emd Ensino da Matemática em Debate

Uma situação matemática para o ensino e aprendizagem de equações diferenciais

A mathematical situation for teaching and learning of differential equations

Sonia Barbosa Camargo Igliori[1]
Marcio Vieira de Almeida[2]

RESUMO

Este artigo apresenta uma pesquisa que enfoca o ensino de equações diferenciais. Para a realização da pesquisa, conhecimentos de estudantes foram extraídos de uma situação de ensino desenvolvida em uma universidade brasileira. Como procedimentos metodológicos, utilizou-se desses conhecimentos como subsídio para a elaboração de uma situação matemática e proposta de orquestração instrumental para seu desenvolvimento. O objetivo da pesquisa foi destacar possibilidades da orquestração quando se utiliza tecnologia no ensino superior; e o papel do professor em uma aula, como um maestro em sua orquestra quando coordena as ações de seus músicos (os estudantes) na supervisão da relação partitura/instrumentos (conhecimentos matemáticos/ artefato) em um concerto (sala de aula). Como resultado apresentamos as propostas de configurações didáticas e modos de exploração constituintes de uma orquestração instrumental, relativas a uma atividade de ensino. Esperamos contribuir com pesquisadores e professores na implementação de aulas orientadas pela orquestração instrumental.

Palavras-chave: *Ensino Superior; Equações Diferenciais; Orquestração Instrumental.*

1. E-mail: sigliori@pucsp.br.
2. E-mail: marcioalmeidasp@gmail.com.

ABSTRACT

This article presents a research that focuses on the teaching of differential equations. Knowledge of students was extracted from a teaching situation developed in a Brazilian university. The research had as methodological procedures the use of this knowledge as subsidy for the elaboration of a mathematical situation and proposal of instrumental orchestration for its development. The aim of the research was to highlight possibilities of orchestration when using technology in higher education; and the role of the teacher in a class, as a conductor in his orchestra when he coordinates the actions of his musicians (the students) in supervising the score / instruments relationship (mathematical knowledge/artifact) in a concert (classroom). As a result, we present the proposals of didactic configurations and modes of exploration that constitute an instrumental orchestration, related to a teaching activity. As a result we presented the proposals for educational settings and operating modes which compose an instrumental orchestration, relating to a teaching activity. We hope to contribute with researchers and teachers in the implementation of oriented instrumental orchestration for classes.

Keywords: *Higher education; Differential Equations; Instrumental Orchestration.*

Introdução

Este artigo apresenta uma pesquisa que enfoca o ensino de equações diferenciais. Para isso, conhecimentos de estudantes foram extraídos de uma situação de ensino desenvolvida em uma universidade brasileira (OLIVEIRA e IGLIORI, 2013; IGLIORI e ALMEIDA, 2017). A pesquisa teve como procedimentos metodológicos a utilização desses conhecimentos como subsídio para a elaboração de uma situação matemática e proposta de orquestração instrumental para seu desenvolvimento. O objetivo da pesquisa foi destacar possibilidades da orquestração quando se utiliza tecnologia no ensino superior; bem como o papel do professor em uma aula, como um maestro em sua orquestra quando coordena as ações de seus músicos (os estudantes) na supervisão da relação partitura/instrumentos (conhecimentos matemáticos/artefato) em um concerto (sala de aula). Como resultado, apresentamos as propostas de configurações didáticas e modos de exploração constituintes de uma orquestração instrumental, relativas a uma atividade de ensino.

Os educadores matemáticos, de uma maneira geral, reconhecem hoje o potencial do uso de tecnologias no ensino e aprendizagem da matemática e de sua inevitabilidade devido à penetração das tecnologias nas práticas sociais. No entanto, as investigações sobre os resultados desse uso na aprendizagem, principalmente no que diz respeito à integração com a educação matemática e à utilização de aportes teóricos para o uso de recursos digitais, ainda estão começando a colher frutos.

Os autores deste artigo adotam posicionamentos como o de Chevallard quando expõe a integração da didática com a tecnologia e menciona que:

> [...] esse fenômeno pode ser entendido se considerarmos duas condições essenciais para garantir a confiabilidade da integração didática. Primeira condição, existe aqui um tipo de cenário de exploração didática bem determinado (mesmo que admita diversas variantes, em cujo detalhe não se entrará), que atribui ao computador um papel específico, mais precisamente definido: o da simulação de sistemas e processos ou, mais exatamente, o de suporte de usos didáticos claramente projetados de *software* de simulação. (CHEVALLARD, 1992, p. 3 – tradução nossa)

Ainda para o autor:

> Em segundo lugar, as práticas didáticas que determinam o computador aqui não são criações educacionais *ex nihilo*. Ao contrário, podem aproveitar, em seu próprio contexto, sua afinidade com práticas reais no mundo profissional: estudar simulação (técnica que se torna essencial em um número crescente de campos científicos, técnicos e industriais), ou simulação de treinamento (popularizada especialmente no que diz respeito à aeronáutica). (CHEVALLARD, 1992, p. 3 – tradução nossa)

Em relação à perspectiva da teoria da gênese instrumental Trouche e Drijvers, mencionam que:

> A fim de abordar o caráter problemático da integração de ferramentas digitais, era necessária uma pesquisa educacional que fosse além dos relatos entusiastas dos primeiros adotantes que se dedicavam a experimentos de design de pequena escala, e que seriam firmemente baseados em fundamentos teóricos. Por algum tempo, tais fundamentos estavam faltando; nos anos 90, no entanto, duas visões teóricas importantes emergiram: a noção de webbing e a abordagem instrumental ao uso de ferramentas. A linguagem de programação LOGO serviu como um ambiente paradigmático. Enquanto isso, a abordagem instrumental surgiu na França (por exemplo, ver Guin & Trouche, 1999). (TROUCHE e DRIJVERS, 2014, p. 194 – tradução nossa)

Drijvers e outros ponderam que:

> A fim de ajudar os professores a se beneficiarem da tecnologia no ensino diário de matemática, é importante ter mais conhecimento sobre as novas técnicas de ensino que emergem na sala de aula rica em tecnologia e como elas se relacionam com as visões dos professores sobre educação matemática e o papel de tecnologia. (DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 214 – tradução nossa)

E afirmam que:

> A principal perspectiva teórica que informa nossa investigação do comportamento do professor, em um ambiente rico em tecnologia é a abordagem instrumental para o uso de ferramentas, e a noção de orquestração instrumental em particular. (DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 214)

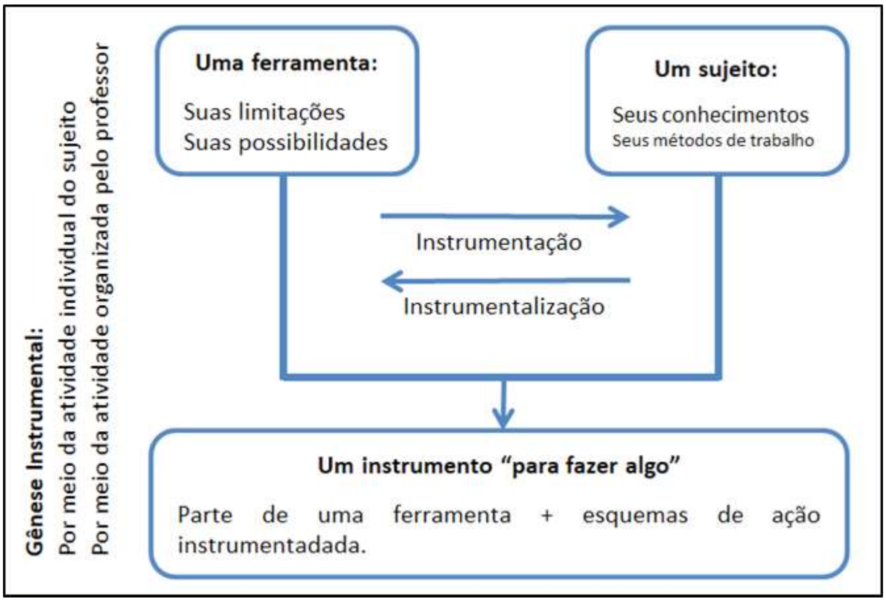
Para Artigue, "a abordagem instrumental reconhece a complexidade de usar a tecnologia na educação matemática" (ARTIGUE, 2002 *apud* DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 214).

Abordagem intrumental, metodologia e questão de pesquisa

A abordagem instrumental para a educação matemática surgiu no contexto francês, tomando-se por base a ergonomia cognitiva (RABARDEL e VÉRILLON, 1995), na qual é importante a diferenciação entre um artefato e um instrumento na realização de tarefas por um indivíduo. Para esses autores, um artefato é um determinado objeto e, por sua vez, um instrumento é esse artefato munido de uma construção psicológica realizada por esse indivíduo, no uso desse objeto. A construção psicológica é constituída de esquemas de utilização produzidos pelos usuários de um artefato. A noção de esquema foi introduzida por Piaget (1936) e retomada por Vergnaud (1996), como a organização invariante de comportamento para uma dada classe de situações.

A abordagem instrumental do didático vai ter a transformação de um artefato em um instrumento por um usuário, por meio de dois processos: a instrumentalização e a instrumentação. Eles expressam relações entre o artefato, suas restrições e suas possibilidades, de um lado e, de outro, um sujeito, seus conhecimentos e métodos de trabalho. Trouche explicita essa relação por meio da Figura 1.

Figura 1. Os processos de instrumentalização e de instrumentação.



Fonte: Trouche, 2004, p. 289.

É importante destacar que, diferentemente de outras abordagens que referenciam o uso de tecnologias no ensino da matemática, a gênese instrumental leva em consideração a responsabilidade do professor e, mais genericamente, da instituição por orientar as gêneses instrumentais dos alunos. Essa consideração leva à noção de orquestração instrumental, assim concebida:

> Uma orquestração instrumental é definida por configurações didáticas (ou seja, o layout dos artefatos disponíveis no ambiente, com um layout para cada estágio do tratamento matemático) e por modos de exploração dessas configurações. (TROUCHE, 2004, p. 296 – tradução nossa)

Os procedimentos metodológicos foram pautados em pesquisas qualitativas, os quais sempre culminam em sínteses possibilitadas pelas análises e interpretações. Utilizamos dados sobre conhecimentos de estudantes que constam de Oliveira (2014) e material elaborado para o ensino de equações diferenciais publicados em Igliori e Almeida (2017).

Propusemos duas questões norteadoras da pesquisa: (1). Como expressar a gênese instrumental dos atores de uma sala de aula para uma determinada situação matemática, ou seja, como avaliar os processos de instrumentação e de instrumentalização desses atores? (2) Como se expressam configurações didáticas de uma situação matemática e seus modos de exploração em uma orquestração instrumental?

Uma situação matemática como proposta para o ensino de equações diferenciais: a noção de solução

A situação foi elaborada tomando por foco o conceito de solução de uma equação, conceito esse percebido sem significado para os estudantes observados.

Objetivo da Situação: Explorar a noção de solução de uma equação diferencial por meio da abordagem gráfica/qualitativa e da construção de campos de direções usando o GeoGebra.

Procedimentos: (1) Organizar a construção dos campos de direções em etapas, sendo em cada uma delas analisada a relação entre artefato/instrumento e conhecimentos dos sujeitos, os prévios e os desenvolvidos durante a situação. Cada uma das etapas são momentos da gênese instrumental. É suposto que o professor e cada estudante tenham à sua disposição um computador, bem como possam projetar os trabalhos em uma tela para a classe toda. Propõe-se o uso do GeoGebra que, por ser um *software* gratuito, com o qual é possível admitir que os computadores estejam munidos. (2) Utilizar o computador para levar os estudantes a construir e visualizar a noção de solução de uma equação diferencial, explorando a solução gráfica construída com esse *software*. Uma das etapas da gênese instrumental acontece no entendimento e uso do comando CampoDeDireções[<f(x, y)>, <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y>]. Esse comando é preexistente no GeoGebra CampoDeDireções, encontrado no campo: Ajuda, na guia "Todos os comandos".

A gênese instrumental dos atores acontece durante todo o tempo de preparação e de realização das ações. Nossa pretensão é descrever os processos de instrumentação e instrumentalização dos atores (professor e estudantes), e o processo de orquestração do professor. Os artefatos são um computador munido do *software* GeoGebra, um projetor e uma tela de projeção

Inicia-se a orquestração com a realização de uma análise *a priori* sobre as condições do professor e estudantes em relação aos conhecimentos matemáticos e à tecnologia utilizada. O professor verifica as condições da sala de aula e toma decisão quanto às suas configurações didáticas, bem como realiza uma análise epistemológica da proposta a ser implantada em relação ao conhecimento matemático, devendo ser considerado o apoio da instituição para o uso de tecnologias.

a) Elementos principais da análise *a priori*

Nessa pesquisa, a atividade é proposta para estudantes iniciados em equações diferenciais, com conhecimentos básicos de uso do GeoGebra, isto é, estudantes que tenham realizado um curso inicial de equações diferenciais e que, em alguma circunstância, tenham utilizado o GeoGebra, em sala de aula. Admite-se como conhecimentos prévios importantes: os conceitos de função, de derivada como inclinação da reta tangente, de solução de uma equação diferencial, além de técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias. Um estudo diagnóstico sobre esses conhecimentos prévios dos estudantes é recomendável. Não foi previsto o conhecimento da abordagem gráfica. Para essa pesquisa, utilizamos dados de uma pesquisa com estudantes de Engenharia que já haviam passado por um curso de equações diferenciais. Esse estudo revelou muitas dificuldades no entendimento da noção de solução de uma equação diferencial. Pode-se citar como exemplo: foi dada a função $y = \frac{sen2x}{2} + c$ e afirmado que era solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} - \cos(2x) = 0$. Perguntava-se: Por quê? (OLIVEIRA, 2014, p. 52). Um estudante precisou resolver a equação usando técnicas de resolução para responder à questão (p. 62). Para responder à pergunta se a função $y = -\frac{1}{x} + 1$ é solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{x^2}$, um outro estudante respondeu que sim, informando que pelo método das variáveis separáveis se chegava a essa solução com c substituído por 1 (p. 64) Em Oliveira e Igliori (2013), pode-se verificar uma situação mais geral sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem de equações diferenciais, as quais podem ser atribuídas a obstáculos didáticos, consideradas resultantes de abordagens analíticas.

Outro ponto que deve ser considerado na análise *a priori* é o ponto de vista epistemológico que revela o privilégio à solução analítica, em detrimento da gráfica, uma possibilidade de geração de dificuldades no ensino. As incompreensões sobre o conceito de solução de equação diferencial acarretam dificuldades às aplicações desse conceito em problemas contextualizados que exigem intepretação (ARTIGUE, 1994).

b) Os processos de instrumentação e de instrumentalização

Esses processos acontecem em cada um dos passos utilizados para construir as ferramentas tecnológicas a serem utilizadas, por parte dos professores. E quanto aos estudantes, o professor é o responsável em acompanhar essas relações dos sujeitos com os conhecimentos e com os artefatos envolvidos.

Desenvolvimento da situação matemática

Etapa 1: identificação do elemento <f(x, y)> do comando,

Passo 1: (Professor)

A instrumentalização realizada pelo professor acontece quando ele vai iniciar sua tarefa de construção dos campos de direções no Geogebra. Ele tem à sua disposição o conhecimento matemático e deve transportá-lo para a ferramenta, ou seja, trata-se do processo que vai do sujeito ao artefato e como isso ocorre. Nesse caso, a noção matemática em jogo é campo de direções (conhecimento do professor). Assim sendo, ele parte desse conhecimento e vai em busca de um comando que tenha relação com ele. A instrumentação revela-se no sentido contrário, uma vez que ele tem o comando e agora via analisar como se faz a identificação dos elementos da equação diferencial com os elementos indicados no comando, isto é, o processo que parte do artefato ao sujeito.

Passo 1 (Estudante)

A instrumentalização do estudante vai ocorrer de formas diferentes, pois depende das condições de cada um em relação aos conhecimentos em jogo. No entanto, há nessas situações algo perceptível que se pode antecipar. O estudante diante de um computador começa, antes mesmo de o professor sugerir qualquer coisa, buscar dados no computador utilizando seus conhecimentos, ou seja, ele inicia a instrumentalização, podendo, nesse caso, buscar comandos sobre funções, derivadas, noções para eles próximas da temática. Consideramos que, nesse passo, seja ainda difícil que aconteça o processo de instrumentação do estudante, pois ele deve desconhecer a noção de campo de direção. E, portanto, não deve se movimentar do artefato para o conhecimento, mas sim esperar as instruções do professor.

Passo 1 (orquestração)

Objetivo: levar o estudante a identificar os primeiros elementos do comando e distinguir o que é conhecido em uma equação diferencial, bem como o que se quer buscar. Várias possibilidades de configurações e modo de exploração podem serem realizadas nesse primeiro passo.

Alguns exemplos:

- A classe organiza-se em uma configuração de raio, isso quer dizer, todas carteiras saem de um ponto central e ficam direcionadas convenientemente para a tela de projeção, o professor escolhe um estudante *sherpa*. Esse estudante tem a função de resolver a tarefa e projetar sua solução na tela, para alimentar a discussão. O professor pode andar pela sala e acompanhar o trabalho dos estudantes na realização dos dois processos, de instrumentalização, mas principalmente o de instrumentação.

- A classe se organiza em grupos de alunos sem o *sherpa.* Os grupos podem contar com 3 ou 5 estudantes ficando um deles o responsável em projetar a produção do grupo.

- O ambiente é um laboratório no qual as cadeiras são fixas. Nesse caso, a figura do estudante *sherpa* é fundamental, pois o professor tem maior dificuldade em acompanhar as tarefas dos estudantes. A projeção do que o estudante *sherpa* realiza vai ser para o professor a referência para a discussão. O professor pode conduzir a sessão sugerindo que o estudante *sherpa* altere em sua projeção situações propostas pelos outros estudantes, registrando assim trabalhos individuais.

Modos de exploração.

- Pode-se apresentar a escrita de uma equação diferencial indicada em uma forma genérica y'=f(x,y) ou $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ e, em seguida, uma equação diferencial específica como y´= 2*x*. Como sequência, pode-se discutir, por meio da proposta do *sherpa*, as relações entre a equação genérica e a específica. É importante que o professor, nessa discussão, leve o aluno a perceber na equação qual é o dado conhecido e qual é o procurado quando se resolve uma equação diferencial. Isso deve ser feito sempre em uma situação de debate e de levantamento de conjecturas, tomando por base o que o estudante *sherpa* projetou na tela em confrontação com a resolução dos demais estudantes.
- Pode-se solicitar a cada grupo a proposição de uma equação diferencial com a identificação dos elementos da equação específica com a genérica, por exemplo, e, posteriormente, realizar a discussão entre representantes de um grupo, e os demais colaboram com as respostas dos representantes. O professor sempre levanta outras questões para a discussão.
- A aula pode começar com a projeção das tarefas realizadas em casa de um estudante *sherpa*, escolhido por sorteio. Ele confere a tarefa de alguns estudantes, também sorteados, as projeta e as comenta. Em seguida, os demais estudantes participam validando ou não as proposições do *sherpa*. Em jogo o significado dos dados conhecidos e a serem encontrados, além da identificação dos elementos que aparecem na equação genérica com as das equações específicas.

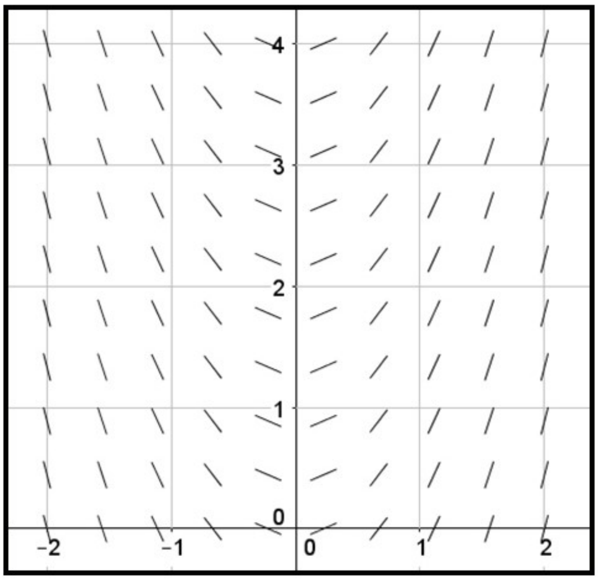
Em qualquer uma das configurações, ou modos de exploração, a orquestração deve levar os estudantes a reconhecerem a função do comando <f(x, y)>, ou seja, ficar sistematizada a identificação do comando quando da busca de solução de uma equação diferencial específica. E esse reconhecimento deve estar associado ao conhecimento matemático.

Etapa 2: inserção dos controles deslizantes e a atribuição dos nomes, extremos dos intervalos e incrementos: Controle deslizante 1: Densidade (10,100); incremento: 1; Controle deslizante 2: Fator (0, 1) – incremento: 0.01; Controle deslizante 3: Minx – mínimo –100 e máximo 100 – incremento: 1; Controle deslizante 4: Miny – mínimo –100 e máximo 100 – incremento: 1; Controle deslizante 5: Maxy – mínimo Minx e máximo 100 – incremento: 1; Controle deslizante 6: Maxy – mínimo Miny e máximo 100 – incremento: 1;

Etapa 3: Construção de um campo de direções para uma dada equação diferencial, como, por exemplo, a equação diferencial $y' = 2x$, com o campo de direções expresso no conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 4\}$.:

Após todas as identificações (relações artefato/conhecimento) obtém-se: Entrada: CampoDeDireções[2x, 10, 0.5, -2, 0, 2, 4].

Figura 4. Campo de direções da equação diferencial



Fonte: Os autores.

Considerações Finais

Nessa proposta de orquestração instrumental, foram realizados a afinação dos instrumentos e apenas alguns ensaios. A apresentação do concerto precisaria de mais espaço e de atores reais. O que pretendemos com essa pesquisa foi divulgar, aos interessados, a ação de uma orquestração instrumental em suas aulas de equações diferenciais com recursos digitais. As potencialidades desse quadro teórico têm sido divulgadas por pesquisas internacionais. No Brasil, ainda é tímida sua utilização em pesquisas ou em práticas docentes. Essa pesquisa levou em conta o embasamento teórico, experiências profissionais e utilização de dados de pesquisas anteriores. Desejamos evidenciar o que são os processos de instrumentalização (do artefato para o sujeito) e de instrumentação (do sujeito para o artefato) que acarretam a aprendizagem de um conceito matemático com uso de recursos digitais. E esses processos orientam as ações da orquestração, ou seja, das escolhas das configurações didáticas e dos modos de exploração elementos essenciais para a participação do estudante em sua aprendizagem. O significado dessa aprendizagem é aquele "de construções mentais, ou seja, esquemas ou estruturas, como cruciais, e admitindo um potencial para a tecnologia digital em apoiar o processo de construção, por meio de processos como instrumentação e instrumentalização" (TROUCHE e DRJIVERS, 2014, p. 8 – adaptado).

Recebido em: 18/12/2018
Aprovado em: 23/12/2018

Referências

ARTIGUE, M. Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; WINKLEMANN, B. **Didactics of mathematics as a scientific discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994, p. 27-39.

BICUDO, M. A. V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 9, p. 7-20, junho, 2014.

CHEVALLARD, Y. Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques : le problème de l'ingénierie didactique. In. B. Cornu (dir.). **L'ordinateur pour enseigner les mathématiques**. Paris: PUF, 1992, p. 183-203.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H. e GRAVEMEIJER, K. The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in mathematics**, v. 75, n. 2, p. 213-234, 2010.

GUIN, D.; TROUCHE, L. The complex process of converting tools into mathematical Instruments: the case of calculators. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, 3, 195-227,1999.

IGLIORI, S. B. C. e ALMEIDA, M. V. de. Aplicações para o Ensino de Equações Diferenciais. **Alexandria**, v. 10, n. 1, p. 257-270, maio 2017.

OLIVEIRA, E. A. **Uma engenharia didática para abordar o conceito de equação diferencial em cursos de Engenharia**. 2014. 159 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

OLIVEIRA, E. A. e IGLIORI, S. B. C. Ensino e Aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 2, p. 2-22, 2013.

PIAGET, J. **La Naissance de L'Intelligence chez L Enfant**. Neuchâtel: Delachaux et Nestlé, 1936.

RABARDEL, P.; VERILLON, P. Cognition and artifact: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. **European Journal of Psychology in Education,** v. 10, n. 1, p.77-101, 1995.

TROUCHE, L. Managing the Complexity of Human- Machine Interactions in Computerized Learning Environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, n. 9, p. 281-307, 2004.

TROUCHE, L.; DRIJVERS, P. Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education. **Teaching Mathematics and its Applications: an International Journal of the IMA**, v. 33, n. 3, Sept. p. 193-209, 2014.

VERGNAUD, G. Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. In: NOIRFALISE, R. e PERRIN-GLORIAN, M-J. (orgs). **Actes de VIIIe École et Université d'Été de Didactique des Mathématiques**. Clermont Ferrand: Edition IREM. p. 174-185, 1996.