um único exercício e utilizou apenas o aspecto F1.
- Não foram encontradas atividades integradoras.

Em síntese, o livro 1 utilizou a variável como incógnita e número genérico. O livro 2 empregou apenas o uso como incógnita. O livro 3 foi o único a apresentar os três usos da variável. Beltrame (2009) ressalta que as análises não foram feitas com o objetivo de enaltecer ou depreciar as obras, mas de estudá-las sob um olhar crítico-científico.

Bailo (2011) investigou quais diferentes usos da variável emergem da sequência de ensino que compõe as quatro Situações de Aprendizagem presentes no Caderno do Estudante do 7ºano (6ª série), volume 4-2009, sugeridas na Proposta Curricular do Estado de São Paulo do Ensino Fundamental II, do ano de 2008. Nas análises, foram utilizados o Modelo 3UV, as concepções de Álgebra de Usiskin (1995) e as dimensões da Álgebra presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental II (BRASIL, 1998).

Quadro 2 – Resumo das concepções segundo Usiskin

Concepções da Álgebra	Uso das variáveis
Aritmética Generalizada	Generalizadora de modelos Traduzir – Generalizar
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes Resolver – Simplificar
Estudo das Relações	Argumentos, parâmetros Relacionar – Gráficos
Estrutura	Sinais arbitrários no papel Manipular – Justificar

Fonte: Usiskin, 1995, p. 20.

Quadro 3 – As dimensões da Álgebra segundo os PCN

Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

Fonte: Brasil, 1998, p. 116.

Os resultados obtidos foram: em relação à situação de Aprendizagem 1 – o foco das atividades era o reconhecimento de padrões em sequências figurativas e numéricas. De acordo com o Modelo 3UV, foram identificados os aspectos da variável como número genérico, sendo os mais enfatizados G1, G3, G5. Com relação às concepções de álgebra de Usiskin (1995) e as dimensões da álgebra segundo os PCN (BRASIL, 1998), a que se manifesta é a de aritmética generalizada.

A respeito da situação de Aprendizagem 2 – foram identificados os três usos da variável, sendo o de relação funcional menos explorado que os outros. Com relação às concepções de Usiskin, foram detectadas: a Álgebra como Aritmética generalizada, estudo de relações entre grandezas e estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas e as dimensões da Álgebra segundo PCN foram: Álgebra como Aritmética generalizada, Álgebra das equações e funcional.

Na situação de Aprendizagem 3 – foram identificadas as variáveis como incógnita (com mais destaque) e relação funcional. A respeito das concepções de Álgebra de Usiskin (1995) e das dimensões da Álgebra segundo os PCN (BRASIL, 1998), foram observadas: Álgebra como aritmética generalizada, Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas e a Álgebra das equações (com maior frequência).

Finalmente, na situação de Aprendizagem 4 – foi abordado o uso da variável como incógnita e número genérico. Com relação às concepções da Álgebra segundo Usiskin (1995), temos: Aritmética generalizada, estudo de relações entre grandezas e estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. As dimensões da Álgebra segundo os PCN (BRASIL, 1998) foram manifestadas aquelas como Aritmética generalizada, das equações e funcional.

Carmo (2014) se propôs a investigar como introduzir a Álgebra para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudantes. Tradicionalmente, as equações têm sido utilizadas para introduzir a linguagem algébrica, mas, como apontam diversas pesquisas e os dados de avaliações externas (como ENEM, Prova Brasil, Saresp), essa maneira tem-se mostrado um caminho ineficaz para desenvolver o pensamento algébrico. Buscando encontrar maneiras satisfatórias, Ponte (2005, p.4) afirma "ser o estudo de padrões e regularidades uma das vias privilegiadas para promover o pensamento algébrico".

Carmo (2014) se dispõe a investigar como introduzir a linguagem algébrica por meio de atividades de generalizações de padrões nos livros didáticos de Matemática dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD/2011). Como referenciais teóricos, o autor utilizou em sua pesquisa as ideias de Fiorentini; Miorin; Miguel (1993); Fiorentini; Fernandes; Cristóvão (2005); Sessa (2005) e Ursini et al.(2005) e para as análises dos livros didáticos empregou a metodologia de Análise de Conteúdo desenvolvida por Bardin (2011). Optou por analisar quatro livros, sendo dois do 6° ano: **Matemática - Imenes & Lellis**, cujos autores são Luiz Márcio Imenes, Marcelo Lellis, e **Tudo é Matemática**, de autoria de Luiz Roberto Dante; e dois do 7º ano: **Vontade de saber Matemática**, cujos autores são Joamir Souza, Patrícia Moreno Pataro, e **Matemática e Realidade**, sendo os autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado. Em três coleções, foram encontradas atividades de generalização de padrões, exceto na coleção Matemática e Realidade, na qual a introdução do estudo da Álgebra é feita tradicionalmente pelo estudo da equação polinomial do 1º grau.

É importante ressaltar que, durante sua pesquisa, das 85 atividades de generalização de padrão encontradas por Carmo (2014), 61 estão na obra **Matemática - Imenes & Lellis,** ou seja, aproximadamente 72% das atividades encontradas estão em uma única obra. O pesquisador afirma que, apesar de os documentos oficiais atribuírem importância para as atividades de generalização de padrão e as investigações ressaltarem essa importância, os livros didáticos ainda dão pouca ênfase para essa temática, o que pode ser ratificado pelo número de atividades encontradas.

Para analisar quais indicadores estão presentes nas atividades para desenvolver o pensamento algébrico (conforme o Quadro 4, criado por Hamazaki (2010) e adaptado por Carmo (2014)), foram escolhidas dez atividades, sendo considerado, para cada duas atividades, um dos seguintes critérios C.1: padrões figurais; C.2: padrões numéricos; C.3: padrões de operações; C.4: ideia de função e C.5: atividades diferenciadas[3]. A

3. Neste trabalho, entende-se como diferenciadas aquelas atividades que recorram à situação-problema incomum. Fonte: Carmo (2014).

maioria das atividades analisadas continha 8 dos 13 indicadores e, com base nessas análises, pode-se concluir que essas atividades favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Quadro 4 – Indicadores do pensamento algébrico

O pensamento algébrico favorece que o estudante:	
1	Perceba e tente expressar relações entre representações numéricas pertinentes a uma situação-problema em um modelo aritmético/algébrico ou geométrico;
2	Estabeleça relações/comparações entre expressões numéricas ou entre medidas;
3	Produza mais de um modelo aritmético/algébrico ou geométrico para uma situação-problema;
4	Produza vários significados para uma mesma expressão;
5	Interprete uma igualdade, como equivalência numérica entre duas medidas ou entre duas expressões;
6	Transforme uma expressão ou representação numérica em outra;
7	Desenvolva algum tipo de processo de generalização;
8	Perceba e tente expressar regularidades ou invariâncias;
9	Perceba a relação de dependência das variáveis;
10	Perceba o uso da variável como incógnita;
11	Perceba o uso da variável como número geral;
12	Perceba o uso da variável como relação funcional;
13	Desenvolva ou crie uma linguagem mais concisa ao expressar uma sentença ou expressão matemática.

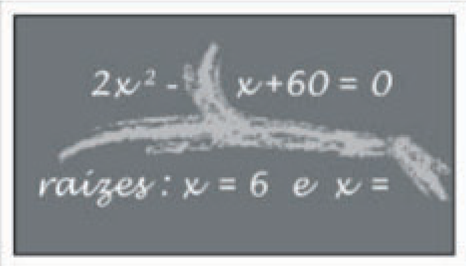
Fonte: Hamazaki (2010, p. 37) apud (Carmo, 2014, p.55).

Exemplos dos três diferentes usos da variável

Apresentaremos alguns exemplos inspirados no livro *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa* com a finalidade de auxiliar o professor na sua prática de ensino. De acordo com os autores do Modelo 3UV, a intencionalidade didática desse modelo é que a complexidade do conceito de variável possa ser diminuída.

No primeiro exemplo, vamos explorar o uso da variável como incógnita. No segundo, o uso empregado será de número genérico e no terceiro exemplo a variável estará atuando como relação funcional.

Exemplo 1. (OBMEP-adaptada2005) Mariana entrou na sala e viu no quadro-negro algumas anotações da aula anterior, parcialmente apagadas, conforme a figura. Qual número foi apagado na linha de cima do quadro-negro? Qual a outra raiz da equação?



Para resolver o problema é necessário:

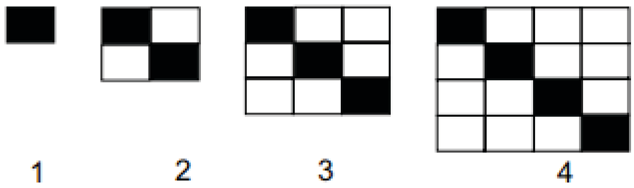
Reconhecer e identificar a existência de algo desconhecido que pode se determinar. (Nesse caso são os números que estão borrados no quadro)

Realizar as operações aritméticas e/ou algébricas para determinar o valor da incógnita. (Neste caso, $2x^2 - bx + 60 = 0$ se colocarmos no lugar do x o número 6, saberemos o valor do b, fazendo $2 \cdot 6^2 - b \cdot 6 + 60 = 0$ obtemos $b = 22$).

Considerando então a equação $2x^2 - 22x + 60 = 0$ e dividindo cada um de seus membros da equação por 2, temos $x^2 - 11x + 30 = 0$ (equação equivalente). Então, aplicando uma dentre diferentes estratégias, como resolução, via fórmula de Bhaskara, a noção de soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau ou a fatoração de um trinômio do 2° grau, descobrimos que a outra raiz é 5.

Podemos então substituir o valor encontrado na equação para verificar se a resposta encontrada está correta. (Neste caso $5^2 - 11 \cdot 5 + 30 = 0$; logo $0 = 0$ e conclui-se que a solução encontrada está correta). Portanto, a resposta é $b = 22$ e a outra raiz é 5.

Exemplo 2. (PCN-adaptada1998) Quantos quadrados brancos têm na figura 5? E na figura de posição 60? E na figura de posição n?



Para resolver o problema é necessário:

Reconhecer o padrão que relaciona a posição que a figura ocupa e o número total de quadrados que a compõe .

Nesse caso, considerando o lado do quadrado da figura de posição 1 como unidade de medida, a medida do lado do quadrado de figura de posição n será n. Além disso, observa-se que o número total de quadrados da figura de posição n é n^2 e que o número de quadrados pretos da figura de posição n é n. Consequentemente, o número de quadrados brancos da figura de posição n será igual ao número total de quadrados dessa figura (n^2) menos o número de quadrados pretos (n), ou seja, $n^2 - n$.

Em seguida, é preciso deduzir a regra geral distinguindo entre o que varia e o que não varia e então simbolizar a regra para representar o número genérico que neste exercício representa uma posição qualquer. (Neste caso, encontramos a generalização n^2-n e consideramos n uma posição qualquer).

Na figura 5 temos $5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$ quadrados brancos. Na figura de posição 60, temos $60^2 - 60 = 3600 - 60 = 3540$ quadrados brancos.

> Os números genéricos aparecem em expressões abertas (por exemplo, $4x + 7$) em tautologias ($3 + x = x + 3$), em fórmulas gerais ($A = b \cdot h$), como parâmetros das equações ($x^2 + 5mx + 7 = 0$) e nas equações gerais ($ax + b = cx + d$). É necessário que o estudante os interprete como quantidades gerais e consiga distinguir as variáveis simbólicas, que representam quantidades desconhecidas, mas específicas. (URSINI *et al.*, 2005, p.31-2, tradução nossa).

Exemplo 3. (Cesgranrio- adaptada) O valor de um carro novo é de R$50.000,00 e, com 4 anos de uso, o valor passa a ser de R$20.000,00. Supondo que o preço decai linearmente com o passar do tempo, qual é o valor de um carro novo após 1 ano de uso?

Para resolver o problema é necessário:

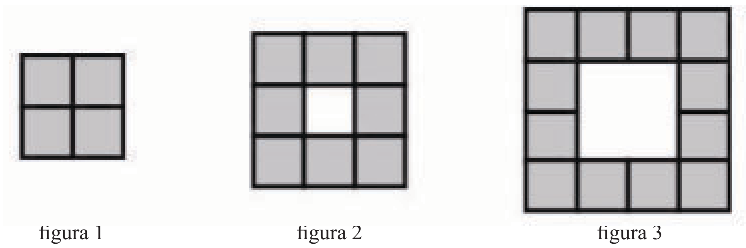
Reconhecer, a partir do problema apresentado em linguagem corrente, que existe uma correspondência entre os valores das variáveis envolvidas. (Nesse caso, reconhecer que o preço do carro está relacionado ao tempo de uso sendo, portanto, o tempo a variável independente e o preço a variável dependente).

Simbolizar a relação funcional de correspondência. (Nesse caso, a lei de formação é dada pela função $P(t) = 50000 - 7500t$ com t representando o tempo e P o preço).

Determinar o valor de uma das variáveis quando se conhece o valor da outra. (Nesse caso, sabendo que se $t = 1$, então $P(1) = 50000 - 7500 \cdot 1 = 42500$, conclui-se que, após 1 ano de uso, o carro passa a valer 42500 reais).

A seguir, apresentaremos um exemplo de atividade integradora que, segundo Ursini *et al.* (2005), é uma atividade que integra os 3 usos da variável e na qual se espera que o estudante possa reconhecer, interpretar e simbolizar a variável e consiga transitar entre seus usos de maneira flexível. O propósito desta atividade é que os estudantes percebam efetivamente que a variável possui diferentes facetas.

Considerando as figuras 1, 2 e 3, responda às seguintes questões: Quantos quadrados sombreados há na figura 5? Quantos quadrados sombreados há na figura de posição 68? Determine a lei de formação desta sequência. Se, numa certa figura, você tem 448 quadrados sombreados, que posição ocupa na sequência essa figura?



Fonte: https://www.geogebra.org/m/TvFJFVfJ.

Precisamos primeiramente reconhecer o padrão considerando o lado de cada quadrado que compõe as figuras como unidade de medida, perceber que, ao compararmos a posição da figura e a medida do lado do quadrado maior, se denominarmos por n a posição de uma figura qualquer, a medida do lado do quadrado maior presente em tal figura será $n + 1$. Já a medida do lado do quadrado branco contido em cada figura, digamos, por exemplo, da figura de posição n, será dada por $n - 1$.

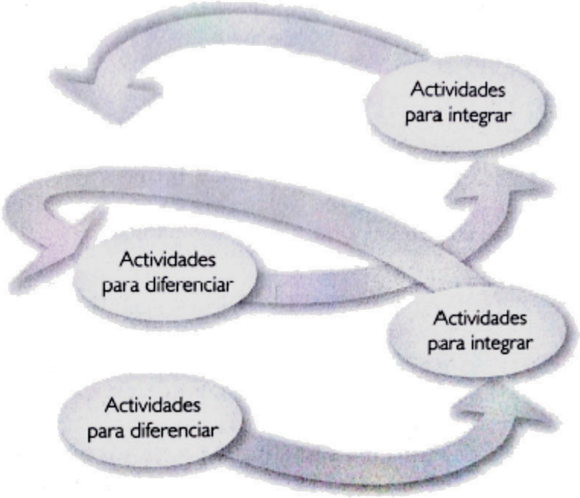
O número de quadrados sombreados em cada figura será dado pela medida da área do quadrado maior que compõe a figura menos a medida da área do quadrado branco contido em cada figura. Para a figura n, portanto, o número de quadrados sombreados será dado por: $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$, note que, nesse caso, a variável n está sendo utilizada como número genérico.

Manipulando a expressão $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ obtemos 4n. Portanto, na figura 68 temos um total de 272 quadrados sombreados ($4 \cdot 68 = 272$). Lei de formação: $S(n) = 4n$, sendo n a posição da figura e S o número de quadrados sombreados. Nesse caso, as variáveis S e n estão sendo utilizadas em relação funcional.

Nessa relação obtida (lei de formação), n é a variável independente e S a variável dependente. Dado o valor de $S = 448$ determinamos que $n = 112$ ($448 = 4n$). Na equação $4n = 448$, a variável n está sendo empregada como incógnita.

Para que haja, por parte do estudante, uma compreensão sólida e estável do conceito de variável, Ursini *et al.* (2005) propõem um ensino que denominam em espiral e no qual existem duas fases fundamentais: a primeira trabalha com atividade para diferenciar os usos da variável considerados no modelo e a segunda com atividades conhecidas como atividades integradoras, cujo desenvolvimento requer que se trabalhe com os três usos da variável simultaneamente.

Figura 1 – Ensino em espiral



Fonte: Ursini *et al*., 2005, p.39.

> O propósito da primeira fase é fortalecer os estudantes na compreensão dos aspectos que caracterizam cada um dos distintos usos. O propósito da segunda fase é que os estudantes desenvolvam a capacidade de passar entre os distintos usos da variável de maneira flexível. Cada giro na espiral acarreta um maior grau de complexidade e se repete no mesmo padrão de atividades: primeiro se trabalha com os distintos usos da variável em forma diferenciada e posteriormente em forma integrada. (URSINI *et al*.,2005, p.40, tradução nossa).

Considerações finais

Considerando que o professor aplique o Modelo 3UV na sua prática de ensino, possivelmente o estudante poderá desenvolver uma compreensão do conceito de variável efetiva. Após estarem familiarizados com atividades que trabalhem separadamente ou simultaneamente os usos da variável, os estudantes possivelmente identificarão as diferentes facetas da variável, conforme a situação em que está inserida. Por consequência deste trabalho, as capacidades de interpretar, simbolizar e manipular os diferentes usos da variável e também a habilidade de transitar por esses distintos usos de maneira natural estarão sendo desenvolvidas.

O modelo 3UV é uma ferramenta útil – como mostram os exemplos apresentados neste artigo – e espera-se que, ao incluí-la na sua prática de ensino, o professor consiga detectar as dificuldades de seus estudantes e consequentemente avançar no ensino na Álgebra elementar.

Outra proposta não explorada deste artigo é a de utilizar o Modelo 3UV como instrumento diagnóstico. Com base na análise de um questionário respondido pelos estudantes, o professor pode não apenas buscar identificar os erros mais comuns e as dificuldades dos estudantes com relação aos usos da variável, como também explorá-los visando a desenvolver com os discentes uma compreensão adequada do conceito de variável que é a chave para se aprender não somente Álgebra, mas também a Matemática em geral.

Recebido em: 23/08/2017
Aprovado em: 19/09/2017

Referências

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BAILO, F. R. R. **Análise dos usos da variável presente no caderno do estudante na introdução à álgebra da Proposta Curricular do Estado de São Paulo do ensino fundamental II de 2008 e 2009.** 2011. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

BELTRAME, J. T. **A álgebra nos livros didáticos: um estudo dos usos das variáveis, segundo o Modelo 3UV.** 2009. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

CARMO, P. F. **Um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental**. 2014. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

URSINI, S. *et al*. **Enseñanza del Algebra Elemental: Una propuesta alternativa.** México. Ed.Trillas. 2005.