emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2019v6i1p61-83

FRACTAIS: POSSIBILIDADES PEDAGÓGICAS NA ESCOLA BÁSICA

FRACTALS: pedagogical possibilities in basic school

Amal Rahif Suleiman[1]

RESUMO

Neste artigo apresentamos elementos da geometria fractal que podem estar presentes na natureza, assim como os que podem ser construídos por algoritmos matemáticos. Tem por objetivos refletir sobre os aspectos gerais dos fractais, sobre a revisão bibliográfica, as pesquisas atuais, sobre sua alta aplicabilidade no mundo digital e tecnológico. Abordamos a ilustração de exemplos para calcular perímetro e área de um fractal. Nesse sentido, apresentamos duas possibilidades pedagógicas que podem ser aplicadas na escola básica: o Jogo do Caos e Fractais com Múltiplos no Triângulo de Pascal. Além do conhecimento matemático, destacamos ainda mediante essas e outras atividades, a relevância de que a geometria fractal seja inserida como conteúdo nos programas da matemática escolar do Estado de São Paulo, como já ocorre em outros estados do país.

Palavras-chave: *Geometria Fractal; Atividades Matemáticas; Escola Básica.*

ABSTRACT

In this article we present elements of Fractal Geometry that can be present in nature, as well as those that can be constructed by mathematical algorithms. Aims to reflect on the general aspects of fractals, on the literature review, the current research about your high applicability in the digital world and technology. We discuss the illustration of examples to calculate perimeter and area of a fractal. In this sense, we present two educational opportunities that can be

1. Professora de Educação Básica II de Matemática das redes Estadual e Municipal de São José do Rio Preto (SP). Mestre em Educação Escolar pela UNESP/FCLAR-Araraquara – Estado de São Paulo. E-mail: amal.rahif@terra.com.br

applied in elementary school: the Game of Chaos and Fractals with Multiples in Pascal's triangle. Besides the mathematical knowledge, yet, through these and other activities, the relevance of the Fractal Geometry is inserted as content in School Math programs in the State of São Paulo, as occurs in other States of the country.

Keywords: *Fractal Geometry; Math Activities; Basic School.*

este poema continua
este verso continua
esta palavra continua
esta letra continua
esta ideia continua

(Fábio Rocha)

Introdução

A geometria fractal trata de uma geometria específica, a chamada geometria da natureza. Por meio dela, podemos entender o desenvolvimento e a complexidade de muitos fenômenos e elementos do mundo natural. Segundo Janos (2008, p. X), "a Geometria Fractal é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza", tais como: possibilitar medir a extensão de uma praia, sendo ela a fronteira entre dois estados ou dois países, descrever o crescimento de uma planta, mostrar de que maneira podemos calcular as relações que constituem elementos com aparências irregulares, como montanhas, galáxias, cérebros e outros.

Grande parte dos elementos na natureza não possui forma proporcional, quando os elementos são regulares, a geometria convencional, como a euclidiana, promove os cálculos, os algoritmos e as fórmulas que resolvem com precisão as questões relacionadas a medidas, mas, e para os entes de formato que fogem aos padrões das fórmulas adequadas e pertinentes? Há uma matemática capaz de abranger e resolver medidas e cálculos de figuras irregulares que permeiam a vida natural?

Sendo um contexto novo e dependente em parte da tecnologia, o estudo dos fractais avançou com o desenvolvimento dos computadores, as imagens geradas por fractais são atraentes e podem ser fontes de motivação para o ensino e aprendizagem de matemática, fomentando uma educação matemática inserida nos momentos atuais, no reino da informática.

O objetivo deste artigo é refletir sobre aspectos gerais acerca da geometria fractal e sua aplicação no ensino da matemática, com base em dois enfoques relevantes: primeiramente mostrar a relação de conhecimento que os professores podem estabelecer com a geometria fractal em suas aulas; em segundo plano, veicular a geometria fractal como parte da geometria, que pode ser ensinada para os alunos dos ensinos fundamental e médio, partindo de condições matemáticas como medir extensões, áreas e volumes para elementos do tipo fractal presentes na natureza ou originários de transformações matemáticas. Para isso, estabelecemos a sugestão da aplicação de um jogo e uma atividade com o Triângulo de Pascal.

Justificativa e possibilidade curricular

A escola básica encontra-se estruturada nos preceitos contidos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e mais recentemente nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Escola Básica (DCN). Ressaltamos dois princípios norteadores dos PCN de matemática para o ensino fundamental (1998):

> [...] a Matemática é importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, que por sua vez são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais; a

> atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. (BRASIL, 1998, p. 57)

No mesmo documento, é previsto que "o trabalho com medidas deve centrar-se fortemente na análise de situações práticas que levem o aluno a aprimorar o sentido real das medidas" (p. 69). Como trabalhar medidas em situações reais, sem conhecer a forma de medir figuras fragmentadas presentes na realidade? Nas perspectivas dos PCN para o Ensino Médio de Matemática (1999), o conhecimento matemático tem um valor formativo e um valor instrumental:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (BRASIL, 1999, p. 40)

Definem como uma das competências e habilidades a ser desenvolvida em matemática no item Contextualização sociocultural: "aplicar conhecimentos e métodos matemáticos e em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento." (BRASIL, 1999, p. 46). Lembramos que há situações reais que incorporam elementos de formas não regulares que dependem de um conhecimento matemático específico.

Nas Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica – DCN – (2013), é estabelecida a seguinte organização em relação aos conteúdos, à integração e a abordagens do currículo no ensino fundamental:

> Em relação à organização dos conteúdos, há necessidade de superar o caráter fragmentário das áreas, buscando uma integração no currículo que possibilite tornar os conhecimentos abordados mais significativos para os educandos e favorecer a participação ativa de alunos com habilidades, experiências de vida e interesses muito diferentes. (BRASIL, 2013, p. 118)

Na mesma perspectiva, as Diretrizes Curriculares Nacionais estabelecem, para o ensino médio, os pressupostos de que "qualquer fenômeno que sempre existiu como força natural só se constitui em conhecimento quando o ser humano dela se apropria tornando-a força produtiva para si.” (BRASIL, 2013, p. 161). Além disso, consta desse documento que “o desenvolvimento científico e tecnológico acelerado impõe à escola um novo posicionamento de vivência e convivência com os conhecimentos capaz de acompanhar sua produção acelerada” (p. 167):

O currículo de matemática do Estado de São Paulo sugere que “um conteúdo de relevância, e que esteja plenamente justificado na perspectiva curricular de desenvolvimento de competências, poderá se estender além do bimestre sugerido na grade, [...]” (SÃO PAULO, 2012, p. 50), o que gera possibilidade de se trabalhar novos conhecimentos, além dos previstos na matriz.

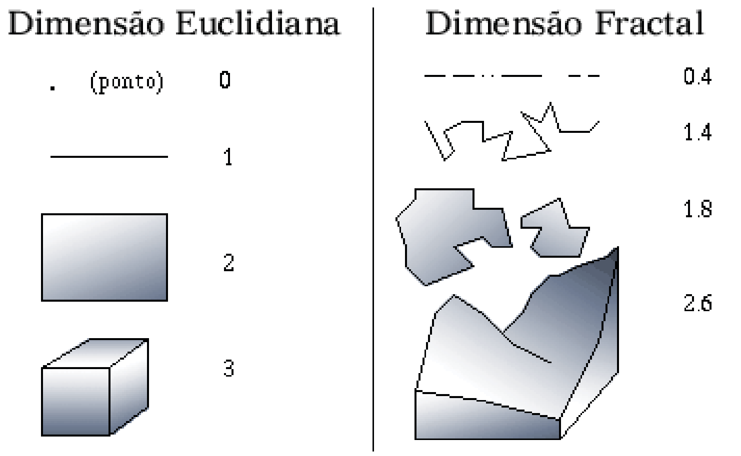
Quando buscamos a geometria fractal como possibilidade de um ensino contextualizado, moderno e tecnológico, estamos valorizando um conhecimento, apesar de sabermos que esse conteúdo não esteja previsto no currículo do ensino da escola básica paulista e talvez na formação dos futuros educadores matemáticos. Por que valorizar um conhecimento novo? Porque esse se apresenta na natureza ou pode ser obtido por meio de transformações matemáticas. Responder a situações-problema que envolvam formas geométricas deve causar inquietação e impotência para professores, uma vez que a grande maioria dos elementos naturais não tem forma regular, bem como não sejam delineadas as formas convencionais na teoria geométrica que eles estudaram.

Enfatizamos que a geometria fractal é um tema bastante recente no cenário educacional brasileiro, uma vez que surgiu a partir dos anos 2000, por isso muitos docentes não tiveram contato com esse conteúdo em sua formação durante a graduação. Apesar do reconhecimento de que há uma lacuna na formação dos docentes de matemática, alguns estados já inseriram a geometria fractal em seus componentes curriculares, conforme relatam Pereira e Borges (2017):

> A temática Fractal é extremamente nova no cenário educacional brasileiro, sendo trazida à tona significativamente apenas na última década (anos 2000), especialmente em nosso Estado, o Paraná. Em 2008, ela foi considerada na formulação do documento Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná – DCE – (PARANÁ, 2008) como um tópico das Geometrias não Euclidianas, inserida ainda no conteúdo estruturante Geometrias. (PEREIRA e BORGES, 2017, p. 564)

No Quadro 1, a seguir, consta um comparativo quanto à dimensão das figuras geométricas com relação a sua dimensão em uma geometria euclidiana e em uma geometria fractal:

Quadro 1. Tabela comparativa entre geometria euclidiana e geometria fractal



Fonte: Siqueira, 2005.

Diante do exposto, justificamos a inserção de uma possibilidade de se trabalhar os componentes matemáticos dos fractais na escola básica.

A Geometria Fractal

O matemático e economista polonês Benoit Mandelbrot foi quem criou o termo "fractais", baseando-se no latim *fractus*, cujo verbo *frangere* correspondente significa quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar. Quando se diz geometria fractal, refere-se ao estudo dos fractais (BARBOSA, 2005, p. 21). Seus trabalhos iniciaram-se na década de 1960, o que revela ser uma teoria nova dentro da matemática – ciência milenar e organizada pelos pensadores gregos, como Euclides, no século III a.C. Além disso, ele escreveu muitos livros na década de 1970, sendo sua obra mais famosa *The Fractal Geometry of Nature* (1977).

Bernoit Mandelbrot estudou, durante anos, ciências de outras áreas, mesmo antigas, e buscou modelos para aplicar suas descobertas. Sua geometria fractal representa uma natureza irregular, de fragmentação, demonstrada por célebre pergunta que lançou: "que extensão tem o litoral da Grã-Bretanha?" Sabemos ser região de muitas baías e penínsulas, que poderão aparecer ou não, dependendo da escala de medição adotada (BARBOSA, 2005).

Enveredar pela geometria dos fractais leva-nos ao encontro com uma ciência chamada Teoria do Caos. Os fenômenos ditos aleatórios que ocorrem nessa teoria são representados por estruturas complexas e fragmentadas, e a geometria fractal vai fornecer e mostrar as regularidades, além de certa ordem, presentes nesses elementos "caóticos". Segundo Rabay (2013, p. 13), "vários fenômenos antes ditos aleatórios têm sequências aproximadas, em diferentes escalas como variações da economia, ruídos em transmissão telefônica, movimentos de animais e produção agrícola".

A Teoria do Caos foi alvo de estudo de muitos cientistas nas últimas cinco décadas, como biólogos, físicos, químicos, astrônomos, meteorologistas, ecologistas, fisiologistas que procuraram compreender a complexidade de ocorrências naturais aparentemente desordenadas, irregulares, imprevisíveis e caóticas, conforme elucida Barbosa (2005):

> Temas como desordem na atmosfera, turbulência nos fluidos, variação populacional de espécies, oscilações do coração e do cérebro, interligações microscópicas de vasos sanguíneos, ramificações alveolares, cotações da bolsa, forma das nuvens, relâmpagos, aglomerações estelares etc. eram estudados buscando-se então ligações entre diferentes tipos de irregularidades; e surpreendentes ordens no caos foram descobertas. As ferramentas da Geometria Fractal com suas formas foram elementos insubstituíveis de muitos cientistas, pois permitiram reformular antigos problemas. (BARBOSA, 2005, p. 10)

A redução ou fragmentação de objetos e elementos utilizados na produção de imagens no mundo científico e tecnológico produziu o avanço dos aparelhos como de diagnóstico para doenças, com base na revolução dos fractais e seus algoritmos. Outra aplicação importante foi na computação gráfica:

> [...] bastante utilizada no cinema na criação de cenários naturais como rios, explosões, conjuntos montanhosos e plantas. Tendo em vista a boa aproximação da representação destes através dos fractais, o modelo to-

> pológico simplifica o que seria bastante trabalhoso se fossem utilizadas outras técnicas para fazê-lo. (RABAY, 2013, p. 3)

Assim como a computação gráfica se nutriu com a utilização dos fractais, a difusão desses ocorreu com o desenvolvimento dos computadores, possibilitando seu estudo tanto geométrico como de aparência. Além de sua alta aplicação em ambientes científicos e tecnológicos, existe nos fractais a característica estética da "simetria", conceito da ordem da beleza. Tal propriedade proporciona a emoção do belo no aspecto visual dos fractais. Essa recorrência é empregada na arte, na pintura e na arquitetura. Também encontramos estruturas fractais na música e, do mesmo modo, inúmeros belos exemplos na própria natureza.

Podemos, de forma sucinta, elencar os componentes que caracterizam um fractal. A autossemelhança é a sua principal característica:

> Tire uma foto de uma couve-flor e de uma pequena parte de seu corpo e amplie as duas fotos no mesmo tamanho. Se a foto não tiver fundo, será geralmente impossível dizer qual é a couve-flor inteira e qual é o pedaço. Isto é assim porque pedaços da couve-flor são **semelhantes** ao todo. Dizemos, então, que a couve-flor é **autossemelhante**. (JANOS, 2008, p. X)

Figura 1. Couve-Flor

Fonte: Fractais na Natureza – Parte II (2010)

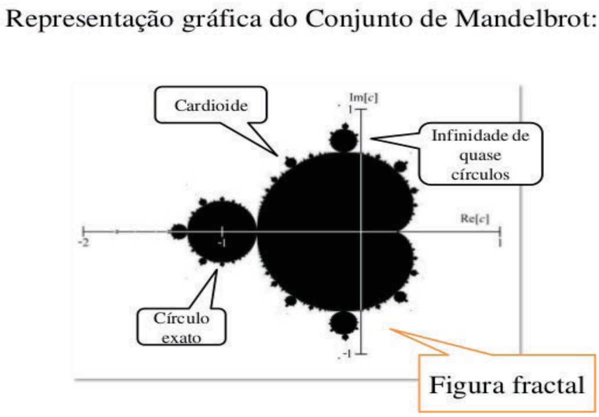
Os fractais são objetos geométricos que podem ser, infinitamente, divididos em partes, e cada um deles mantém-se exatamente igual ao original, sem depender de escalas. Podem ser gerados por um processo repetitivo, por mio de transformações geométricas simples, as iterações, isto é, o objeto é formado por ele mesmo, de forma reduzida. Assis et al. destacam as seguintes propriedades dos fractais:

> As principais propriedades que caracterizam os fractais são a autossemelhança, a complexidade infinita e a sua dimensão. A autossemelhança é identificada quando uma porção, de uma figura ou de um contorno, pode ser vista como uma réplica do todo, numa escala menor.[...]. A complexidade infinita refere-se ao fato de que o processo de geração de uma figura, definida como sendo um fractal, é recursivo. Isto significa que, quando se executa um determinado procedimento, no decorrer dela encontra-se como subprocedimento o próprio procedimento anteriormente executado. Vale salientar que, no caso da construção iterativa de um fractal matematicamente definido, dispõe-se de um número infinito de procedimentos a serem executados, gerando-se assim uma estrutura infinitamente complexa. [...] Finalmente, a dimensão de um fractal, ao contrário do que ocorre na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um valor inteiro. Nela, um ponto possui dimensão zero, uma linha possui dimensão um, uma superfície possui dimensão dois e um volume possui dimensão três. No caso da dimensão fractal, ela é uma quantidade fracionária, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém. Como exemplos, pode-se citar a dimensão fractal da bacia fluvial do rio Amazonas que é 1.85, dos relâmpagos no espaço tridimensional, 1.51, dos angiogramas dos rins, 1.61, dentre outros. (ASSIS et al., 2008, p. 2304-2)

Alguns fractais, especialmente os encontrados na natureza, possuem a característica da irregularidade, isto é, sua forma se apresenta "rugosa", não linear e fragmentada.

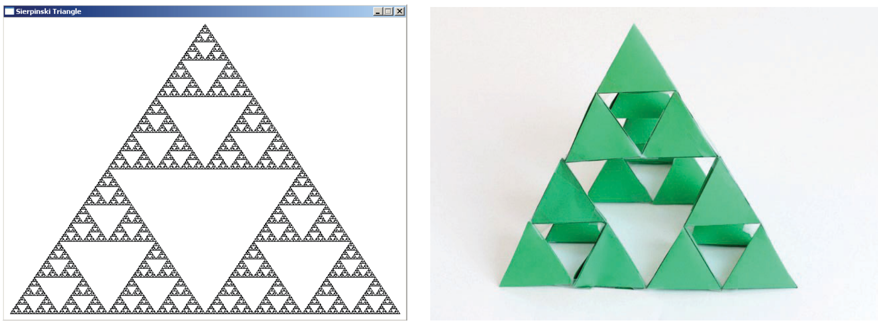
Anteriormente a Mandelbrot, alguns matemáticos importantes criaram figuras que foram classificadas como "monstros matemáticos", devido a suas peculiaridades e formas surpreendentes, sendo elas: o Conjunto de Cantor, a Curva de Peano, a Curva de Hilbert, a Curva de Koch, o Triângulo e o Tapete de Sierpinski e os Conjuntos de Fatou e Julia. Esses últimos forneceram a base matemática para a produção do Conjunto de Mandelbrot. Apresentamos algumas figuras dessas construções:

Figura 2. O Conjunto de Mandelbrot



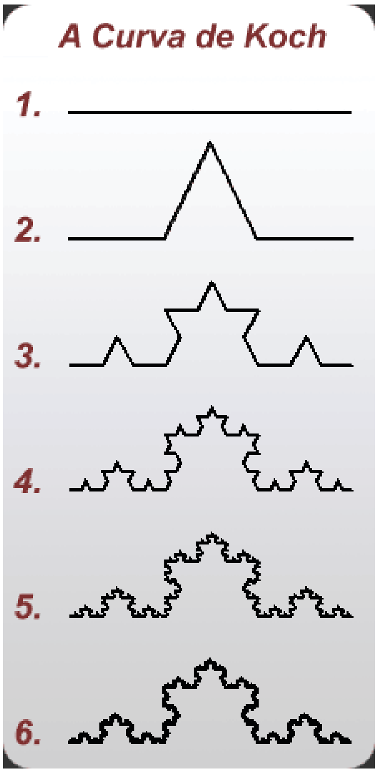
Fonte: Cruz (2013)

Figura 3. Triângulo de Sierpinski



Fonte: Sierpinski Fractal 3D Constest (2017)

Figura 4. Seis iterações da Curva de Koch



Fonte: Siqueira (2005)

No Brasil, a partir dos anos 2000, intensificou-se a produção científica sobre os fractais. Podemos citar Carvalho (2005) que fez um estudo voltado a possibilidades de materiais didáticos com fractais para alunos da 3ª série do ensino médio no estado do Pará; Gomes (2010) pesquisou uma proposta de ensino a partir de fractais para o estudo de semelhança de figuras planas pela UFScar; Rabay (2013) procedeu a estudos e aplicações da geometria fractal no PROFMAT pela UFPB, além de publicação de numerosos artigos tratando do tema, o que indica ser assunto atual e interessante para a vida acadêmica e com ressonância na matemática da escola básica.

Destacamos o trabalho de mestrado de Nunes (2006), da Universidade do Porto, que contribuiu para o processo de ensino e aprendizagem da geometria e do cálculo, usando a aplicação meio-tom digital que utiliza curvas que preenchem o quadrado, como na curva de Hilbert. Sugere diversas aplicações: “Autossemelhança, forma, dimensão, área, perímetro, volume, números complexos, semelhança de figuras, sucessões e iterações de funções são alguns exemplos de conteúdos matemáticos que podem ser explorados por esse tema” (NUNES, 2006, p. 73).

Em (Madsen Barbosa, 2005), são apresentadas numerosas atividades que podem ser aplicadas por professores de ensino fundamental e médio, proporcionando o contato matemático e dando importante oportunidade da veiculação da geometria fractal.

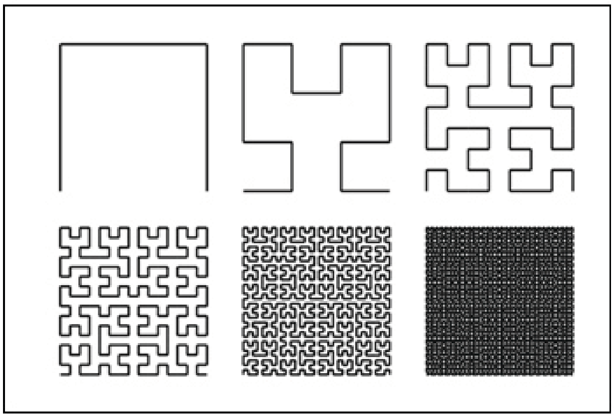
Dessa maneira, percebemos que a geometria fractal se encontra inserida em muitas possibilidades dos conteúdos da matemática escolar, e seus elementos estão sendo fartamente aplicados no mundo contemporâneo. Contudo, ainda não faz parte do currículo da escola básica paulista.

Classificação dos Fractais

Uma maneira de classificar os fractais é levar em conta sua autossimilaridade e a forma como é gerado. Assim, podemos agrupá-los em três estruturas:

1. Fractais gerados por funções iteradas: são fractais geométricos, possuem uma regra fixa, bem definida e autossimilaridade perfeita, qualquer que seja a escala utilizada. Para a construção de um fractal desse tipo, estabelece-se uma função iterada por meio de um algoritmo. Denomina-se “Nível 0” o objeto iniciador e “Nível 1” o objeto gerador das novas figuras fractais. Apresentamos, a seguir, a construção em 5 Níveis ou Transformações para a construção da Curva de Hilbert:

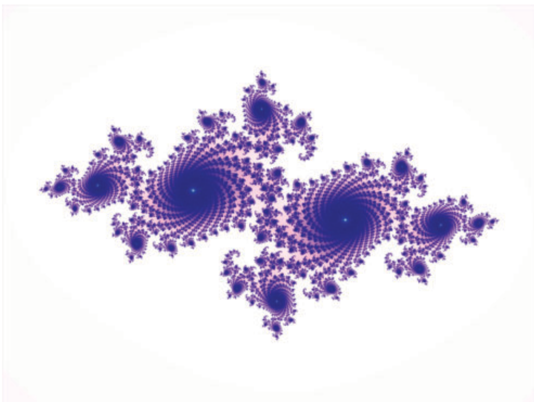
Figura 5. 5 Iterações da Curva de Hilbert



Fonte: researchgate.net

2. Fractais gerados por uma relação de recorrência: Utilizando algoritmos iterativos, o fractal gerado possui pequenas cópias não perfeitas, de autossimilaridade não exata, como o conjunto de Mandelbrot e de Júlia.

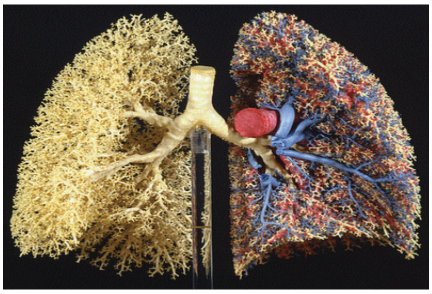
Figura 6. Conjunto de Júlia



Fonte: Wikipédia.

3. Fractais Aleatórios: São os fractais naturais., também estão relacionados à Teoria do Caos e a imagens computacionais. Possuem autossimilaridade estatística e seu estudo é amplo em diversas áreas como medicina, biologia, economia e outras.

Figuras 7 e 8. Fractais na Natureza



Fonte: Google – imagens de fractais na natureza

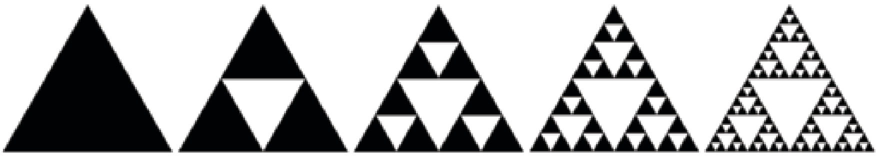
Um exemplo de cálculos na geometria fractal

Podemos efetuar cálculos de relações geométricas com figuras fractais, as funções iterativas possibilitam os passos do algoritmo visando encontrar os resultados dos conceitos para as medidas, como, por exemplo, o perímetro e a área.

Perímetro e área com iterações do Triângulo de Sierpinski:

Iniciamos o processo com base em um triângulo equilátero de lado 1 cm. Desse triângulo, retira-se outro cujos vértices são os pontos médios do inicial obtendo o nível 1 do fractal. Repetindo o mesmo processo para os três triângulos restantes, obteremos o nível 2 do fractal e assim por diante até o nível n. O limite desse processo gera o Triângulo de Sierpinski.

Figura 9. Iterações no Triângulo de Sierpinski



Fonte: Wikipedia.

Nas representações, a seguir, tomamos por referência os trabalhos de Rodrigues e Mucheroni (2013). O Quadro 2 indica os cálculos para o perímetro dos triângulos, com as iterações:

Quadro 2. Perímetro do Triângulo de Sierpinski

Nível	**Nº de triângulos**	**Medida do Lado (cm)**	**Perímetro de cada triângulo (cm)**	**Perímetro total (cm)**
0	1	1	3	3
1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$3.\frac{3}{2}$
2	3^2	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{3}{2^2}$	$3.\left(\frac{3}{2}\right)^2$
3	3^3	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$3.\left(\frac{3}{2}\right)^3$
...	...	...	...	...
n	3^n	$1/2^n$	$3.\ \frac{1}{2^n}$	$3.\left(\frac{3}{2}\right)^n$

Fonte: Produção nossa.

Notamos que o perímetro vai crescendo, conforme vai aumentando o nível. Nota-se que o perímetro será infinito no nível n, com n tendendo ao infinito. Para calcular a área do triângulo de Sierpinski, obtemos para a área do nível zero o valor de $\sqrt{3}/4$, o qual chamaremos de A. Para representar a área, utilizamos o Quadro 3:

Quadro 3. Área do Triângulo de Sierpinski

Nível	Nº de triângulos	Medida do Lado (cm)	Área de cada triângulo (cm²)	Área total (cm²)
0	1	1	A	A
1	3	$1/2$	$1/4 .A$	$3/4 .A$
2	3^2	$1/2^2$	$1/4^2 .A$	$(3/4)^2 .A$
3	3^3	$1/2^3$	$1/4^3 .A$	$(3/4)^3 .A$
...	...	...	...	...
n	3^n	$1/2^n$	$1/4^n .A$	$(3/4)^n .A$

Fonte: Produção nossa.

Notamos que a área vai diminuindo, conforme vai aumentando o nível. No nível n, com n tendendo ao infinito, a área será zero.

Duas possibilidades de aplicações na escola básica

O Jogo do Caos

Podemos construir o triângulo de Sierpinski por meio de um jogo extraído de Janos (2008, p. 32-33). Para isso, sugerimos os seguintes passos:

a) Numa folha de papel construa um triângulo equilátero ABC e marque um ponto inicial P_0.

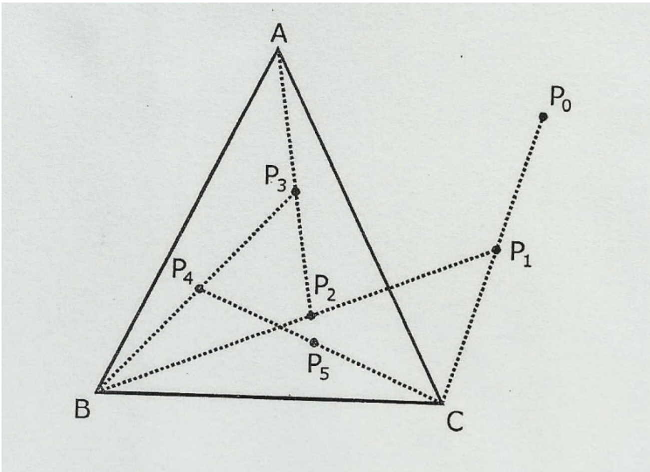
b) Jogando um dado, estabeleça a seguinte convenção: se der 1 ou 2 selecione o ponto A; se der 3 ou 4 selecione o ponto B e, se der 5 ou 6, selecione o ponto C. Por exemplo, supondo que o dado deu 5, vai corresponder a C.

c) Então ligue P_0 com C e marque P_1 na metade da distância P_0C.

d) Jogue o dado. Suponha que deu 3, equivalente a B. Ligue P_0 com B e marque P_2 na metade de P_1A.

e) Repita esses procedimentos diversas vezes, sempre marcando o ponto P_i.

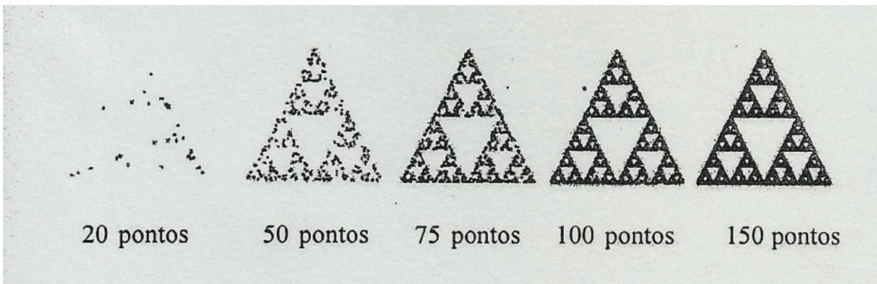
Figura 10. Jogo do Caos



Fonte: Janos (2008)

A princípio, nada de muito interessante pode se apresentar, mas, por volta de 75 jogadas, o Triângulo de Sierpinski começa a tomar forma. Como pode ser visto na Figura 11.

Figura 11. Triângulo de Sierpinski e Jogo do Caos



Fonte: Janos (2008)

Dessa forma, podemos produzir uma estrutura ordenada gerada por um método totalmente aleatório. A geometria fractal põe ordem no caos.

Fractais nas configurações de múltiplos no Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal ou Triângulo Aritmético é obtido com os coeficientes das expansões binomiais sucessivas $(a + b)^n$, das quais obtemos 1 na primeira linha; 1 e 1 na segunda linha; os coeficientes 1, 2 e 1 na terceira linha e assim por diante:

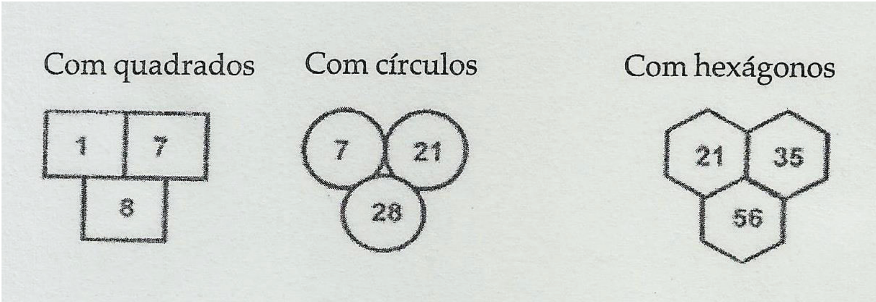
Figura 12. Triângulo de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Fonte: Produção nossa.

Existe, para o triângulo de Pascal, uma lei de formação baseada na Relação de Stiefel: $C_{n,\ i} + C_{n,\ i+1} = C_{n+1,\ i+1}$. Essa relação consiste em adicionar dois valores consecutivos de uma linha para obter o valor, de mesma ordem que o segundo, da linha seguinte:

Figura 13. Representação da Relação de Stiefel

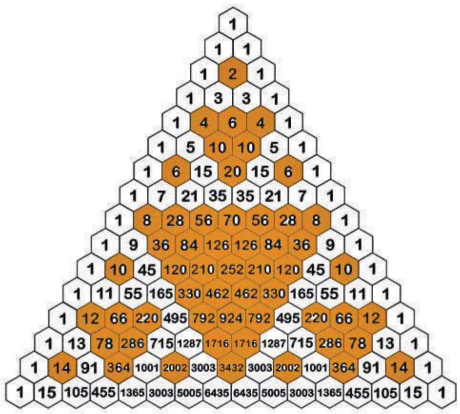


Fonte: Barbosa (2005).

Utilizando o esquema geométrico de casas hexagonais, podemos construir um **Fractal Múltiplo de dois.**

A partir do Triângulo Aritmético, indicando os números que são pares, isto é, que são múltiplos de dois, destacamos suas respectivas hexagonais, por exemplo, colorindo-as com amarelo. Fica facilitado, pois casas consecutivas de uma mesma linha em branco, ou casas consecutivas de uma mesma linha em amarelo, então a casa hexagonal inferior será amarela, uma vez que a soma de ímpares ou a soma de pares será sempre par. Obtemos, então, o triângulo de Sierpinski com base no Triângulo de Pascal:

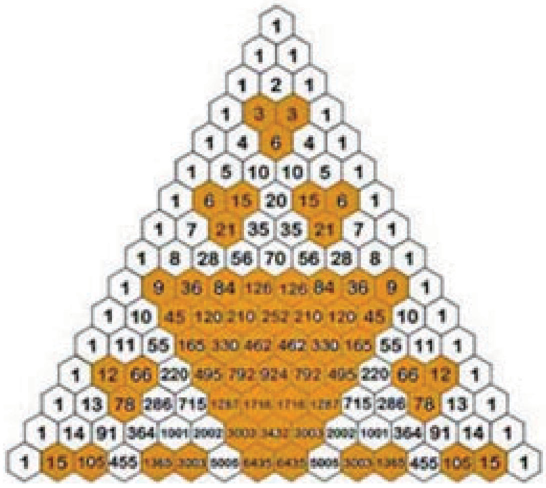
Figura 14. Fractal Múltiplo de dois



Fonte: Barbosa, 2005.

Analogamente, podemos obter o Fractal Múltiplo de três com o Triângulo de Pascal, colorindo os hexágonos múltiplos de 3:

Figura 15. Fractal Múltiplo de três



Fonte: Barbosa, 2005.

Observações: Duas casas hexagonais amarelas fornecem a inferior da linha seguinte também amarela, desde que a soma de múltiplos de 3 seja também um múltiplo de 3. Nota-se que, na segunda descendente da direita para a esquerda, os hexágonos serão amarelos por correspondem à sucessão 3, 6, 9, 12 etc.

Esses dois fractais criados com base no Triângulo Aritmético de Pascal promovem um componente motivador, uma vez que oferecem um belo visual artístico, estimulando a aprendizagem da contagem na análise combinatória, conteúdo do ensino médio.

Considerações finais

Esperamos, por meio deste estudo, contribuir com as reflexões acerca da importância dos fractais no mundo contemporâneo, da riqueza de suas aplicações e da necessidade de serem conhecidos na escola, como parte do conhecimento matemático.

A sociedade atual, em seus mais diversos setores, encontra-se dependente dos processos digitais. As atividades humanas aprendem a utilizar uma técnica nova e imediatamente surge outra, exigindo conhecimentos rapidamente adquiridos para que possam se manter no ritmo cada vez mais veloz das descobertas tecnológicas da informação. Os fractais fazem parte desse mundo impactante da virtualidade, avaliamos que os estudantes precisam ter o contato com esse saber.

Temos expectativas de que o presente texto possa cooperar no levantamento dessas questões, na divulgação de possíveis práticas pedagógicas com geometria fractal, nas reflexões que possa determinar e nas inquirições que possa suscitar em possíveis novas investigações interessantes para a educação matemática, proporcionando maior nível de abrangência sobre esse tema.

De igual reconhecimento, esperamos suscitar reflexões para a consolidação e ampliação junto aos programas de formação inicial ou continuada, a necessidade de incluir a geometria fractal nos cursos procedentes, uma vez que sua aplicação somente terá eficácia, se forem conhecidos com profundidade os fundamentos matemáticos que a definem. Além disso, que surjam gerações com propostas de inovações afiançadas por pesquisas arraigadas no saber já produzido, avançando o que ainda não sabemos e que possa ser aplicado com os fractais.

Recebido em: 11/09/2018
Aprovado em: 19/03/2019

Referências

ASSIS, Thiago Albuquerque de; MIRANDA, José Garcia Vivas; MOTA, Fernando de Brito; ANDRADE, Roberto Fernandes Silva; CASTILHO, Caio Mário Castro de. Geometria Fractal: propriedades e características de fractais ideais. In: **Revista Brasileira de Ensino de Física**. V.30, n.2, 2304 (2008). Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v30n2/a05v30n2.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2017.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. Ed. Belo Horizonte, Minas Gerais: Autêntica, 2005.

BRASIL, MEC – Ministério da Educação – Secretaria de Educação Fundamental – **PCN Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática** – 5a a 8a Séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, MEC – Ministério da Educação – Secretaria de Educação Média e Tecnológica – **PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEMT, 1999.

BRASIL, MEC – Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional da Educação. Câmara Nacional de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC/ SEB/DICEI, 2013.

CARVALHO, Hamilton Cunha de. **Geometria Fractal**: Perspectivas e possibilidades no ensino de Matemática. 2005. 108 p. Dissertação de Mestrado em Educação e Ciências. Universidade Federal do Pará. Disponível em <http://www.repositorio.ufpa.br:8080/jspui/handle/2011/1857>. Acesso em: 10 jul. 2017.

CRUZ, Elton Ribeiro da. **Sistemas Dinâmicos Caóticos**. 2013. Disponível em: <https://pt.slideshare.net/eltonribeirodacruz/sistemas-dinmicos-caticos-com-minha-participao>. Acesso em: 11 Jul. 2017.

GOMES, Antônio do Nascimento. **Uma proposta de ensino envolvendo Geometria Fractal para o estudo de semelhança de figuras planas**. 2010. 230 p. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências Exatas. Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, São Paulo. Disponível em: <file:///C:/Users/User/Downloads/3265%20(1).pdf>. Acesso em: 13 jul. 2017.

JANOS, Michel. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo**. Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. 78 p. (Mestrado em Ensino da Matemática). Universidade do Porto, Portugal. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2017.

PEREIRA, Tiago; BORGES, Fábio Alexandre. A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos. In: **Acta Scientiae**. V.19, n.4, p.563-581, jul/ago.2017. Disponível em: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/viewFile/2424/2525):>. Acesso em: 10 jul. 2017.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e Aplicações da Geometria Fractal**. 2013. 103 p. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal da Paraíba. Disponível em: <http://tede.biblioteca.ufpb.br:8080/handle/tede/7651#preview-link0>. Acesso em: 10 jul. 2017.

ROCHA, Fabio. **Poema Fractal.** 2012. Disponível em: <http://www.poesiaspoemaseversos.com.br/poema-fractal/>. Acesso em: 10 Jul. 2017.

RODRIGUES, Tatiana Miguel; MUCHERONI, Laís F.. Geometria Fractal e Alguns Exemplos Clássicos. In: **Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional – CMAC SUDESTE** 2013. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/cmacs/cmac-se/2013/trabalhos/PDF/6738.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2017.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação (SEE). **Proposta Curricular do Estado de São Paulo de Matemática** (Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio). São Paulo: SEE, 2012.

SIQUEIRA, Rodrigo. **Introdução aos Fractais**. 2005. Disponível em: <http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php>. Acesso em: 13 Jul. 2017.