emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2019v6i2p1-49

AVALIAÇÃO DA PROFICIÊNCIA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM EQUAÇÕES LITERAIS: um estudo de caso comparativo com proposta de manual didático

EVALUATION OF THE PROFICIENCY OF MATHEMATICS TEACHERS IN LITERAL EQUATIONS: a comparative case study with a teaching manual proposal

Evando Santos Araújo[1]
Manoel Pereira da Silva Filho[2]

RESUMO

Equações literais são expressões matemáticas que possuem, além da variável em questão, coeficientes representados de forma genérica por letras. Essas equações recebem destaque na busca por uma aprendizagem de matemática mais significativa, uma vez que podem ser utilizadas para modelar e interpretar inúmeros fenômenos em diversas áreas do conhecimento. Neste trabalho, avaliou-se a proficiência de professores de matemática em equações literais por meio das respostas dadas por eles a questionários que discutiam aspectos da formação acadêmica, da prática docente e do conhecimento técnico sobre o assunto. Os dados coletados foram analisados via modelo de Rasch Dicotômico, antes e depois da disponibilização de um manual didático aos participantes da pesquisa, produzido para sanar possíveis dificuldades com o tema. Os resultados iniciais se mostraram bastante preocupantes, uma vez que, para a grande maioria dos participantes, o modelo demonstrou que a habilidade desses profissionais era insuficiente para que respondessem positivamente aos itens

1. Professor da Universidade Federal do Vale do São Francisco na área de conhecimento de Matemática Aplicada ao Ensino de Ciências. Atualmente pesquisa nas áreas de Ensino de Matemática e de Materiais. E-mail: evando.araujo@univasf.edu.br.
2. Licenciado em Matemática pela Universidade de Pernambuco – UPE e Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF e participante do Grupo de Pesquisas em Inovações para o Ensino de Matemática. E-mail: manoel.silvafilho@univasf.edu.br.

sobre o conhecimento do conteúdo. Esse resultado foi relacionado à formação inicial e ao exercício docente. Por outro lado, verificou-se que após a capacitação com o manual didático, o nível de conhecimento desses indivíduos aumentou significativamente nos quesitos avaliados inicialmente, com consequente aumento das probabilidades de sucesso com o tema.

Palavras-chave: *Ensino e aprendizagem; Equações literais; Intervenção didática; Avaliação; Modelo de Rasch.*

ABSTRACT

Literal equations are mathematical expressions that have, besides the variable in question, coefficients generally represented by letters. These equations are highlighted in the search for a more meaningful mathematical learning, since they can be used to model and interpret phenomena in several areas of knowledge. In this work, the proficiency of mathematics teachers in literal equations was evaluated based on the answers given by them to questionnaires that discussed aspects of academic formation, teaching practice and technical knowledge on the subject. The collected data were analyzed through the Dichotomous Rasch model, before and after the provision of a didactic manual to the research participants, produced to remedy possible difficulties with the theme. The initial results were very worrying since, for the great majority of the teachers, the model returned that the professionals' ability was insufficient to respond positively to the items on the knowledge of the content. These results were related to the training at undergraduate level and the teaching practice of the participants. On the other hand, it was verified that after training with the didactic manual, there was a great evolution in the level of ability of these individuals, with consequent increase of the probabilities of success with the theme.

Keywords: *Teaching and learning process; Literal equations; Didactic intervention; Evaluation; Rasch model.*

Introdução

A busca por metodologias alternativas que tornem os processos de ensino e aprendizagem de matemática mais significativos são cada vez mais discutidas no Brasil e no mundo. A matemática ensinada por meio de novas tecnologias, de jogos e materiais concretos, da interdisciplinaridade, da etnomatemática, da história da matemática e da resolução de problemas (RP) são algumas das tendências pedagógicas atuais (RODRIGUES e GAZIRE, 2012; SANTOS; LORETO e GONÇALVES, 2010; FARIA e FREITAS-REIS, 2016; MELO e FIREMAN, 2016).

A RP vem se destacando como um tema atual de pesquisa na busca por situações didáticas que aliem os conceitos matemáticos às situações práticas cotidianas. Já as chamadas equações literais se inserem como um subtema central da RP e merecem bastante atenção, uma vez que podem ser utilizadas pelo professor para discutir e modelar com os estudantes vários fenômenos e situações em diversas áreas do conhecimento, por meio das relações entre as quantidades envolvidas.

Por outro lado, colocar em prática metodologias alternativas como essa, frente ao ensino clássico, requer do professor um desenvolvimento profissional que garanta utilizá-las de forma a transformar suas aulas em eventos de discussão e pesquisa do mundo real, o que muitas vezes é difícil de obter com a formação docente em nível de graduação, predominantemente tradicional, com disciplinas do currículo isoladas umas das outras, muito comum atualmente. Nesse contexto, ações de capacitação e formação continuada são cada vez mais requeridas com vista ao desenvolvimento profissional docente diante das constantes mudanças do meio e da sociedade à sua volta (SANTOS e COSTA, 2013).

Neste trabalho, o modelo probabilístico de Rasch foi utilizado para avaliar o nível de proficiência de professores de matemática do ensino básico em equações literais, relacionando-o com aspectos da formação inicial e prática docente. Para tanto, foi aplicado um questionário com perguntas significativas abordando situações da formação profissional, prática docente e conhecimento do conteúdo. As respostas ao questionário foram analisadas antes e depois de intervenção com disponibilização de um manual didático de equações literais aos participantes da pesquisa. Os resultados iniciais mostraram-se bastante preocupantes, uma vez que a maioria dos professores não respondeu positivamente aos itens do questionário que discutiam o conhecimento, uso e aplicação de equações literais. Por outro lado, verificou-se que a ação de capacitação com a aplicação do manual didático aumentou consideravelmente o nível de proficiência dos docentes, com consequente aumento das probabilidades de sucesso com o tema.

Formação inicial *versus* desenvolvimento profissional do professor de matemática

Atualmente, as pesquisas em ensino e educação matemática focam grande parte das suas investigações na formação inicial e continuada de professores, bem como nas dificuldades encontradas por esses e pelos estudantes no processo de ensino e aprendizagem (SANTOS e COSTA, 2013). É notável que, à medida que o discente não consegue entender a matemática que se ensina, a probabilidade de reprovação nessa disciplina aumenta consideravelmente. São também comuns os casos em que o estudante é aprovado, mas não consegue fazer relações ou colocar em prática o conhecimento adquirido em sala de aula. Com isso, o objetivo do processo de ensino e aprendizagem não é alcançado: o educando continua sem saber para quê e o porquê da matemática em sua vida cotidiana, além de não conseguir desenvolver um pensamento crítico, visualizar e/ou fazer relações com o mundo a sua volta e utilizá-la em prol de melhorias à sociedade (FIORENTINI e LORENZATO, 2009).

Pesquisas indicam que é comum se deparar com professores que tiveram uma formação inicial que não aliava a teoria à prática, levando-os a ensinar a reprodução de operações puramente matemáticas sem interpretações e relações com situações do cotidiano. Esses estudos também defendem que as disciplinas de didática da matemática deveriam estar mais interligadas às diversas outras disciplinas do currículo, tornando-as mais práticas, eficazes e significativas (SANTOS e COSTA, 2013).

De forma resumida, Melo (2000) reforça essa perspectiva quando afirma que "o professor deve construir em seus estudantes a capacidade de aprender e de relacionar a teoria à prática em cada disciplina do currículo". Fiorentini e Lorenzato (2009) destacam esse contexto, quando descrevem que se deve dar ao estudante o direito de aprender no qual ele participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido para superar sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. Uma das ações para alcançar esses objetivos no cenário educacional atual é aliar a formação inicial a novos elementos profissionais que possam ser capazes de contribuir para modificar o quadro de defasagem em que a educação matemática brasileira se encontra. De acordo com Perez (2004), o professor não pode se considerar um ser profissionalmente acabado, a profissão de professor, assim como qualquer outra, requer o desenvolvimento profissional ao longo de toda a carreira. Entende-se por desenvolvimento profissional do professor uma ação dinâmica e evolutiva do papel docente, que engloba processos que melhorem o seu conhecimento profissional, suas habilidades e suas atitudes diante das constantes transformações do meio e da sociedade (SOUZA e FERREIRA, 2018). Em outras palavras, a formação acadêmica inicial em nível de graduação é um suporte fundamental para se adquirir os preceitos básicos da profissão de professor de matemática. Além disso, o contato do professor com ações de capacitação e formação continuada contribui para um desenvolvimento profissional necessário à interpretação de problemas educacionais atuais e à ação sobre eles nos mais diversos aspectos (FIORENTINI e LORENZATO, 2009).

Como consequência do desenvolvimento profissional, o docente adquire novas e importantes competências inerentes à sua ação reflexiva que farão parte da sua prática docente a partir de então. A reflexão sobre o material bibliográfico, a sugestão de novos materiais, a criação e/ou adaptação de situações didáticas, a troca de experiências com professores, o uso de metodologias alternativas em sala de aula, a elaboração e participação em projetos, a participação em congressos e seminários da área são algumas das ações inerentes ao professor que busca se desenvolver na carreira docente com vista à melhoria do processo ensino e aprendizagem (SOUZA e FERREIRA, 2018).

Resolução de problemas como metodologia alternativa de ensino

Tentar resolver problemas pode despertar a curiosidade e o gosto pela matemática, além de exercitar a mente e o sentimento de prazer e dever cumprido pela descoberta (LEÃO e BISOGNIN, 2009). Devido à sua notável importância, a resolução de problemas (RP) tornou-se uma tendência pedagógica (ou metodologia alternativa de ensino) usual no processo ensino e aprendizagem de matemática. A utilização da RP ficou em evidência como tendência pedagógica com George Polya com a publicação do livro "*How to solve it*" em 1945, lançado no Brasil em 1978 com a tradução "A arte de resolver problemas" (POLYA, 1995). A sua principal defesa era que a RP poderia ser interpretada como um processo organizado e deveria seguir determinados passos progressivos, a saber:

compreender, planejar, executar e revisar. A partir da década de 1980, essa metodologia ganhou força e conquistou outros pesquisadores pelo mundo, como Alan Schoenfeld, Frank Lester e Charles Randall, que ajudaram a disseminar a sua importância na busca da construção do conhecimento desenvolvida pela compreensão do próprio estudante (MILANI, 2011). Nesse sentido, à medida que a compreensão do estudante se aprofunda, a capacidade de identificar e resolver outros diversos tipos de problemas usando matemática aumenta significativamente.

Para sistematizar a RP como metodologia de ensino significativa, deve-se entender que essa proposta se baseia na aplicação da matemática ao mundo real, para preparar os educandos para situações práticas do dia a dia com as quais eles possam se deparar (SILVA e COSTA, 2013). Nesta concepção de ensino, o educador matemático deve unir teoria e prática de diversas áreas emergentes do conhecimento, modelar e solucionar problemas que vão além do conhecimento matemático, estabelecendo relações necessárias para um bom entendimento da situação problema. Por isso, há necessidade notável de o docente pesquisar constantemente sobre relações matemáticas que explicam o mundo em diversas áreas da ciência para propor problemas contextualizados com o meio e a sociedade. É importante deixar claro que na RP não se pode interpretar que o ensino de matemática ocorre apenas em função da matemática necessária para solucionar um dado problema. Silva e Costa (2013) ainda destacam que a força da RP está no fato de que o professor necessitará de um amplo repertório de conhecimentos, sem se restringir às particularidades técnicas e aos conceitos matemáticos, o que também enriquece as possibilidades de crescimento profissional e intelectual do professor de matemática, com consequência direta na melhoria do ensino.

No contexto da RP, os casos propostos devem fazer com que o estudante desenvolva a capacidade de tentar entender, interpretar, buscar, supor, testar e provar situações reais através de relações matemáticas equivalentes que as modelam. Essa é uma alternativa totalmente oposta às apresentadas pelos problemas puramente matemáticos. De modo geral, o senso comum entre os pesquisadores da área indicam a necessidade de quatro tipos de conhecimento para que o estudante tenha sucesso na RP: i) habilidade nos procedimentos e temas matemáticos em questão; ii) métodos e estratégias de solução como, por exemplo, esboçar esquemas; iii) capacidade de interpretar e de relacionar as variáveis envolvidas no problema à medida em que a solução vai sendo desenvolvida, com vista a detecção de padrões (não como meio para resolução, mas como finalidade); iv) testar a solução proposta, verificando possibilidades de soluções alternativas e (ou) um melhor detalhamento da que foi proposta. Nesse contexto, as chamadas equações literais inserem-se como um subtema da RP, como potencial ferramenta para se alcançar essas competências.

Equações literais

As equações literais são equações (ou expressões matemáticas) que possuem, além da variável (ou incógnita) em questão, coeficientes (ou parâmetros) representados de forma genérica por letras (em um ou ambos os membros da equação) que se relacionam entre si. Em uma linguagem mais simbólica, elas podem ser entendidas também como "receitas" matemáticas para se encontrar o valor numérico de uma variável em função de quantidades(s) dada(s). A letra que representa a variável em questão quase sempre significa algum tipo de quantidade do mundo real tais como volume, temperatura, pressão, quantidade de juros, um investimento ganho, etc. Se os valores de todas as quantidades envolvidas forem conhecidos, exceto a de uma delas, podemos lançar esses valores na equação (lei de formação do problema) e encontrar o valor da quantidade indeterminada em função da(s) quantidade(s) dada(s). Essas equações têm sua grande importância quando usadas para generalizar e modelar matematicamente inúmeras situações em diversas áreas do conhecimento. Dessa forma, as informações sobre um dado fenômeno podem ser obtidas por meio da solução da equação que o representa (SHERWOOD, 1988).

Por exemplo, a equação $s = s_0 + vt$ é uma equação literal que modela a posição final de um móvel em função do tempo, no movimento uniforme (MU). Nesse caso, a letra "s" representa a posição final do móvel, "s_0" representa sua posição inicial, "v" a velocidade (constante) e "t" o tempo. Observe que, nesse caso, a posição inicial e a velocidade constante do móvel devem ser quantidades conhecidas no problema. Com algumas manipulações algébricas, podemos explicitar o valor de "t" em função das outras grandezas, assim teremos $t = \dfrac{s - s_0}{v}$ como solução. Com a equação nesse novo formato, além de calcularmos o tempo necessário para se percorrer determinado deslocamento ou trajetória, podemos afirmar que nessa lei, a variável "t" é diretamente proporcional à variação de espaço ($s - s_0$) percorrido, isto é, quanto maior o deslocamento, maior o tempo gasto para percorrê-lo. Além disso, podemos observar que o tempo é inversamente proporcional a v, isto é, quanto maior a velocidade menor o tempo gasto no deslocamento do móvel.

Esse é um exemplo clássico de uma equação literal de grau 1 que pode ser explorada pelo professor na tentativa de fazer com que os estudantes possam checar diversas informações que estão implícitas na situação, por meio da análise das relações e proporcionalidades entre as quantidades envolvidas e entender e relacionar o problema de forma lógica e crítica, o que seria difícil de obter apenas com quantidades dadas numericamente (SHERWOOD, 1988). No Apêndice A, é apresentado um manual didático de equações literais do 1° Grau (com uma discussão mais detalhada dessas relações, com exemplos, passo a passo para solução e diversos exercícios aplicados) que foi utilizado nessa pesquisa com o objetivo de desmistificar aos professores os conceitos já discutidos anteriormente, com vista à melhoria do processo ensino e aprendizagem.

O modelo de Rasch dicotômico

O modelo de Rasch dicotômico é parte integrante de um conjunto de modelos probabilísticos da Teoria de Resposta ao Item (TRI), utilizados para avaliar a proficiência de indivíduos, tendo-se por base a análise de suas respostas dadas em um questionário. O modelo torna-se interessante, uma vez que permite diagnósticos individuais em detrimento de análises que levam em conta apenas estatísticas grupais e descritivas dos dados. A possibilidade de um indivíduo retornar uma resposta positiva em um dado item de um teste é representada numericamente por meio de uma probabilidade (P), dada como função da habilidade de esse indivíduo responder satisfatoriamente a um item e da dificuldade estimada desse item (RASCH, 1980).

Esse modelo tem sido utilizado em uma série de trabalhos acerca de ensino e educação matemática (CALLINGHAM e BOND, 2006). Como exemplo, Warwick (2012) utilizou a análise de Rasch para explorar a eficácia de um questionário desenvolvido para auxiliar professores universitários na identificação de estudantes ingressantes na universidade que mais precisavam de uma tutoria em matemática.

Já Haines e Crouch (2001) empregaram Rasch para validar um teste piloto com potencial aplicação para avaliar o nível de habilidade de estudantes universitários para lidar com processos que envolviam modelagem matemática, relacionando os resultados obtidos com o estilo de ensino adotado pelas instituições aos quais pertenciam. Ryan e Williams (2007), por meio de uma avaliação personalizada, usaram uma análise de forma semelhante, mas com o objetivo de fornecer um *feedback* a professores estagiários formandos.

O trabalho do grupo de Van Stiphout (2014) usou Rasch para avaliar a evolução da capacidade algébrica de estudantes de ensino médio ao longo do ano letivo e apontou que o método é eficaz para verificar mudanças no nível de proficiência dos estudantes após intervenções propostas.

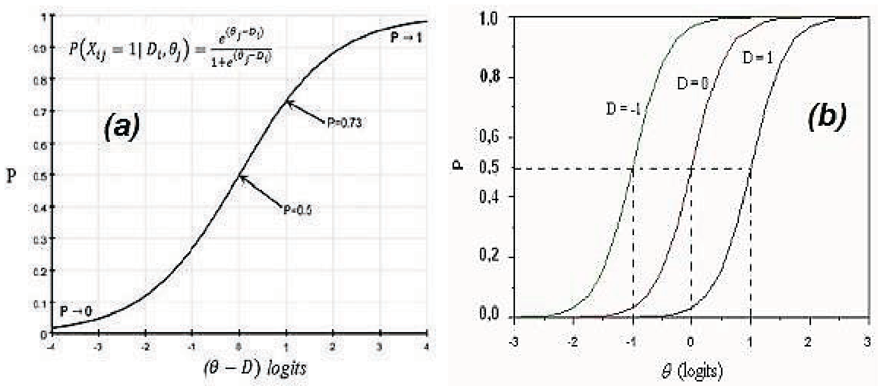
Aplicando o modelo, a análise das respostas dos indivíduos a um item fica condicionada às respostas dadas por eles aos outros itens do questionário. Essa conexão gera para cada variável um nível relativo de interferência no estudo em questão, denominado dificuldade do item. Se considerarmos D_i como o parâmetro que expressa a dificuldade de um item $i = 1, 2, 3..., n$ e θ_j o parâmetro que expressa a habilidade de um indivíduo $j = 1,2,3..., m$, dada uma combinação particular de i e j, (i, j), o modelo de Rasch dicotômico retorna a probabilidade do indivíduo j responder de forma satisfatória ao item i, de acordo com a Equação 1:

$P\left(X_{ij} = 1 | \; D_i, \theta_j\right) = \frac{e^{(\theta_j - D_i)}}{1+e^{(\theta_j - D_i)}}$ (Eq. 1). Ao desenvolver a Eq. 1, considerando-se $P\,(X_{i\,j} = 1 \mid D_i\,,\, \theta_j) = P,\ \theta_j = \theta$ e $D_i = D,$ obtém-se: $\ln\left(\frac{P}{1-P}\right) = \theta - D$ (Eq. 2). Com a equação nesse novo formato, a comparação entre θ e D pode ser feita em uma mesma escala métrica de valores (chamada de logits ou log da chance de sucesso), no intervalo $(-\infty,\infty)$, o que facilita a interpretação dos resultados: um indivíduo (ID) só conseguirá responder positivamente a um item quando sua habilidade (θ) for maior ou igual à dificuldade do item (D). Em outras palavras, quando $\theta \geq D$, a probabilidade de resposta correta (P) será sempre maior ou igual a 0,5. Quanto mais positivo for o valor de D de um item, maior a sua dificuldade e vice-versa; e, quanto mais positivo for o valor de θ para um ID, maior sua habilidade e vice-versa.

O modelo também pode ser representado graficamente pelas curvas sigmoides *P versus* (θ $-$ D) (Figura 1). Os IDs (ou grupo de IDs) estarão então localizados sobre a curva, obedecendo às combinações específicas dos parâmetros θ e D. A probabilidade mínima de resposta positiva (P = 0,5 ou $\theta = D$) de um ID ocorre no ponto de inflexão da curva. Em adição, entrevistados situados após o ponto de inflexão da sigmoide (Figura 1a) possuem um valor de P maior que 0,5 (RASCH, 1980).

Outra forma de representar a relação entre as variáveis do modelo para cada item do questionário é por meio da Curva Característica do Item (CCI) (gráfico *P versus* θ, Figura 1b). Embora a dificuldade do item não seja informada de forma explícita na CCI, sabe-se que quando P = 0,5, $\theta = D$ e, dessa forma, a dificuldade de cada item pode ser mensurada no eixo das habilidades (θ) no ponto de inflexão da curva.

Figura 1. (a) Representação gráfica de *P versus* (θ $-$ D), com localização de valores de P sobre a curva. (b) Curvas Características dos Itens (CCI).



Fonte: Próprio autor.

Quanto maior a dificuldade de um item, mais à direita estará a sua CCI em relação às curvas dos itens com menor dificuldade.

Metodologia

O estudo consistiu em uma pesquisa experimental, com abordagem predominantemente quantitativa e caráter exploratório. Aplicou-se, por meio do *software* Minitab (MINITAB®, 2019), uma amostra aleatória simples de cinquenta e quatro professores (chamados de ID's) de uma população de cento e oito docentes de matemática de ensino fundamental e médio, participantes de uma capacitação profissional presencial ofertada anualmente em uma cidade do nordeste brasileiro. Desses, 46 ID's (n = 46) concordaram em participar do estudo e assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido antes de responderem aos instrumentos da pesquisa.

Para a análise dos dados coletados, *via* modelo de Rasch, foram aplicados dois questionários elaborados pelos autores por meio de um estudo preliminar acerca da literatura. As questões abordaram tópicos representativos da formação inicial em nível de graduação, do conhecimento técnico e da experiência profissional dos participantes que pudessem ser relacionados com o nível de proficiência dos ID's em equações literais. O primeiro, denominado de Q1, foi aplicado no mesmo local onde ocorria a capacitação. Os ID's tiveram 60 minutos para responderem ao Q1 com itens numerados de 1 a 10 (**Quadro 1**) de forma individual e sem o auxílio de fontes de pesquisa, para que as respostas aos itens fossem as mais fidedignas possíveis. Já o segundo, denominado de Q2, foi enviado por *e-mail* aos ID's respondentes, logo após o encerramento do Q1. Junto ao Q2, também foi enviado um Manual Didático (MD) de Equações Literais, produzido pelos autores da pesquisa durante o período de revisão bibliográfica, o qual abordava conceitos, uso e aplicações do tema (**Apêndice A**). Para a análise da proficiência dos ID's *via* modelo de Rasch (antes e depois do MD), foram considerados no Q2 os mesmos itens de 1 a 10 do Q1, mas apenas os itens de 6 a 10 foram disponibilizados nesse segundo momento, já que as respostas aos itens de 1 a 5 eram invariantes do Q1 ao Q2.

Quadro 1. Descrição dos itens do Q1 e Q2 avaliados *via* modelo de Rasch.

Item	Descrição/justificativa
1. É licenciado em Matemática?	Podem existir dois tipos de profissionais que ministram aulas de matemática nas escolas de educação básica da região: os que são formados em Matemática e os que são formados em outras áreas do conhecimento. Espera-se que o fato de o entrevistado não ter visto esse conteúdo na graduação esteja ligado à sua formação em área diferente da área de matemática.
2. Você estudou equações literais de 1º e 2º graus em seu curso de graduação?	Provavelmente, a maioria dos entrevistados estudou esse assunto (ou algum relacionado) na graduação.
3. Você trabalha/já trabalhou com equações literais de 1º grau nas turmas de sua responsabilidade, descrevendo-as e resolvendo-as?	Verificar se realmente o professor trabalha esse conteúdo em sala de aula. Respostas negativas dadas aos itens de 6 a 10 (conhecimento, aplicação e importância do conteúdo) podem estar relacionadas.
4. Você trabalha/já trabalhou com equações literais de 2º grau nas turmas de sua responsabilidade, descrevendo-as e resolvendo-as?	Verificar se realmente o professor trabalha esse conteúdo em sala de aula. Respostas negativas dadas aos itens de 6 a 10 (conhecimento, aplicação e importância do conteúdo) podem estar relacionadas com essa condição.
5. O livro que você trabalha em sala de aula aborda explicitamente o estudo de equações com coeficientes literais?	Verificar se esse conteúdo é encontrado nos livros didáticos utilizados pelos professores. O fato de os livros didáticos não apresentarem esse conteúdo também pode estar relacionado com possíveis respostas negativas aos próximos itens do questionário.
6. Neste momento da pesquisa você saberia definir com suas palavras o que é uma equação literal? Se sim, defina.	O fato de o entrevistado saber definir o tema em questão é um passo importante para que ele possa responder os próximos itens de forma positiva.
7. Dê dois exemplos quaisquer (diferentes) de equações literais do 1º grau identificando a incógnita em questão.	A apresentação de exemplos é um indicativo de que o ID tem conhecimento técnico do assunto.
8. Descreva e equacione uma situação problema (elaborar uma questão aplicada) que para ser solucionada necessite da resolução de uma equação literal do 1º grau.	Apresentar e equacionar uma situação problema requer mais habilidade do entrevistado do que simplesmente apresentar um exemplo de equação literal. Na maioria das vezes, a elaboração de uma situação-problema requer não só conhecimentos do tema, mas também de outras áreas do conhecimento para que o conteúdo ganhe sentido crítico.
9. Resolva a questão elaborada no item anterior. Sempre que julgar necessário, explique os passos utilizados no desenvolvimento da solução.	Verificar se os professores participantes solucionam corretamente a situação-problema proposta no item anterior. Verificar se eles utilizam as operações algébricas adequadas para solucionar a situação-problema. Solucionar corretamente a questão indica outro atributo do entrevistado em detrimento apenas de elaborá-la.
10. Qual a importância do estudo das equações literais no currículo de matemática para a formação do estudante do ensino médio?	Analisar se os professores sabem se expressar sobre a importância das equações literais para a formação do estudante em nível médio.

Fonte: Próprio autor.

As questões de 11 a 17 (**Quadro 2**) foram adicionadas ao Q2 para que os ID’s pudessem avaliar o MD produzido. Eles tiveram até o final da capacitação (quatro dias) para estudarem o MD e entregarem o Q2 respondido aos pesquisadores.

Quadro 2. Descrição dos itens de 11 a 17 utilizados no Q2.

11. O manual didático de equações literais enviado lhe ajudou a desmistificar conceitos e importância desse tipo de equação?
12. Você tem conhecimento de outro material didático que trate de equações literais explicitamente?
13. No geral, a linguagem utilizada no material está adequada para estudantes de graduação e professores?
14. O material dá a oportunidade de o professor adaptá-lo com uma linguagem mais específica para os estudantes do ensino médio?
15. Você usaria este manual como uma fonte alternativa de apoio didático nas suas aulas de matemática?
16. De zero a dez, qual a sua nota para a proposta do material didático produzido sobre equações literais?
17. Fique à vontade para expor sugestões/críticas ao material didático produzido.

Fonte: Próprio autor.

Os valores dos parâmetros θ *e* D foram calculados após obtenção dos dados experimentais, *via* modelo de Rasch dicotômico, no *software* estatístico de domínio público jMetrik 3.0. Os parâmetros foram estimados por máxima verossimilhança, utilizando-se o algoritmo iterativo de Newton-Raphson (máximo de 150 iterações ou critério de convergência de 0,005). Com a estimativa dos parâmetros, as probabilidades de sucesso, $P(D_i, \theta_j)$, foram calculadas a partir da Eq. 1 em uma planilha do Excel. A análise estatística dos dados foi realizada com o *software* Minitab. Os resultados amostrais (n = 46) de habilidade (média amostral de habilidades ($\bar{\theta}$) e desvio padrão ($s_{\bar{\theta}}$)) foram interpretados por meio de técnicas estatísticas descritivas usuais. As médias populacionais de habilidade (média estimada para o total de professores) antes e depois da disponibilização do manual didático (MD) foram determinadas em termos de intervalos de confiança $\left(\bar{\theta} - t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)} \frac{s_{\bar{\theta}}}{\sqrt{n}} ; \bar{\theta} + t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)} \frac{s_{\bar{\theta}}}{\sqrt{n}}\right)$, com distribuição t de *Student*, nível de significância do teste $\alpha = 0{,}05$ e $(n - 1)$ graus de liberdade.

Para analisar se houve diferença significativa nas médias de habilidade dos ID's do Q1 ao Q2, realizou-se um teste de hipóteses de comparação entre duas médias (teste t de *Student* para comparação de duas médias com variâncias populacionais diferentes e desconhecidas, e $\alpha = 0{,}05$).

Resultados e discussão

Análise dos parâmetros D e θ

Com base no modelo de Rasch, a amplitude dos *scores* de D é o primeiro indício de que os itens escolhidos para compor o questionário apresentam-se em diferentes níveis de dificuldade. Essa análise inicial se faz necessária, uma vez que a elaboração de um questionário com itens com grau crescente de dificuldade é uma prerrogativa do modelo para as análises subsequentes. A análise de Rasch permite essa investigação por meio do índice de separação dos itens, um parâmetro estatístico adimensional que avalia a hierarquia dos itens de um questionário após análise dos dados experimentais (AZIZ, 2013). Valores maiores do que 3 confirmam a hierarquia dos itens. No questionário Q1, esse índice foi estimado em 4,15, indicando que o número e a descrição dos itens escolhidos para compor o questionário foram suficientes para proporcionar uma excelente propagação de dificuldades entre os itens. Em adição, esse resultado também confirma que o estudo detalhado realizado na fase de revisão da literatura se mostrou adequado para se produzir um questionário significativo à análise de Rasch.

Os itens de 1 a 5, referentes às questões relacionadas à formação acadêmica e profissional, não são comparados de um teste ao outro (respostas invariantes), embora tenham sido estimados normalmente pelo modelo por terem influência direta nas respostas dadas às questões posteriores. Na Tabela 1, são apresentados os valores estimados de dificuldade dos itens, antes (D_a) e depois (D_d) da aplicação do MD.

Tabela 1. Estimação dos *scores* de dificuldades dos itens do questionário pelo modelo de Rasch: antes (D_a) e depois (D_d) da aplicação do MD

Item	D_a	D_d
1	-6,71	-3,32
2	-2,14	0,66
3	-0,94	1,39
4	-0,36	1,83
5	0,24	2,35
6	0,69	-0,48
7	0,46	-1,17
8	2,60	0,10
9	3,56	-1,70
10	2,60	0,33

Fonte: Próprio autor.

Pode-se observar que no Q1, dos dez itens do questionário aplicado, o item 1 (É licenciado em matemática?) foi estimado como o score mais negativo (-6,71 logits), enquanto o item 9 (resolver a questão elaborada anteriormente) recebeu o score mais positivo (3,56 logits), seguido do item 8 (descrever e equacionar uma situação problema) e do item 10 (importância do estudo dessas equações para a formação do estudante), ambos com score 2,60 logits.

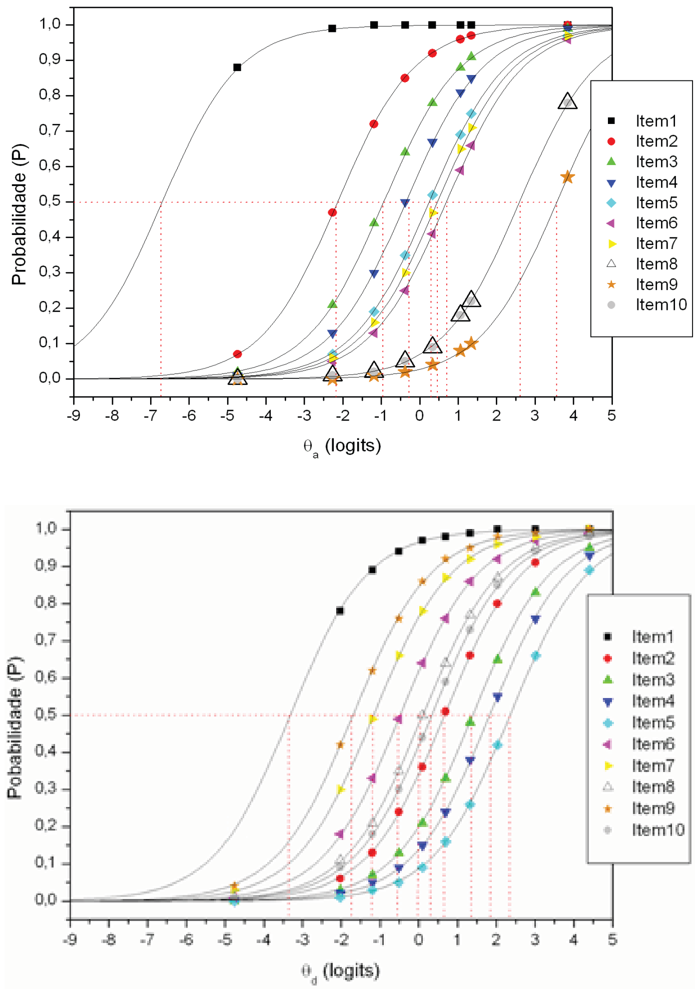
Dos resultados experimentais, observou-se que todos os 46 professores que participaram da pesquisa eram licenciados em matemática, o que explica o *score* muito negativo para o item 1 e a lacuna de 4,57 pontos na escala logits para a estimação do próximo item (-6,71 → -2,14) em ordem crescente de dificuldade, em comparação com a sequência de *scores* apresentados para os outros itens do Q1.

Como discutido na metodologia, a escolha desse item para compor o questionário foi considerada importante para o estudo, uma vez que respostas negativas quanto ao conhecimento e ao uso de equações literais pudessem estar ligadas ao fato de o entrevistado atuar como professor de matemática e possuir outra formação acadêmica. Em seguida, o item 2 recebeu uma pontuação de -2,14 logits. Nesse quesito, 46% dos professores responderam “não” e 54% informaram “sim” quando perguntados se estudaram equações literais de 1° e 2° grau no curso de graduação. Embora tenha sido um dos itens que mais recebeu respostas positivas, praticamente metade dos professores afirmou que não teve o contato com o conteúdo na graduação. Isso explica o fato de 68% dos ID's afirmarem nunca terem trabalhado as equações literais de grau 1 em sala de aula (em resposta ao item 3) e ao fato de 74% dos ID's não trabalharem com equações literais para desenvolver o conteúdo de equações polinomiais de grau dois, em resposta ao item 4. Essa é uma indicação de que a maioria dos professores trabalha equações de forma puramente matemática ou com problemas que retornam soluções particulares que dificultam a percepção do estudante quanto ao seu uso para explicar, modelar e generalizar situações práticas.

Essas respostas negativas também podem estar intimamente ligadas ao fato de 80% dos entrevistados terem afirmado que os livros didáticos adotados não trabalham explicitamente com esse tipo de equação. A obra *O livro didático em questão*, de Freitag, Mota e Costa (1997), discute essa situação quando fala que muitos profissionais levam em conta apenas o livro didático como fonte de consulta para preparar as aulas, o que o torna autoridade única do processo de ensino e aprendizagem. Os autores ainda discutem que teoricamente o livro deveria ser utilizado como instrumento auxiliar, e a busca por outras fontes de pesquisa também deveriam naturalmente fazer parte do fazer pedagógico do professor, o que muitas vezes não ocorre na prática: se o livro não apresenta conteúdos de forma significativa, há uma grande possibilidade de o professor reproduzi-los aos estudantes como são apresentados. Outras causas para que isso ocorra podem estar ligadas à falta da busca por desenvolvimento profissional e a alta carga horária de trabalho desses profissionais.

De forma geral, a amplitude dos valores de dificuldade dos itens diminuiu de 10,27 para 5,67 do Q1 para o Q2, em uma indicação de que os itens se tornaram menos discriminantes após a aplicação do MD. Intuitivamente, era de se esperar esse resultado já que foi detectado que todos os entrevistados eram formados em matemática e, por isso, ao ter contato com o MD, assimilariam facilmente os conceitos de equações literais, em comparação com um possível grupo de ID's que não tivessem conhecimento técnico em matemática. Esse resultado é o primeiro indício de que os entrevistados ficaram mais preparados para lidar com equações literais, evidenciando a eficácia do material didático. Esse comportamento pode ser confirmado por meio dos gráficos P x θ, que descrevem as curvas características dos itens (CCI) (Figura 2).

Figura 2. Curvas características dos itens (CCI) obtidas no Q1 (acima) e no Q2 (abaixo)



Fonte: Próprio autor por meio do Minitab.

Nas CCI, cada ponto representa um grupo de indivíduos do experimento (alocado na curva após a aplicação do modelo) com um mesmo valor característico de habilidade. Observa-se que no Q2 as CCI se deslocaram horizontalmente para uma região mais restrita e se tornaram mais próximas umas das outras em comparação com as CCI obtidas no

Q1. Ainda na Figura **2**, observa-se que no Q2 algumas CCI se deslocaram para a direita com relação às suas posições iniciais no Q1, o que poderia levar a uma interpretação errônea de que esses itens se tornaram mais difíceis aos ID's, mesmo após terem estudado o MD. O que deve ser interpretado é que esses itens não se tornaram mais difíceis ou mais fáceis, e sim que os *scores* de D_d convergiram para uma região intermediária de valores na escala logits em comparação com os valores de D_a dados no Q1, para representar que as questões do Q2 se mostraram mais niveladas aos professores participantes.

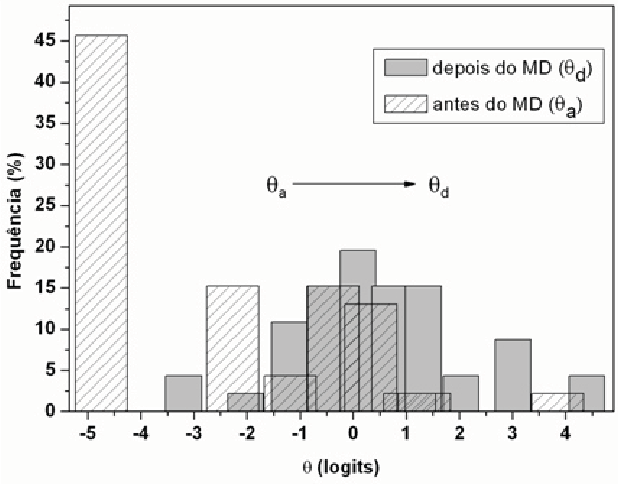
Essa situação foi confirmada pelo índice de separação dos itens, que apontou um valor de 2,44. Nessas condições, um indivíduo que consegue responder positivamente a um dos itens do questionário também tem grande probabilidade de responder satisfatoriamente aos demais itens. Isso pode ser atribuído ao fato de os ID's possivelmente terem se tornado mais habilitados (assumindo maiores valores de θ) para lidar com o tema, uma vez que se prepararam para o Q2 estudando o MD. Essa possibilidade é confirmada com base nos dados quantitativos de habilidade dos ID's obtidos por meio da análise de Rasch, discutidos a seguir.

Na análise do Q1, é possível observar que os ID's responderam positivamente pelo menos um item do questionário. Em contrapartida, não houve ID's que obtiveram êxito em mais de seis dos dez itens propostos, indicando que algumas questões do Q1 se mostraram em um nível de dificuldade maior do que a habilidade dos respondentes naquela ocasião. Já no Q2 houve uma melhora quanto a esse quesito, uma vez que os ID's obtiveram de dois a dez acertos no Q2, o que indica uma evolução no nível de habilidade desses ID's.

Comparando os histogramas de frequência dos valores de θ_a e θ_d (Figura 3), observa-se que a distribuição de habilidades deixou de se comportar como uma distribuição assimétrica à esquerda e passou a se comportar de forma simétrica em relação à média. Em outras palavras, a média amostral de habilidades dos ID's se deslocou para maiores valores na escala logits após a aplicação do MD. Outras estatísticas descritivas de θ_a e θ_d também foram comparadas (Tabela 2) para confirmar que a habilidade (θ) dos ID's evoluiu expressivamente.

Para se ter uma análise mais ampla da situação, estimou-se os resultados de habilidade para a condição dos testes serem aplicados a um maior número de ID's de mesma característica.

Figura 3. Histogramas de frequências (%) dos valores de θ dos ID's obtidos experimentalmente antes e depois da aplicação do MD



Fonte: Próprio autor por meio do Minitab.

Tabela 2. Estatísticas descritivas dos dados amostrais para θ_a e θ_d.

Estatística descritiva	θ_a	θ_d
Média	-2,44	0,47
Desvio padrão da média	0,35	0,24
1º quartil Q_1	-4,74	-0,52
Mediana	-2,27	0,09
3º quartil Q_3	-0,38	1,32
Mínimo	-4,74	-3,19
Máximo	3,85	4,40

Fonte: Próprio autor.

A média populacional de θ_a foi estimada no intervalo de (-3,15; -1,73) enquanto a média populacional de θ_d foi estimada em (-0,13; 0,94). Com o teste de hipóteses, verificou-se um p-valor = 0. Como p-valor < α = 0,05, pode-se afirmar que as médias de habilidades dos ID's são significativamente diferentes e realmente houve uma evolução nesse quesito. Esse resultado confirma a eficácia da intervenção com o uso do manual didático, uma vez que, após aplicado, a habilidade dos professores cresceu na escala logits. Isso significa dizer que, se um maior número de professores com a mesma característica amostral respondesse ao Q1, haveria uma grande possibilidade de esses docentes também apresentarem níveis muito baixos de habilidade com o tema em questão. Com o estudo do manual didático, esses docentes poderiam se tornar mais habilidosos com o tema.

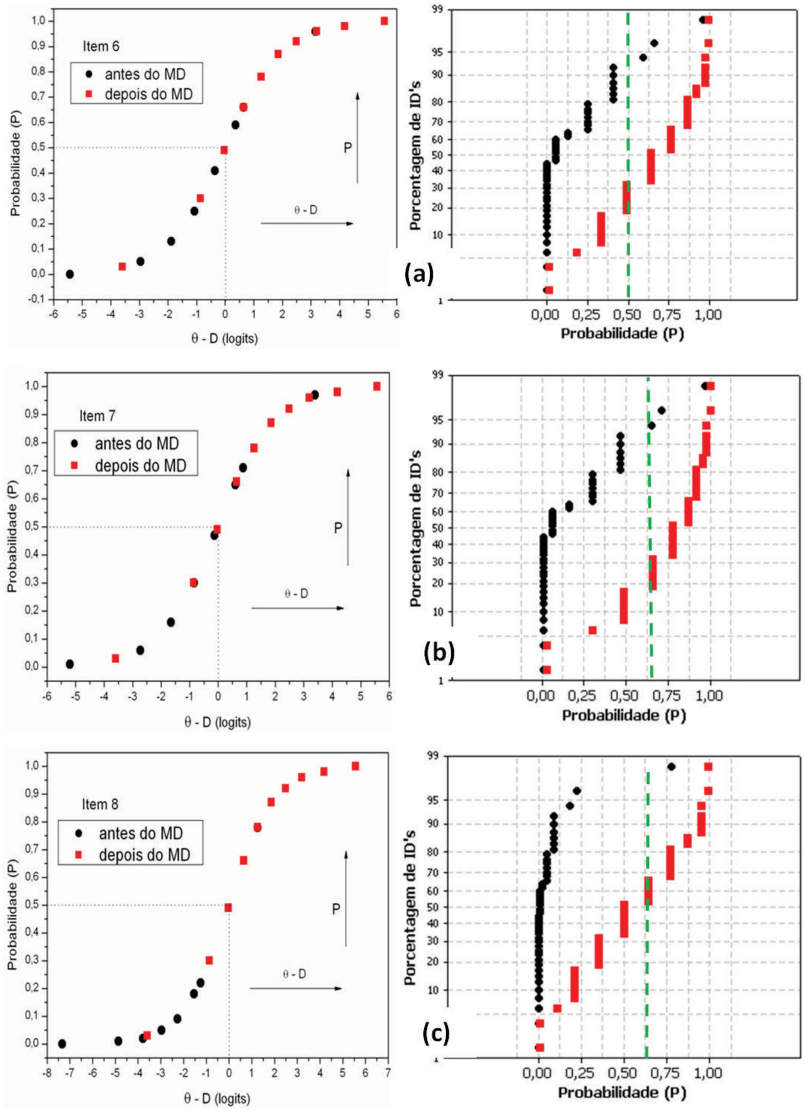
Análise dos gráficos *P versus* ($\theta - D$)

Embora as CCI retornem informações de que as dificuldades dos itens se tornaram mais niveladas e de que houve uma evolução nas habilidades dos ID's após o MD, esses gráficos não informam a quantidade de ID's contidos em cada ponto experimental das curvas. Em outras palavras, não informam explicitamente se a evolução nos valores de θ, do Q1 para o Q2, foi suficiente para que os ID's conseguissem responder a um dado item com dificuldade *D*. Essas informações, que são importantes para avaliar a evolução na proficiência dos ID's, podem ser adquiridas por meio de uma análise do balanceamento entre os níveis de habilidade do ID e de dificuldade do item, obtida nos gráficos experimentais *P versus* ($\theta - D$) aliados a gráficos auxiliares como o de Porcentagem de ID's *versus* probabilidade *P* de responderem corretamente a um item *i* (onde cada ponto experimental representa um único ID com seu respectivo *P*).

Na Figura 4, são dados os resultados obtidos por meio das respostas aos itens 6, 7 e 8. Analisando o balanço $\theta - D$ para o item 6 (Figura 4a), antes e depois do MD, observa-se que há um deslocamento dessa diferença para valores mais positivos de logits, com consequente aumento da probabilidade *P* de os ID's responderem corretamente ao item. Nota-se, no gráfico de Porcentagem dos ID's *versus* P, que no Q1 a maioria dos pontos experimentais se concentrava na região onde $P < 0,5$ (à esquerda da linha verde pontilhada) enquanto no Q2, a posição desses pontos foi deslocada para a região onde $P \geq 0,5$ (à direita da linha verde pontilhada). Antes, aproximadamente 95% dos entrevistados não sabiam definir uma equação literal, visto que para esses ID's o balanço $\theta - D$ foi negativo. Nesse grupo característico, cerca de 60% do total de ID's obtiveram probabilidades muito baixas de respostas positivas ($P < 0,13$) indicando que eles necessitavam de uma intervenção, por meio de uma discussão significativa a respeito do tema, para que conseguissem assimilar e interpretar o conceito. Nessa fase da pesquisa, dos quarenta e seis ID's participantes, apenas três ID's responderam positivamente ao item.

Após a aplicação do MD, foi possível notar uma grande evolução na proficiência desses ID's, quando aproximadamente 70% responderam positivamente ao item. Dos 30% que não deram respostas positivas ao item nessa fase, apenas dois ID's permaneceram com níveis de P → 0.

Figura 4. Gráfico *P* x (*θ-D*) (à esquerda) e Porcentagem de ID's *versus P* (à direita) para os itens 6 (a), 7 (b) e 8 (c).



Fonte: Próprio autor por meio do Minitab.

Essa mudança de desempenho mostrou-se importante porque a assimilação do conceito é o primeiro passo para que o professor adquira confiança para desmistificar o uso, a aplicação e a importância das equações literais na formação de seus estudantes.

Os resultados foram semelhantes para o item 7, quando se pediu dois exemplos de equações literais, como se pode observar na Figura 4b (à direita). Antes do MD, mais de 90% dos ID's não sabiam dar exemplos dessas equações (apenas os ID's 17, 24 e 29 obtiveram êxito). Esse resultado foi revertido assim que os ID's assimilaram o conceito e tiveram o contato com expressões matemáticas que remetiam a essas expressões após terem estudado o MD: nessa segunda fase, cerca de 83% dos ID's conseguiram expor os exemplos pedidos e apenas oito indivíduos (ID's 32, 45, 55, 65, 69, 81, 90 e 105) não estudaram e/ou não assimilaram a discussão do MD e não responderam satisfatoriamente ao item.

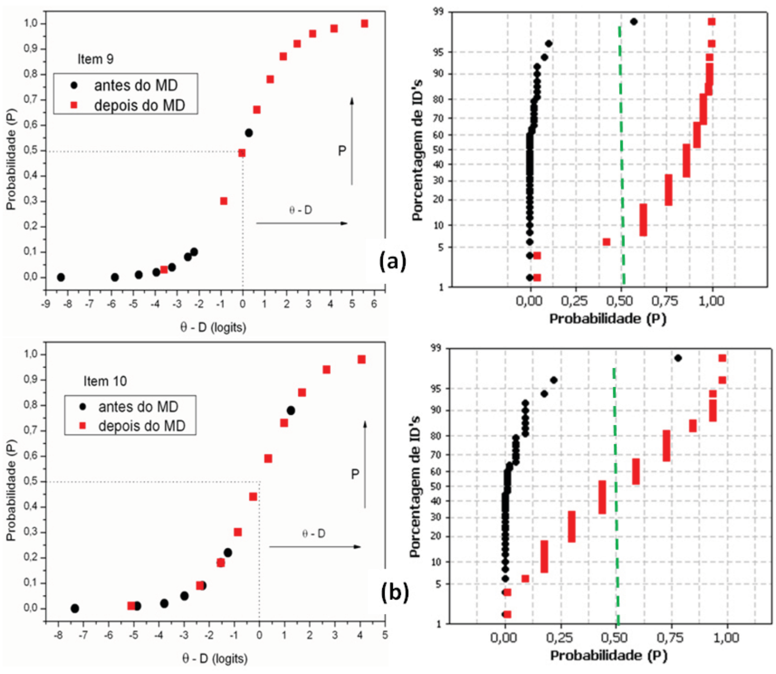
É interessante observar no gráfico mais à direita na Figura 4b que mesmo com um balanço negativo de $\theta - D$, cinco desses ID's se diferem dos outros três restantes por estarem caracterizados com um valor de $P = 0{,}49$, um valor muito próximo do limiar ($P = 0{,}50$) que garante uma resposta positiva ao item. Em outras palavras, as habilidades desses indivíduos aproximaram-se bastante do nível de dificuldade do item, mas não chegaram a ser iguais. Esse comportamento pode ser explicado pelas respostas dadas por esses ID's quando retornaram como exemplos, equações de grau 1 com coeficientes numéricos (remetendo ao caso da solução particular de uma equação literal) ao invés de coeficientes genéricos representados por letras. Nesse sentido, uma pequena intervenção específica pode ser planejada para esses cinco ID's, com o objetivo de fazer com que eles adquiram a porção de habilidade que falta para que atinjam o limiar de probabilidade e consigam responder satisfatoriamente ao quesito.

Já, na Figura 4c, são mostradas as respostas dadas pelos ID's ao item 8, referente à descrição e equacionamento de uma situação problema relativa ao tema. Os resultados iniciais para esse quesito mostraram-se ainda mais insatisfatórios do que os últimos dois resultados, tendo em vista que apenas um entre os quarenta e seis ID's atingiu os objetivos do item. Essa é uma indicação de que descrever e equacionar uma situação prática requer uma habilidade maior dos professores do que aquela necessária para expor a definição ou citar um exemplo. No Q1, dos três ID's que souberam dar os exemplos de equações no item anterior, apenas o ID 17 soube descrever e equacionar um problema com equações literais de grau 1.

Os itens 9 e 10 no Q1 se mostraram ainda mais difíceis para os professores. Com relação ao item 9, solucionar a questão elaborada no item anterior, observa-se no gráfico P x $(\theta - D)$ (Figura 5a) que antes do MD, as diferenças $\theta - D$ se concentraram em uma faixa muito negativa de logits, indicando que os ID's tinham uma habilidade muito menor do que a dificuldade desse item.

Em outras palavras, com exceção do ID 17, todos os entrevistados foram classificados com uma probabilidade quase nula $P \rightarrow 0$ de responderem positivamente ao item (Figura 5a, à direita). Vinte e seis dos quarenta e seis ID's da pesquisa, como é o caso do ID 69, tiveram um balanço $\theta - D$ estimado em aproximadamente -8,5 logits. Esse resultado extremamente negativo está relacionado ao fato de a grande maioria dos entrevistados não terem conseguido descrever e expressar a situação problema no item anterior, aliado ao fato de alguns ID's saberem esboçar a questão, mas não terem habilidade para solucioná-la corretamente.

Figura 5. Gráfico P x (θ-D) (à esquerda) e porcentagem de ID's *versus* P (à direita) para os itens 9 e 10.



Fonte: Próprio autor por meio do Minitab.

Com a aplicação do MD, obteve-se um excelente resultado ao se verificar que praticamente todos os ID's conseguiram alcançar os objetivos propostos no item 9 (pontos experimentais em vermelho, à direita da linha verde pontilhada). Já para o item 10 (Figura 5b), cuja questão era sobre a importância do tema para o ensino, é possível avaliar que apesar de os ID's conhecerem o conceito e saberem dar exemplos, propor situações-problemas e solucioná-las após o MD, ainda continuaram com a dificuldade específica de se expressar (externar o que entendem em uma linguagem escrita) quanto à importância do tema para a formação do estudante em nível médio. Observa-se que cerca de 60% dos ID's não obtiveram êxito nesse quesito mesmo após a aplicação do MD.

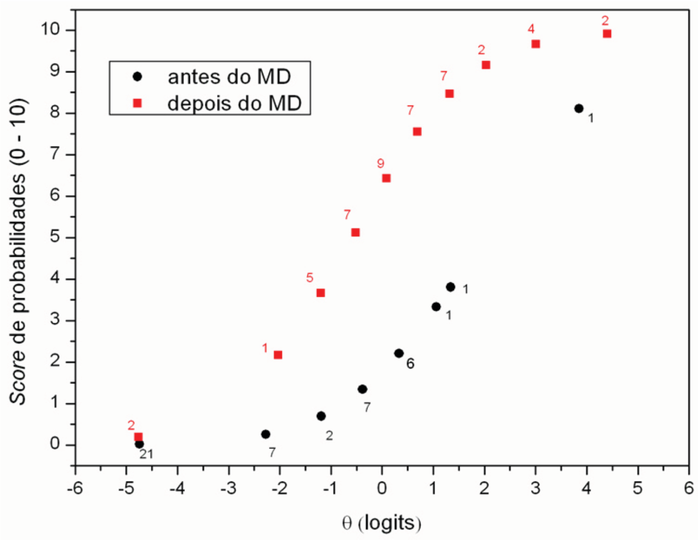
Avaliação do Manual Didático e proficiência dos entrevistados

Algumas conclusões importantes podem ser agregadas aos resultados anteriores, por meio da análise das respostas às questões adicionais de 11 a 16, acerca da avaliação do Manual Didático) no Q2. Observou-se que, após a intervenção com o MD, o item 5, que trata do livro didático, retornou um valor de dificuldade de 2,35 na escala logits, o maior entre todos os itens no Q2 (Tabela 1). Esse resultado deve-se ao fato de os entrevistados terem respondido aos itens relativos aos conhecimentos sobre equações literais nessa segunda aplicação do questionário, sem mesmo ter um livro didático de referência que tratasse explicitamente do tema, segundo os próprios professores. Essa situação foi confirmada por 96% dos entrevistados, quando afirmaram desconhecer outro material didático que abordasse equações literais (item 11 do Q2). Esse resultado confirmou a hipótese inicial de que os professores necessitavam de um material didático adicional que tratasse de equações literais de forma consistente quanto ao propósito de qualificá-los para a prática docente nesse quesito, ajudando-os a entender os conceitos e as formalidades, a importância, o uso correto e significativo, exemplos e aplicações do tema. Essas ações foram confirmadas pelos mesmos 96% dos ID's quando responderam que o MD os ajudaram a desmistificar o conceito e a importância das equações literais para a melhoria do ensino e aprendizagem (item 12, Q2).

A linguagem utilizada no material também foi planejada inicialmente para que o professor tivesse a possibilidade de interpretar com facilidade a proposta e poder adaptá-la quando julgar conveniente às situações didáticas. Quanto a esses quesitos, 100% dos entrevistados afirmaram que o MD possuía essas qualidades (itens 13 e 14 do Q2). Além disso, 98% dos ID's responderam que usariam o MD como material complementar em suas aulas de matemática (item 15, Q2). Já no item 16 do Q2, que solicitava uma nota para o MD produzido. Neste quesito, o MD foi bem avaliado pelos professores, que atribuíram uma nota média amostral de 9,01±1,01. Esses resultados indicam que o MD foi adequado para suprir as dificuldades e as necessidades dos professores entrevistados com as equações literais, como planejado e desejado na fase de produção técnica desse material. Nesse sentido, os autores esperam que esse tipo de intervenção, eficiente e de baixo custo, possa ser levado em consideração para um maior número de professores, com vista à melhoria do ensino e da aprendizagem.

Na continuidade da pesquisa, a Figura 6 mostra o *score* total de probabilidade dos ID's, que retorna a soma das probabilidades de respostas positivas de um ID aos itens do questionário (AZIS, 2013), relacionado aos itens com possibilidade de respostas variantes (itens de 6 a 10 no Q1 e Q2) que discutiam o conhecimento, uso e aplicação do tema. Essa pontuação é dada como função de θ e, nesse estudo, pode ser interpretada como a nota obtida pelos indivíduos da amostra em resposta aos últimos cinco itens do questionário aplicado numa escala normalizada de valores de 0,0 (zero) a 10,0 (dez). Os valores próximos aos pontos experimentais indicam o número de indivíduos que obtiveram uma dada nota.

Figura 6. *Score* total de probabilidades normalizado dos ID's com relação às respostas dadas aos itens de 6 a 10, antes e depois da aplicação do Manual Didático (Q1 e Q2, respectivamente). Os *scores* foram normalizados em uma escala de 0,0 a 10,0.



Fonte: Próprio autor por meio do Minitab.

A nota média obtida pelo grupo de professores avaliados foi centrada em $0,90 \pm 1,47$ antes do MD e em $6,60 \pm 2,42$ após a intervenção, confirmando que houve uma expressiva evolução na proficiência dos professores para lidar com equações literais, superando barreiras que impediam tal desenvolvimento como, por exemplo, as lacunas na formação inicial e a indisponibilidade de material didático. Com isso, os autores projetam que resultados ainda mais expressivos podem ser alcançados se o professor, a partir de então, adquirir um maior nível de familiarização com o tema, buscando outras fontes, propondo edições, inclusões, adaptações e melhoramentos ao MD e colocar essas atividades em prática com seus estudantes.

Considerações finais

Tendo em vista a análise particular de uma amostra aleatória simples da população formada por profissionais de uma cidade do nordeste brasileiro, pode-se concluir que: o modelo de Rasch se mostrou adequado para a análise das respostas dadas ao Q1 e ao Q2 pelos professores, antes e após a intervenção com o MD, por meio da estimação da dificuldade dos itens e da habilidade dos ID's.

Além disso, os resultados do Q1 indicaram que o insucesso dos professores nos itens relacionados ao conhecimento, aplicação e importância das equações literais não está relacionado ao fato de a formação acadêmica deles ser em outra área do conhecimento, mas em razão de a maioria desses ID's terem respondido negativamente aos itens que discutiam situações da formação inicial e do conhecimento de materiais didáticos que tratassem do tema, aliado ao fato dos entrevistados sequer conhecerem o conceito de equações literais.

Esses resultados iniciais são bastante preocupantes, uma vez que o conteúdo em questão se mostra como um assunto de nível relativamente fácil para um profissional matemático em detrimento de outros conteúdos de maior complexidade. Essa é uma forte indicação de que a falta de conhecimento para lidar com esse conteúdo de enorme importância para o desenvolvimento crítico/dedutivo do estudante em nível médio pode estar relacionada com falhas na formação inicial do professor de matemática, quando possivelmente não houve a capacitação para o tema ou esta foi insuficiente.

Por outro lado, verificou-se que ações simples de capacitação, como foi o caso da aplicação do Manual Didático elaborado, podem ajudar a reverter esse quadro. Com a intervenção, foi notada uma grande evolução da proficiência dos entrevistados em todos os tópicos de análise de equações literais, uma vez que os itens no Q2 se mostraram com níveis de dificuldade mais nivelados em detrimento da hierarquia dos itens anotada no primeiro momento com o Q1, como consequência do aumento significativo dos níveis de habilidades dos ID's (comprovado estatisticamente). Esses resultados mostram a importância de se buscar políticas de capacitação e formação continuada com vista ao desenvolvimento profissional do professor e à melhoria do ensino e aprendizagem de matemática.

Recebido em: 19/01/2019
Aprovado em: 04/08/2019

Referências

AZIZ, A. A., Insights into Engineering Education Learning Outcome's Assessment with Rasch Model. **Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology**, v. 6, n.19, 2013.

CALLINGHAM, R.; BOND, T. Research in mathematics education and Rasch measurement. **Mathematic Education Research Journal**, v. 18, n. 2, 2006.

FARIA, F. L.; FREITAS-REIS, I. A percepção de professores e estudantes do ensino médio sobre a atividade estudo de caso. **Ciência e Educação**, v. 22, n. 2, 2016.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. (Coleção Formação de Professores). 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2009.

FREITAG, B.; MOTA, V. R.; COSTA, W. F. **O livro didático em questão**. 3. ed. São Paulo, Cortez, 1997.

HAINES, C.; CROUCH, R. Recognizing constructs within mathematical modelling. **Teaching Mathematics and its Applications**, v. 20, n. 3, 2001.

LEÃO, A. S. G.; BISOGNIN, V. Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia de resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista**, v. 1, n. 10, 2009.

MELO, E. V.; FIREMAN, E. C. Ensino e aprendizagem de funções trigonométricas por meio do software Geogebra aliado à modelagem matemática. **REnCiMa**, v. 7, n. 5, 2016.

MELO, G. N. Formação inicial de professores para a educação básica: uma revisão radical. São Paulo, **Perspectivas**, v. 14, n. 1, 2000.

MILANI, W. N. **A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio**. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2011.

MINITAB®. ***Minitab 18 Statistical Software***. Disponível em: https://www.minitab.com/pt-br/downloads/. Acesso em: 13 abril 2019.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor L. Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PEREZ, G. Prática reflexiva do professor de matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (org). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo, Cortez, 2004.

RASCH, G. **Probabilistic models for some intelligence and attainment tests**. Chicago, University of Chicago Press, 1980.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, 2012.

RYAN, J.; WILLIAMS, J. Mathsmaps for diagnostic assessment with pre-service teachers: stories of mathematical knowledge. **Mathematics Education Research**, v. 9, n. 1, 2007.

SANTOS, R.; LORETO, A. B.; GONÇALVES, J. L. Avaliação de softwares matemáticos quanto a sua funcionalidade e tipo de licença para uso em sala de aula. **RenCiMa**, v. 1, n. 1, 2010.

SANTOS, S. R. M.; COSTA, P. M. D. Sobre a didática e as didáticas específicas: o que está em questão na formação docente? **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 3, n. 2, 2013.

SHERWOOD, W. **Real-Life Math: algebra**. Portland-EUA: Walch Publishing, 1988.

SILVA, A. V.; COSTA, L. F. M. A resolução de problemas como metodologia de ensino da Matemática: o caso dos estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual "São José Operário". **REVEMAT**, v. 8, n. 2, 2013.

SOUZA, I. S.; FERREIRA, R. S. Algumas reflexões sobre a formação inicial do professor de matemática: vivências do estágio supervisionado. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 5, n. 2, 2018.

VAN STIPHOUT, I.; DRIJVERS, P.; GRAVEMEIJER, K. The Development of Students' Algebraic Proficiency. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 8, n. 2-3, 2014.

WARWICK, J. Assessing the efficacy of a Student Expectations questionnaire. **Teaching Mathematics and Its Applications**, v. 31, n.2, 2012.

APÊNDICE A – MANUAL DIDÁTICO DE EQUAÇÕES LITERAIS E SUAS APLICAÇÕES

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Entender o conceito e a importância das equações literais para a formação do estudante em nível médio;
- Situar-se no processo de ensino e aprendizagem das equações literais;
- Reconhecer e solucionar problemas aplicados modelados por equações literais;
- Conhecer práticas pedagógicas alternativas com possibilidade de inserção no ambiente escolar.

Apresentação

Este Manual Didático é destinado aos profissionais que ministram aulas de matemática no ensino básico e tem como objetivo desmistificar o conceito e o uso de equações literais em sala de aula. Serão abordados o significado, as características e a importância de ensinar esse tipo de equação aos estudantes. Em adição é apresentado um tutorial para auxiliar o professor na solução de problemas, usando os passos algébricos corretos. Ao final, serão apresentados diversos usos e aplicações através de exemplos e exercícios propostos.

Note que em cada exemplo e exercício proposto, é explicitado o uso/aplicação da equação literal em questão. Essa forma de apresentação das questões visa a auxiliar o professor na busca por mais informações que estão implícitas na situação problema e que podem enriquecer a didática do conteúdo em questão. Além disso, esse método ajuda o estudante a perceber as aplicabilidades e a importância desse estudo para a sua formação.

Boa aula!

Os autores

1. O que são Equações Literais?

As equações literais de uma variável real são equações (expressões ou fórmulas) que possuem, além da variável (ou incógnita) em questão, coeficientes (ou parâmetros) representados de forma genérica por letras e, por isso, recebem o nome de literais.

Esse processo de resolução de uma dada fórmula para uma dada letra que representa a variável, considerando as outras letras como representantes de constantes (valores conhecidos) é chamado de resolução de equações literais.

Em uma linguagem mais simbólica, elas podem ser entendidas também como "receitas" matemáticas para se encontrar o valor numérico de uma variável em função de quantidade(s) dada(s). A letra que representa a variável em questão quase sempre significa algum tipo de quantidade do mundo real tais como volume, temperatura, pressão, quantidade de juros, um investimento ganho etc. Essa variável possui uma relação estabelecida com outras quantidades que também são atribuídas letras (ou nomes) na "receita".

O fato é que se soubermos os valores de todas as quantidades envolvidas, exceto a de uma delas, podemos lançar esses valores na equação (que também pode ser entendida como a lei de formação do problema) e encontrar o valor da quantidade indeterminada em função das quantidades dadas.

Dessa forma, as equações literais podem ser entendidas como fórmulas-padrão que explicam algo e caracterizam algum fenômeno. Por exemplo, em geometria, se quisermos calcular o perímetro (P) de um quadrado em função dos seus lados (l) usamos a expressão literal $P = 4l$. O importante de se mencionar aqui é que muitas vezes, na prática, estamos preocupados em saber a dimensão do lado l, dado um valor de P.

Por exemplo, quando se quer construir um terreno em forma de um quadrado com maior lado possível respeitando os recursos financeiros disponíveis (geralmente os recursos financeiros são escassos) para cercar/murar todo o terreno é óbvio que se deve verificar o preço do material por unidade de perímetro e determinar qual o maior perímetro que se pode obter com a quantia em dinheiro que se tem em mãos. Com o valor de P definido pode-se calcular o valor de l que resolve o problema. Só que, para isso, teríamos antes de explicitar l em função de P, pela expressão $l = P/4$.

Daí a flexibilidade e a eficácia de se trabalhar com equações literais, visto que sempre podemos escolher uma das letras que representam as grandezas envolvidas como variável e as outras restantes como constantes a determinar (valores que serão dados para encontrarmos o valor numérico da variável em questão).

Essas equações têm sua grande importância quando usadas para generalizar e modelar matematicamente diversos fenômenos e situações em todas as áreas do conhecimento. Uma vez modelado, as informações sobre um dado fenômeno podem ser obtidas por meio da solução da equação que o representa. Além disso, os estudantes podem checar diversas informações que estão implícitas na situação pela análise das relações entre as quantidades envolvidas e entender completamente o problema de forma lógica e crítica, o que seria difícil de se obter apenas com quantidades dadas numericamente.

Por exemplo, a equação $s = s_0 + vt$ modela a situação que descreve a posição final de um móvel em função do tempo em movimento uniforme (MU). Nesse caso, a letra "s" representa a posição final do móvel, a letra "s_0" representa sua posição inicial, "v" a velocidade (constante) e "t" o tempo. Observe que, nesse caso, a posição inicial e a velocidade constante do móvel devem ser quantidades conhecidas no problema. Com algumas manipulações algébricas podemos explicitar o valor de "t" em função das outras grandezas e, assim, teremos $t = \frac{s - s_0}{v}$. Com a equação nesse novo formato, além de calcularmos o tempo necessário para se percorrer determinado deslocamento ou trajetória, podemos afirmar que nessa lei, a variável "t" é diretamente proporcional à variação de espaço $(s - s_0)$ percorrido, isto é, quanto maior o deslocamento, maior o tempo gasto para percorrê-lo. Além disso, podemos observar que o tempo é inversamente proporcional a v, isto é, quanto maior a velocidade menor o tempo gasto no deslocamento $(s - s_0)$ do móvel.

Tanto no caso do lado do quadrado quanto no caso do tempo neste último exemplo, temos exemplos de equações literais de grau 1. Nos exemplos, podemos perceber as informações que estão implícitas nos problemas e que podem ser colocadas à tona pelo professor em sala de aula no momento da explicação.

Note também que essas conclusões e interpretações só foram possíveis a partir do momento em que se conseguiu explicitar uma variável em função das outras. O seu estudante também só chegará a essas conclusões por si só, a partir do momento em que aprender os procedimentos necessários para isolar a variável em questão. Por isso, não menos importante do que conceituar uma equação literal é saber os passos para isolar a variável em questão e solucionar o problema.

Como material de partida, a seguir são apresentadas operações algébricas que podem ajudar no desenvolvimento da solução de uma equação literal de Grau 1. Essas operações geralmente se resumem em cinco passos e podem ser estendidos para a solução de outros tipos de equações literais.

2. Solucionando uma Equação Literal

Com o objetivo de facilitar a resolução de uma equação literal, apresentamos a seguir uma proposta de "passo a passo". Os passos não precisam seguir necessariamente a ordem apresentada. É importante destacar que o professor tem total autonomia para escolher os passos que julgar convenientes, a fim de alcançar em cada caso, a solução de forma com que os estudantes a compreendam.

Nesse sentido, podem aparecer no decorrer da solução, situações que necessitem, por exemplo, de um balanceamento da equação, do uso da propriedade distributiva, das operações com frações, entre outras operações algébricas. Segue a proposta de "passo a passo" para resolução de equações literais:

Passo 1. Leia o problema atentamente. Releia o problema para identificar o que ele pede para ser solucionado.

Passo 2. Escolha uma letra para representar a variável desconhecida no problema (em geral, usa-se a letra "x" para representá-la).

Passo 3. Traduza o texto do problema para a linguagem algébrica em forma de equação matemática equivalente. Em qualquer interpretação do problema que remeta/envolva a variável em questão, devemos ter o cuidado de sempre usar a mesma letra para representar a mesma variável.

Passo 4. Resolva a questão utilizando as regras adequadas e encontre a solução pedida:

4.1 Observe se na equação existem expressões que estão entre parênteses. Caso existam, desmembre-as utilizando a propriedade distributiva da multiplicação;

4.2 Verifique se a equação envolve frações. Nesse caso, a orientação é determinar o m.m.c. entre todos os denominadores de todos os termos (em ambos os membros da equação) e usar operações com frações para reescrever a equação sem denominadores. Nesse passo, a orientação 4.1 pode ser requisitada novamente;

4.3 Passe todos os termos que envolvam a incógnita em questão para um dos lados (membros) da igualdade e os que não a contêm, para o outro lado. Para isso, aplique a regra da adição: os termos que mudam de membro mudam também de operação (mudam o sinal) no novo membro para que a equação permaneça inalterada;

4.4 Efetue cálculos com o objetivo de simplificar as expressões resultantes em ambos os membros da equação;

4.5 Determine o valor da incógnita aplicando a propriedade da divisão no conjunto dos números reais: passe o valor que multiplica a incógnita em um dos membros da equação como divisor do outro membro da equação;

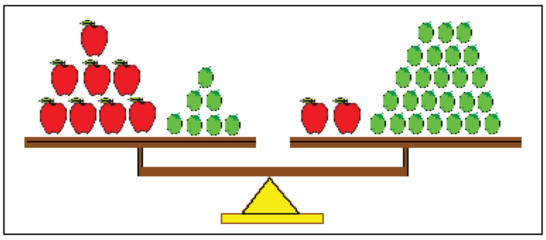
4.6 Simplifique a expressão encontrada e cheque as relações entre as quantidades envolvidas;

Passo 5. Revise a solução encontrada, confirme sua resposta e interprete os resultados.

3. Exemplos e Aplicações

Nos exemplos a seguir, note que os passos sugeridos na seção anterior são explicitados durante a resolução de cada questão para facilitar o entendimento do leitor.

Exemplo 1. Em uma balança, de um lado foram colocados 7 limões e 8 maçãs e, do outro, 25 limões e 2 maçãs, de modo que os pratos da balança ficaram em equilíbrio, conforme ilustrado na figura a seguir. Pergunta-se: o peso de uma maçã equivale ao peso de quantos limões?



Resolução:

Passo 1: O problema pede para que seja estabelecida a equivalência de pesos entre maças e limões.

Passo 2: As maçãs serão representadas pela letra "m" e os limões pela letra "l".

Passo 3: Como os pratos estão em equilíbrio, temos a seguinte equação:

$$8m + 7l = 2m + 25l$$

Passo 4.3: Como se trata de uma balança, ao retirarmos a mesma quantidade de frutas de ambos os lados, o conjunto permanece em equilíbrio, assim, retirando 7 limões de ambos os lados, obtemos:

$$8m + 7l - 7l = 2m + 25l - 7l$$

$$8m = 2m + 18l$$

Passo 4.3: Agora, retiramos duas maçãs de ambos os lados.

$$8m - 2m = 2m - 2m + 18l$$

$$6m = 18l$$

Passo 4.5: Divide-se ambos os membros por 6 (a proporção permanece).

$$\frac{6m}{6} = \frac{18l}{6}$$

$$\Rightarrow 1m = 3l$$

Passo 5: Assim concluímos que o peso de uma maçã equivale ao peso de três limões.

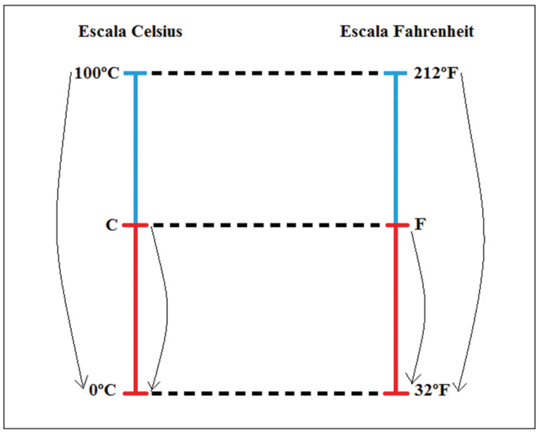
Exemplo 2. A escala Celsius possui o ponto zero na temperatura que a água congela (ponto de fusão, 0°C) e 100°C na temperatura que a água ferve (ponto de ebulição). Por sua vez, na escala Fahrenheit, o ponto de fusão equivale a 32°F, e o ponto de ebulição da água, a 212°F. Qual a expressão que fornece a conversão de uma temperatura da escala Fahrenheit para Celsius?

Resolução:

Passo 1: O problema pede para que seja estabelecida uma relação de equivalência entre as escalas Celsius e Fahrenheit.

Passo 2: A temperatura na escala Celsius será representada pela letra "*C*" e na escala Fahrenheit pela letra "*F*".

Passo 3: Observando o esquema a seguir, iremos aplicar o teorema de Tales para obtermos as proporções equivalentes e armarmos a equação.



$$\frac{C-0}{100-0}=\frac{F-32}{212-32}$$
$$\Rightarrow \frac{C}{100}=\frac{F-32}{180}$$

Passo 4.4: Simplificando (dividindo por vinte) os denominadores de ambos os membros temos:

$$\frac{C}{5}=\frac{F-32}{9}$$

Aplicando o produto dos meios pelos extremos temos:

$$9C=5(F-32)$$

Passo 4.5: Dividindo-se ambos os membros por 9

$$\frac{9C}{9}=\frac{5}{9}(F-32)$$

Passo 5: A expressão pedida é a seguinte:

$$C=\frac{5}{9}(F-32)$$

Exemplo 3. Numa reunião, a razão entre o número de homens e mulheres é 3 : 7. Sabendo-se que no recinto encontram-se "*k*" pessoas, qual o percentual de homens presentes nessa reunião?

Resolução:

Passo 1: O problema pede para que seja calculado o percentual de homens em relação ao total de pessoas presentes.

Passo 2: Iremos representar o total de homens por "*h*"e o total de mulheres por "*m*".

Passo 3: Como a razão entre homens e mulheres é 3 : 7, podemos escrever:

$\frac{h}{m} = \frac{3}{7}$ (1).

No recinto encontram-se "*k*" pessoas, logo podemos escrever:

$m + h = k$ (2).

Passo 4: Na eq.(1) $\frac{h}{m} = \frac{3}{7}$ aplicando o produto dos meios pelos extremos e, em seguida, isolando a variável *m* em função de *h*, obteremos:

$$\frac{h}{m} = \frac{3}{7}$$
$$3m = 7h$$
$$m = \frac{7h}{3}$$

Passo 4: Substituindo o valor de *m* encontrado nessa última igualdade na eq.(2), temos:

$$\frac{7h}{3} + h = k$$

Passo 4.4: Para simplificarmos a equação vista anteriormente, multiplicamos ambos os membros por 3. Assim, obtemos a seguinte expressão:

$$7h + 3h = 3k$$

Passo 4.4: Somamos os termos semelhantes do primeiro membro, obtendo:

$$10h = 3k$$

Passo 4.5: Divide-se ambos os membros por 10, para obtermos *h* em função de *k*:

$$h = \frac{3k}{10}$$

Para reescrevermos o valor obtido de h em forma de porcentagem, multiplicamos essa última igualdade por 100, para concluir que:

$$h = \left(\frac{300}{10}\right)k \quad (em\ \%)$$

$$\text{Ou seja,}\ \ h = 30\%\ \text{de}\ k$$

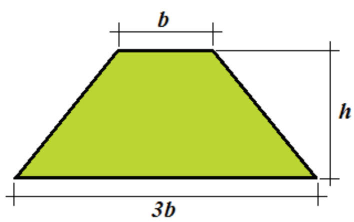
Passo 5: Portanto, dentre os presentes na reunião 30% são homens.

Exemplo 4. Em uma superfície em forma de trapézio, a base maior é o triplo da menor. Sabendo que sua área mede 100 m^2, calcule a medida de sua altura.

Resolução:

Passo 1: Vamos calcular a altura do trapézio.

Passo 2: A base menor será representada pela letra b, a base maior por $3b$, já que essa medida equivale a três vezes a medida da base menor. Por sua vez, a altura será representada pela letra h, conforme esquematizado na figura seguinte:



Passo 3: A área do trapézio é dada por: $A = \dfrac{(B+b)h}{2}$

Na qual, substituindo os valores correspondentes temos a seguinte equação:

$$100 = \frac{(3b+b)h}{2}$$

Passo 4: Simplificando a expressão acima, temos:

$$100 = 2bh$$

Assim concluímos que: $h = \dfrac{50}{b}$

Exemplo 5. Utilizando o regime de juros simples, por quanto tempo se deve aplicar um capital para que ele dobre o seu valor?

Resolução:

Passo 1: Vamos determinar o tempo de aplicação do capital

Passo 2: Representaremos os juros pela letra "*J*" o capital por "*C*", a taxa por "*i*" o tempo por "*t*" e o montante por "*M*".

Passo 3: Os juros de uma aplicação no regime simples são calculados pela seguinte fórmula: $J = C.i.t$

Passo 4: Para que o capital dobre o seu valor, é necessário que o montante seja igual a $2C$. Como $M = C + J$, necessariamente devemos ter $J = C$. Substituindo essa última igualdade na fórmula de juros, temos: $C = C.i.t$

Dividindo-se ambos os membros por C:

$$\frac{C}{C} = \frac{C.i.t}{C} \Rightarrow$$
$$1 = i.t \Rightarrow$$
$$i.t = 1$$

Dividindo-se ambos os membros por i:

$$\frac{i.t}{i} = \frac{1}{i} \Rightarrow t = \frac{1}{i}$$

Passo 5: Portanto, o capital dobra o seu valor quando o tempo equivale ao inverso de sua taxa.

Exemplo 6. Em um estacionamento tem-se um total de *N* veículos, entre motos e carros. Sabendo-se que há *P* rodas, qual a expressão que fornece o número de motos e carros em função de *N* e *P*?

Resolução:

Passo 1: Vamos determinar o número de motos e carros em função do nº de veículos (*N*) e do nº de rodas (*P*).

Passo 2: Os carros serão representados pela letra *C* e as motos pela letra *M*. E o total de veículos será representado pela equação abaixo:

$$C + M = N \ (1)$$

Passo 3: Como cada carro possui quatro rodas e cada moto duas, o total de rodas será representado por:

$$4C + 2M = P \ (2)$$

Passo 4: Da equação 1 subtraímos *M* em ambos os membros da equação, a fim de isolarmos o valor de *C*.

$$C + M - M = N - M \Rightarrow C = (N - M)\ (3)$$

Passo 4.4: Substituímos na equação (2) o valor de *C* encontrado na equação (3):

$$4C + 2M = P \Rightarrow 4(N - M) + 2M = P$$

Passo 4.1: Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$4N - 4M + 2M = P \Rightarrow 4N - 2M = P\ (4)$$

Passo 4: Subtraindo *P*e adicionando 2*M* em ambos os membros da equação (4) temos:

$$4N - 2M - P + 2M = P - P + 2M \Rightarrow 4N - P = 2M\ (5)$$

Passo 4.5: Dividindo-se ambos os membros dessa equação por 2, temos:

$$\frac{4N-P}{2}=\frac{2M}{2}\Rightarrow\frac{4N-P}{2}=M\Rightarrow M=\frac{4N-P}{2}$$

Passo 4.4: Substituindo essa última igualdade na equação 3 temos:

$$C=(N-M)\Rightarrow C=N-\left(\frac{4N-P}{2}\right)(6)$$

Passo 4.2: Calculando o m.m.c. dos denominadores dos termos do 2º membro da eq. (6) temos:

$$C=\frac{2N}{2}-\left(\frac{4N-P}{2}\right)\Rightarrow C=\frac{2N-4N+P}{2}\Rightarrow C=\frac{P-2N}{2}$$

Passo 5: Assim concluímos que o nº de carros é dado por $C=\frac{P-2N}{2}$ e o nº de motos é dado por $M=\frac{4N-P}{2}$.

Exemplo 7. Em uma viagem de uma cidade para outra, um carro partiu do quilômetro 15 e encerrou a viagem no quilômetro 235 com uma velocidade "*v*" levando "*t*" horas para concluí-la. Se o condutor do veículo dobrasse a velocidade do automóvel em quanto tempo realizaria o mesmo percurso?

Resolução:

Passo 1: Determinar o tempo de viagem com o dobro da velocidade.

Passo 2: A velocidade será representada por v e o tempo por t.

Passo 3: Vimos no início desse material, que a posição final de um móvel em Movimento Uniforme (M.U.) é dada pela expressão:

$$s=s_0+vt\,,$$

Onde S_0 é a posição inicial do veículo.

Passo 4: Iremos substituir os valores da posição inicial e da final, informados na questão.

$$s = s_0 + vt$$
$$235 = 15 + vt$$

Passo 4.3: Subtraímos 15 em ambos os membros:

$$235 - 15 = 15 - 15 + vt$$
$$220 = vt\ ,$$

ou, equivalentemente

$$vt = 220$$

Passo 4.5: Dividindo-se ambos os membros por v

$$\frac{vt}{v} = \frac{220}{v}$$

$$t = \frac{220}{v}$$

Passo 5: Portanto o tempo gasto na viagem é $t = \dfrac{220}{v}$, quando o carro "anda" a uma velocidade v.

Mas a resolução do problema não termina agora. A pergunta é, se dobrarmos a velocidade para $2v$, o que aconteceria com o tempo?

Passo 4: Vamos fazer a substituição na expressão que calcula t.

$$t = \frac{220}{2v}$$

$$t = \frac{110}{v}$$

Passo 5: Logo, como é de se esperar, quando dobramos a velocidade, o tempo cai pela metade.

Exemplo 8. Uma caixa d'água retangular tem sua base quadrada com lados de medida "*a*". Sabendo que seu volume é igual a 45 m^3, calcule a medida de sua altura.

Resolução:

Passo 1: Determinar a altura da caixa d'água.

Passo 2: A altura da caixa será representada por h e o volume por v.

Passo 3: O volume v é o produto da área da base A_b pela altura:

$$v = A_b.h$$

Como os lados da base são iguais, teremos:

$$v = a^2.h$$

Equivalentemente

$$a^2.h = v$$

Passo 4: Substituindo o valor de v teremos: $a^2 . h = 45$

Passo 4.5: Dividindo-se ambos os membros por a^2

$$\frac{a^2.h}{a^2} = \frac{45}{a^2}$$

$$h = \frac{45}{a^2}$$

Passo 5: Portanto, a altura da caixa é igual ao volume dividido pela área da base.

4. Exercícios

Nas questões de 1 a 20, encontre a solução para as equações literais, na variável indicada:

1. $P = 2L + 2C$, *em C* (Perímetro P de um terreno retangular de largura L e comprimento C).

2. $V = Bh$, *em B* (Volume V de um prisma de altura *h* e área da base *B).*

3. $V = RI$, *em R* (Tensão V em um circuito elétrico) onde *I* é a corrente e *R* a resistência.

4. $V = 4abc$, *em c* (Volume V de uma caixa de base retangular, cujas dimensões são *a*, *b* e *c).*

5. $V = \pi \, . \, r^2h$, *em h* (Volume V de um cilindro de raio *i* e altura *h).*

6. $A + B + C = 180^o$, *em B* (Soma dos ângulos internos de um triângulo, sendo *A*, *B* e C as medidas dos seus ângulos internos).

7. $P = I^2R$, *em R* (Potência P em um circuito elétrico, onde *I* é a corrente e *R* a resistência).

8. $ax + b = 0$, *em x* (Equação linear com uma incógnita), sendo *a* o coeficiente de *x* e *b* o termo independente.

9. $y = mx + b$, *em m* (Equação reduzida da reta e coeficiente angular), onde *y* é a ordenada, *x* a abscissa e *b* o coeficiente linear.

10. $S = \frac{1}{2}at^2$, *em a.* (S representa a distância percorrida, sendo *a* o valor da aceleração do móvel e *t* o tempo).

11. $K = \frac{1}{2}mv^2$, *em m* (Energia cinética K, sendo *m* a massa do corpo e *v* a sua velocidade).

12. $V = \frac{KT}{P}$, *em T.* (Volume V de um gás, onde *K* é uma constante, *P* a pressão e T a temperatura).

13. $V = \frac{1}{3}\pi.r^2h$, *em r* (Volume V de um cone, sendo r o raio da base, h a altura do cone e π uma constante).

14. $x = \frac{a+b}{2}$, *em a* (Média aritmética de dois números) onde *x* é o valor da média, *a* e *b* são números reais.

15. $F = \frac{9}{5}C + 32$, *em C* (Relação entre temperatura em grau Celsius (C) e Fahrenheit (F)).

16. $M = C + Cit$, *em i* (Montante M, onde *C* é o capital, *i* a taxa e *t* o tempo).

17. $J = Cit$, *em i* (Juros Simples J, sendo *C* o capital, *i* a taxa e *t* o tempo).

18. $S = 2\pi.r^2 + 2\pi.rh$, *em h* (Área superficial S de um cilindro, onde *r* é o raio da base e *h* é a altura).

19. $A = \frac{(B+b)h}{2}$, *em B* (Área de uma região plana trapezoidal, onde *B* é a base maior, *b* a base menor e *h* é a altura).

20. $A = \pi.r^2$, *em r* (Área de uma superfície circular, onde *r* é o raio e π uma constante).

Nos exercícios de 21 a 27 utilize as soluções genéricas das equações literais dos exercícios de 1 a 20 para encontrar a solução particular do problema em questão.

21. Altura de uma caixa retangular. Uma caixa retangular tem a base com largura medindo 5 cm e comprimento de 8cm. Se o volume do sólido é 120 cm^3, determine a altura da caixa. (Ver exercício 4).

22. Altura de uma lata de óleo. Uma empresa fabrica latas de óleo na forma geométrica de um cilindro. A exigência é que o raio da base seja igual a 5 cm e que a lata comporte um volume igual a 625π cm^3. Qual deve ser a altura das latas de óleo com essas condições? (Ver exercício 5).

23. Taxa de juros simples. Um capital de R$ 2.000,00 foi investido na poupança por 5 anos. Se os juros nesse período retornaram uma quantia de R$ 400,00, qual a taxa de juros praticada nesse investimento? (Ver exercício 17).

24. Terreno retangular. Se um terreno retangular possui perímetro (P) igual a 100 metros e largura (L) de 20 metros, calcule o comprimento (C) do terreno. (Ver exercício 1).

25. Conversão de temperaturas. Em um site da internet, especializado em divulgar temperaturas diárias de qualquer lugar no mundo, foi possível verificar que a temperatura na cidade de Petrolina em um determinado dia era de 95°F. Qual o valor dessa temperatura em graus Celsius? (Ver exercício 15).

26. Raio de uma região circular. O jardim da casa de Manoel tem o formato circular. Se a área desse jardim é de 25π m^2, qual o valor do raio desse jardim circular? (Ver exercício 20).

27. Região Trapezoidal. A frente de uma igreja foi construída no formato de um trapézio. Se a altura (h) da igreja mede 10 metros, a base menor (b) mede 15 metros e a área (A) construída de frente é de 225 m^2, encontre a outra base (B) dessa região frontal que tem o formato trapezoidal. (Ver exercício 19).

Nos exercícios de 28 a 34 traduza cada frase a seguir para a linguagem matemática equivalente. Em cada caso, represente pela letra x a quantidade que se quer determinar:

28. Duas vezes a soma de um número com 5 é igual a 30.

29. A soma de duas vezes um número com 5 é igual a 30.

30. Quatro vezes a diferença entre um número e 5 é igual a 24.

31. A diferença de quatro vezes um número com 5 é igual a 24.

32. A soma de duas vezes um número inteiro com três vezes o seu sucessor é igual a 48.

33. A soma de quatro vezes um número inteiro ímpar com duas vezes o próximo número inteiro ímpar é igual a 46.

34. Solucione a equação montada nos exercícios 28 e 32.

Nos exercícios de 35 a 46, resolva os seguintes problemas com números inteiros:

35. Problemas numéricos. Um número é cinco vezes maior do que outro. Se a soma do menor com duas vezes o maior é 45, determine esses dois números.

36. Problemas Numéricos. Um número é quatro vezes menor que outro. Se cinco vezes o menor número menos duas vezes o maior é 4, determine esses dois números.

37. Problemas Numéricos. Um número é sete vezes menor que outro. Se quatro vezes o menor número somado com duas vezes o maior é 62, determine esses dois números.

38. Problemas Numéricos. Um número é dez vezes maior que outro. Se a soma do dobro do menor número com o triplo do maior número é 55, determine os dois números.

39. Problemas Numéricos – inteiros consecutivos. Encontre dois números inteiros consecutivos tais que a soma do dobro do primeiro inteiro com o triplo do segundo inteiro é 28. (Dado: Se x é o primeiro inteiro, o próximo inteiro será representado por x + 1).

40. Problemas Numéricos – inteiros consecutivos. Encontre dois números inteiros ímpares consecutivos tais que três vezes o menor inteiro é cinco vezes maior que o dobro do segundo. (Dado: Se x representa o primeiro inteiro ímpar, o próximo inteiro é representado por x + 2).

41. Problemas geométricos – dimensões de um retângulo. O comprimento de um retângulo é 1 cm maior que o dobro da sua largura. Se o perímetro do retângulo é 74 cm, encontre as dimensões do retângulo.

42. Problemas geométricos – dimensões de um retângulo. O tamanho de um retângulo é cinco metros menor que o triplo de sua largura. Se o perímetro do retângulo é de 46 metros, quais as dimensões do retângulo?

43. Problemas geométricos – triângulos. A base de um triângulo isósceles é 3cm menor que o tamanho de cada lado restante (os outros dois lados iguais). Se o perímetro do triângulo é 36 cm, calcule as dimensões dos três lados do triângulo.

44. Em uma festa na boate, os valores dos ingressos da entrada eram os seguintes: R$ 8,00 para homens e R$ 6,00 para mulheres. O dono da boate contabilizou a venda de 500 ingressos e uma arrecadação de R$ 3.600,00 com a venda dos ingressos. Pergunta-se: Quantos homens e quantas mulheres havia na festa?

45. Manoel comprou 80 peças de roupa para revender em sua loja entre camisas e bermudas. Cada camisa lhe custou R$ 35,00 e cada bermuda custou R$ 20,00. Se ele pagou um total de R$ 2.350,00 na compra das roupas, quantas camisas e quantas bermudas Manoel comprou para revender?

46. Num estacionamento há carros e motos totalizando 80 veículos. Sabendo que o número de rodas é 220, qual a quantidade de carros e motos?

5. Respostas dos Exercícios Ímpares

1. $a = \frac{P}{4}$ **3.** $R = \frac{V}{I}$ **5.** $h = \frac{V}{\pi . r^2}$ **7.** $R = \frac{P}{I^2}$

9. $m = \frac{y-b}{x}$ **11.** $m = \frac{2K}{v^2}$ **13.** $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi . h}}$

15. $C = \frac{5}{9}(F-32)$ **17.** $i = \frac{J}{Ct}$ **19.** $B = \frac{2A-bh}{h}$

21. $h = 3cm$ **23.** $i = 4\% a.a$ **25.** 35 °C **27.** $B = 30m$

29. $2x+5=30$ **31.** $4x-5=24$ **33.** $4(2x+1)+2(2x+3)=46$

35. $\frac{270}{13}$ e $\frac{45}{13}$ **37.** $\frac{31}{10}$ e $\frac{124}{5}$ **39.** 5 e 6 **41.** 12 cm e 25 cm

43. 13 cm, 13 cm e 10 cm **45.** 30 bermudas e 50 camisas.