

DOI: <https://doi.org/10.23925/2358-4122.2021v8i1p1-18>

## A IMPORTÂNCIA DO ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE SOB A PERSPECTIVA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

### *THE IMPORTANCE OF TEACHING AND LEARNING PROPORTIONALITY FROM THE PERSPECTIVE OF SEMIOTIC REPRESENTATIONS*

Raimundo Luna Neres<sup>1</sup>Joemília Maria Pinheiro Almeida<sup>2</sup>

#### RESUMO

*Neste estudo apresentamos uma pesquisa cujo objetivo foi expor aos estudantes do nono ano do ensino fundamental o quanto é necessário apropriar-se de conteúdos envolvendo proporcionalidade, de maneira que pudessem refletir sobre possíveis aplicações dessa componente curricular em outros conteúdos de matemática. Foi uma investigação qualitativa feita numa escola pública de São Luís – MA, desenvolvida em 12 aulas de cinquenta minutos. Para fundamentar as atividades e a análise da aprendizagem dos alunos referente às produções dos trabalhos desenvolvidos em sala de aula usamos como referencial central os registros de representações semióticas e hipóteses levantadas por Almouloud, Damm e Moretti em seus artigos publicados sobre essa teoria. A análise dos problemas avaliados revelou que os alunos tiveram compreensão de uso das funções de tratamento de registros e de aplicação das funções cognitivas de conversão entre representações semióticas, tornando-se mais visíveis quando se trabalhou com a mudança de registros da linguagem natural para a linguagem figural.*

**Palavras-chave:** *Aprendizagem; Registros Semióticos; Proporcionalidade; Funções Cognitivas de Conversão.*

#### ABSTRACT

*In this study we present a research whose objective was to expose to students in the ninth year of elementary school how much it is necessary to appropriate content involving proportionality, so that they could reflect on possible applications of this curriculum component in other mathematics content. It was a qualitative investigation carried out in a public school in São Luís – MA, developed in 12 lessons of fifty minutes. To substantiate the activities and analysis of the students' learning regarding the productions of the works developed in the classroom, we used as the central reference the records of semiotic representations and hypotheses raised by Almouloud, Damm and Moretti in their articles published on this above theory. The analysis of the evaluated problems revealed that the students understood the use of the functions of treatment of records and the application of the cognitive functions of conversion between semiotic representations, becoming more visible when working with the Change of natural language records to the figural language.*

**Keywords:** *Learning; Semiotic Record; Proportionality; Cognitive Conversion Functions.*

---

<sup>1</sup>.Professor de Matemática dos Cursos de Engenharias da Universidade Ceuma - UNICEUMA. E-mail: luna.neres@ceuma.br ou raimundolunaneres@gmail.com

<sup>2</sup>.Professora de Matemática dos Cursos de Engenharias da Universidade Ceuma – UNICEUMA. E-mail: joemilia.almeida@ceuma.br.

## Introdução

Nesta pesquisa investigamos a importância da apropriação pelos alunos de uma escola pública do ensino fundamental de São Luís/MA de conteúdos envolvendo proporcionalidade, de tal forma que os motivassem a refletir sobre aplicações dessa teoria em outros conteúdos matemáticos.

Ao longo desta pesquisa observamos que alguns professores do ensino fundamental da escola pesquisada, quando ministram esse conteúdo, em geral, não faziam menção de que esse conteúdo também está presente em outras matemáticas da educação básica.

Essa constatação nos motivou a investigar como se desenvolveria o ensino de proporcionalidade relacionando-a com outras matemáticas e como seria a aprendizagem pelo viés dos registros de representação semiótica.

Como articular a proporcionalidade com outras matemáticas, focando a aprendizagem? Quais tipos de representações matemáticas poderiam ser trabalhados? Assim, nosso objetivo foi investigar a importância da aprendizagem de conteúdos envolvendo proporcionalidade, de maneira que proporcionasse aos alunos refletir sobre possíveis aplicações desse componente curricular em outros conteúdos da matemática.

Por outro lado, tornou-se salutar expor aos alunos a importância dessas conexões que existem entre as matemáticas. A apropriação dessas articulações de conteúdos então, pode facilitar a resolução de outros problemas a ser estudados. A utilização dos registros de representação semiótica na articulação entre estes conteúdos facilitada a compreensão do aluno, dadas as possibilidades de se usar vários tipos de registros, como por exemplo, as mudanças de registros figurais para registros algébricos e numéricos, podem facilitar a aprendizagem.

Segundo PCN (BRASIL, 1998) e Maranhão (2000), a aprendizagem pelo aluno dos conteúdos referentes à proporção (proporcionalidade) é fundamental pois lhe permite fazer relações com diversas atividades do cotidiano e desenvolve o raciocínio matemático.

As abordagens práticas de ensino e da aprendizagem foram executadas de forma interacionista, quando o professor e o aluno se juntaram para construir o conhecimento, tornando-se, portanto, os mediadores na construção de ações sistemáticas para atingir os objetivos educacionais propostos.

Os resultados apresentados foram construídos a partir de uma pesquisa qualitativa de intervenção produzida pela mestranda – Joemília Maria Pinheiro Almeida - do Programa de Pós-graduação em Educação: Gestão de Ensino da Educação Básica – Universidade Federal do Maranhão – UFMA, acompanhada pelo seu orientador. Os dados da pesquisa constituíram-se dos registros semióticos escritos pelos sujeitos da pesquisa, dos protocolos das resoluções de atividades inerentes à proporcionalidade e das anotações dos pesquisadores que realizaram a intervenção.

A sequência de trabalho consistiu em acompanhar junto aos professores das salas, como os alunos desenvolveriam suas habilidades ao resolverem atividades relacionadas aos conteúdos de proporção, à luz de representações semióticas, que tivesse relações com outros ramos da matemática. Os dados da pesquisa foram registrados pelos pesquisadores em diários de bordo para posterior análise.

Na teia de verificação de aprendizagem escolar, a resolução de atividades matemáticas, proposta aos alunos, foi desenvolvida com base nas funções cognitivas de tratamento e de conversão, e em alguns casos dependiam de mediação dos pesquisadores.

Na análise do desempenho escolar dos estudantes optamos pelo aporte teórico da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de acordo com as produções de Raymond Duval (1993, 2007, 2009, 2011, 2012, 2014, 2016) e pelas hipóteses levantadas sobre essa teoria pelos artigos de Damm (2008), de Almouloud (2007) e de Moretti (2002, 2007)).

### **Investigação Teórica**

Duval (2016) levanta a hipótese de que existem duas questões importantes e cruciais a serem observadas em pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da matemática: a primeira diz respeito ao que caracteriza uma atividade de matemática em relação aos outros tipos de atividade científica ou intelectual; e a segunda trata do que é compreender matemática e, desse modo, versa sobre os critérios que permitem saber se foi compreendida.

Assim, quais seriam as competências dos estudantes na resolução de exercícios de proporcionalidade que tivesse relações com outras matemáticas? Usando registros semióticos? A pesquisa foi baseada em competências utilizadas na resolução de atividades de matemática, ancoradas na execução das funções de tratamento e de conversão entre registros de partida e de chegada.

Para haver compreensão em matemática, segundo Duval (2007, 2009), o aluno deve operar com alguma habilidade as funções de Tratamento e de Conversão, as quais ele define, como sendo:

Tratamentos quando as operações ocorrem dentro do mesmo registro em que foi criado, ou seja, trabalhar com o mesmo registro sem modifica-lo, por exemplo, resolver uma equação ou sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexão e simetria.  
 Conversão – quando as operações ocorrem de uma representação de saída em outra de chegada, isto é, de um registro em outro registro – devendo conservar a totalidade ou apenas uma parte do registro dado como ponto de partida (DUVAL, 1993, p. 41-42 -tradução nossa).

Portanto, se o aluno não conseguir fazer diferença entre o conteúdo em estudo e sua representação, é provável que não aprendeu o assunto trabalhado. Portanto, para que haja aprendizagem o estudante não pode trocar o objeto matemático de estudo com as suas representações. Duval (2007, 2012) afirma ainda que existe uma variedade de representações semióticas que devem ser utilizadas em resolução de problemas matemáticos. Nessa teia de raciocínio Moretti (2007) aponta a hipótese de que, na aprendizagem de conceitos em matemática, uma preocupação deve ser

levantada: a de como transformar objetos de pesquisa em objetos de ensino. Essa preocupação é fruto do papel das representações semióticas e da noção de congruência semântica.

A apropriação de entes matemáticos, de acordo com Damm (2008), só é estabelecida a partir das representações dos objetos de estudo (conceitos, propriedades, estruturas e relações) que podem expressar diversas situações. Logo, conhecer diferentes formas de representação do mesmo objeto matemático pode facilitar a aprendizagem.

Assim, pode-se propor situações de aprendizagem ao aluno que facilite a apropriação do conhecimento e que favoreça representar um objeto matemático de várias maneiras.

Para Bruner (1978), é necessário que haja diálogo entre professor e aluno, pois essa interação possibilita ao sujeito trabalhar estratégias que proporcionem a produção de seu próprio conhecimento. Por outro lado, o que se constata é que, normalmente,

As dificuldades enfrentadas pelos alunos na compreensão da matemática são originadas dos processos epistemológicos particular do conhecimento matemático, e não somente nas questões de organização pedagógica das atividades. Para que os alunos possam efetivamente compreender a matemática, ou que ela contribua para a sua formação, é preciso desenvolver outro tipo de funcionamento cognitivo do que o praticado nas outras disciplinas. Para ensinar é preciso se ter consciência dos processos cognitivos específicos que requer o pensamento matemático (DUVAL, 2011, p. 8).

Para o autor, aprender matemática é diferente de aprender outras áreas do conhecimento, pois a atividade cognitiva é diferenciada. Nesse contexto, para que o aluno possa realmente compreender a matemática,

Ou para que a matemática contribua para a formação intelectual e geral dele, que vá além de uma aprendizagem tecnológica de procedimentos executados à mão ou com máquinas, é preciso desenvolver outro tipo de funcionamento cognitivo que o praticado nas outras disciplinas (DUVAL, 2011, p. 9).

O que torna necessário o desenvolvimento de um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento que contribui para o crescimento da capacidade de raciocinar, analisar e de visualizar o conteúdo matemático por meio de diferentes maneiras de representação desse objeto de estudo.

Para Vale, Pimentel e Barbosa (2015), é preciso existir uma correspondência entre a compreensão da matemática e o desenvolvimento cognitivo dessa compreensão. Assim, poder-se-á contribuir para a construção do conhecimento dos estudantes.

No que concerne ao objeto de estudo em discussão, proporcionalidade, segundo Van de Walle (2009) nada mais é do que a declaração de igualdade entre duas relações, ou seja, a relação entre duas variáveis (grandezas) proporcionais. Além de um conteúdo matemático, Costa e Allevato (2015) afirmam que é também um formador de mecanismos cognitivos para o entendimento de outros conteúdos matemáticos, envolvendo questões numéricas destacando-se as medidas e a Geometria.

A proporcionalidade também aparece em várias situações de estudo, em problemas aritméticos e algébricos, como no caso de regra de três, de função linear, sem que o aluno perceba relações que

existem entre esse conteúdo. Seguindo essa premissa de pensamento, observamos, que na escola campo da pesquisa, os professores ensinam a proporcionalidade de forma isolada.

Em geral, não fazia, em suas aulas, relações dos conteúdos de proporcionalidade com outros conteúdos da matemática e com outras áreas do saber.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN

A aprendizagem em matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos, (BRASIL, 2001, p. 19-20).

Dessa forma, nossa proposta de investigação foi verificar a aprendizagem dos alunos em resolução de problemas envolvendo proporcionalidade, mas que tivesse alguma relação com outros conteúdos de matemática do ensino fundamental.

Por exemplo, no caso da função linear, que Lima *et al.* (2005), define pela fórmula  $f(x) = ax$ ,  $a \neq 0$ , é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade, que segundo esse autor é, talvez, o conhecimento matemático mais divulgado entre todos os povos. Uma proporcionalidade é uma função real, em que, para quaisquer  $c, x$  reais,  $f(cx) = cf(x)$  é tomada como proporcionalidade direta e  $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$ ,  $c \neq 0$ , proporcionalidade inversa. Em síntese: (Lima, 1997) diz que  $f(x)$  é diretamente proporcional à grandeza "x" quando existe um número "a" chamado constante de proporcionalidade, tal que  $f(x) = ax$  para todo  $x$  real.

Por outro lado, a proporcionalidade é definida por Vergnaud (1996), como sendo uma relação multiplicativa entre quantidades. Para Van de Walle (2009), a proporcionalidade é a declaração de igualdade entre duas relações proporcionais.

A proporcionalidade composta, Cardoso (2007) a define como sendo a que trata de questões com mais de duas grandezas, sendo todas variáveis.

Tendo em vistas essas hipóteses, Maranhão e Machado conjecturam que

A proporcionalidade é um tema indubitavelmente importante em matemática e outras Ciências em âmbito escolar, e em diversas situações da atividade humana. Por isso, o pensamento proporcional tem sido objeto de estudo em Educação Matemática e em suas especialidades, a Psicologia da Educação Matemática, há várias décadas (MARANHÃO; MACHADO, 2011, p. 142).

Nesse sentido, a aprendizagem dessa componente curricular favorece a interrelação entre as ideias matemáticas, isto é, além do aluno aprender matemática, passa a reconhecer a sua utilidade (NCTM, 2007).

O raciocínio proporcional não é sinônimo de proporcionalidade: é uma condição fundamental para que indivíduos compreendam os contextos, aplicações matemáticas e sejam capazes de relacioná-los à proporcionalidade. Para Lamon, o raciocínio proporcional,

Refere-se a detectar, expressar, analisar, explicar e oferecer evidências em apoio às afirmações sobre relações proporcionais. A palavra raciocínio sugere ainda que usemos a razão, o bom senso e uma abordagem cuidadosa para resolver problemas, em vez de arrancar números dos enunciados e cegamente aplicar regras e operações. [...] (associamos raciocínio) com processos mentais livres que exigem análise consciente das relações entre quantidades (LAMON, 2012, p. 4).

Dessa forma, pode-se conceber o raciocínio proporcional como um modelo matemático que abrange duas variáveis, múltiplas comparações e habilidade para reunir e processar várias informações.

Esse raciocínio facilita a compreensão das relações multiplicativas. Portanto, pode-se assegurar que desenvolve o cognitivo do aluno, dotando – o de ideias e de capacidade de elaboração de hipóteses, facilitando a criação de heurísticas que, por sua vez, facilitam a compreensão e coerência no trato com grandezas absolutas e relativas.

Para Lamon (2012), a grandeza absoluta é baseada em contagem e medidas direta de quantidades. E a relativa resulta da comparação entre grandezas de natureza às vezes diferentes, possibilitando ao aluno mensurar quantidades complexas e abstratas.

Em geral, os livros didáticos do ensino fundamental tratam apenas da resolução de exercícios e problemas usando as funções de tratamento, ou seja: quando as operações são realizadas dentro do próprio registros em que foi construído.

Nesse pensamento, Damm (2008) afirma que, se

[...] ele [o aluno] consegue fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático. Entretanto, não consegue fazer espontaneamente as conversões necessárias para a apreensão desse objeto. Essa apreensão passa a ser significativa a partir do momento em que o aluno consegue transitar em pelo menos dois tipos de registros semióticos diferentes (p.168).

Esse conhecimento é mobilizado pela representação mental que abrange desde a interiorização de um conjunto de conceitos, concepções que o sujeito possui do objeto até a representação semiótica que é a exteriorização da representação mental que funciona tanto com a comunicação, quanto com os meios para o desenvolvimento das atividades matemáticas.

Lefebvre (2001) sugere que a compreensão do objeto matemático se manifesta por meio da sua representação. Portanto, só é possível entender de fato o objeto matemático mediante a sua materialização. De acordo com esse autor, o objeto envolve três dimensões: a representação, o conceito e a entidade; exemplificando da seguinte forma,

[...] o conceito de “círculo”, [...], pode ser resumido por uma curva fechada na qual todos os pontos estão situados a uma distância igual a um ponto interior chamado centro. A entidade matemática é, para o filósofo Desanti, o que está apreendido pela consciência na forma de unidade. Enfim, as representações de um círculo são múltiplas, elas podem ser

simbólicas (sob a forma, por exemplo, de uma equação:  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ),  
linguística (a palavra círculo) ou, ainda, visual (desenho), (LEFEBVRE, 2001, p.155).

Retomando a teoria das representações semióticas, convém destacar que trabalhamos com resolução de atividades envolvendo conteúdos de proporcionalidade, cujas análises foram feitas usando-se as funções de tratamento de registos e de conversão de um registo em outro. E, desenvolvendo a aprendizagem desse objeto de estudo articulando a outros eixos temáticos da matemática.

### **Aspectos Metodológicos**

Trata-se de uma pesquisa qualitativa de intervenção, realizada no ano de 2018, junto aos estudantes do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública na cidade de São Luís/Maranhão/Brasil. E, para atender aos objetivos propostos, discutimos inicialmente com os professores desses alunos, em quatro momentos de 50 minutos, os textos: Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática e questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática, Duval (2007 e 2016); o papel dos registros de representação na aprendizagem matemática e a translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais, Moretti (2002 e 2007); registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos, Almouloud (2007) e registros de representação, Damm (2008) para que esses professores se apropriassem dos registos de representação semiótica e pudessem trabalhar, com os alunos, o ensino e aplicação da proporcionalidade utilizando essa teoria.

Nos baseamos também em Fiorentini e Lorenzato (2012), pois eles levantam a hipótese de que a pesquisa qualitativa se destaca em relação às outras em função de suas características: a fonte dos dados é o ambiente natural; o pesquisador é o instrumento principal; apresenta caráter descritivo/analítico e valoriza o processo e não apenas o resultado com enfoque indutivo.

Os dados da pesquisa constituíram-se das resoluções das atividades matemática aplicadas aos alunos e dos diálogos que tivemos com os alunos e professores. Supervisionados pelos pesquisadores, os professores ministraram 12 aulas de 50 (cinquenta) minutos cada uma, no período de setembro a novembro de 2018. Em seguida, procedeu-se as análises das competências e habilidades dos alunos quanto à apropriação do conteúdo de proporcionalidade e sua aplicação na resolução das atividades aplicadas.

Ao interrogarmos os professores quanto ao ensino de proporção e suas aplicações, eles informaram que já haviam ministrado esses conteúdos no sétimo ano do ensino fundamental, no

entanto, tinham se limitado às aplicações contidas no livro didático, não atentaram que poderiam relacionar com outros conteúdos de matemática de outros anos (séries) escolar.

Na primeira aula realizada em setembro começou-se a investigação aplicando-se uma atividade a 70 alunos do 9º (nono) ano do ensino fundamental, contendo 5 (cinco) questões que versavam sobre equações algébricas e funções lineares a uma variável real, conteúdo já visto pelos alunos. Eles tiveram 50 minutos para resolverem a atividade proposta. O objetivo foi de verificar se sabiam fazer relações com o conteúdo de números proporcionais.

As demais aulas, todas de 50 minutos, foram executadas por dois professores e acompanhadas pelos pesquisadores para que pudessemos analisar as resoluções das atividades produzidas pelos alunos, sobre proporcionalidade e suas conexões com outros conceitos matemáticos. Os conteúdos trabalhados foram: Razão, números proporcionais, equações de primeiro grau, função linear e geometria. Enfatizando as relações existente entre estes conteúdos, assim como, da necessidade de se conhecê-los e aplicá-los em outros conteúdos da matemática.

Nas intervenções, os pesquisadores trabalharam junto aos professores e seus alunos várias atividades de matemática envolvendo esses conteúdos ministrados. Após cada conteúdo desenvolvido aplicava-se uma lista de exercícios. Em que as questões eram elaboradas pelos pesquisadores com a participação dos professores, baseadas no conteúdo trabalhado em sala de aula, com o objetivo de promover a fixação da aprendizagem.

As listas de exercícios eram aplicadas separadamente nas duas salas de aulas pelos professores sob a supervisão dos pesquisadores, concogmitantemente, com isso facilitava a mediação professor, pesquisador e alunos.

### **Apresentação e Discussão dos dados da Pesquisa**

A discussão das atividades aplicadas aos alunos foi embasada em articulações didáticas entre os alunos, professores das classes e pesquisadores, por meio de abordagens exploratórias em que a resolução de exercícios e análise das situações foram trabalhadas.

Para se aprender um conteúdo de matemática, segundo Duval (1993), é necessário haver compreensão e domínio do objeto em discussão, saber trabalhar com propriedade, ao mesmo tempo, com pelo menos dois registros semióticos,

Em geral, para se construir a resolução de exercícios, tarefas, problemas, precisa-se equacioná-la matematicamente, observando o que é pedido no enunciado. De acordo com Damm (2007), é necessário que o aluno saiba fazer o levantamento dos dados relevantes na sentença dada e identificá-los para poder montar sua estratégia de resolução.

As análises das atividades aplicadas foram registradas no diário de bordo dos pesquisadores, pois assim facilitaria a eles emitir opiniões quanto à aprendizagem dos alunos pesquisados ao usarem na

resolução das atividades propostas a aplicação das funções de tratamento e de conversão entre registros.

Trabalhamos com várias atividades envolvendo proporcionalidade. No entanto, optamos por apresentar só algumas resoluções dessas atividades construídas pelos estudantes. E, para preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa, adotamos, respectivamente, os pseudônimos  $A1, A2, \dots, A70$ .

No Quadro 1, apresentamos um exemplo de conexão da proporcionalidade com o conteúdo de geometria, no qual foi requerido aos sujeitos fazer a conversão do registro de saída para uma representação figural e, em seguida, realizar as operações de tratamento no registro construído para encontrar a resposta. E que eles observassem a conexão existente entre o registro de partida e o registro de chegada.

**Quadro 1 – Atividade: conexão geometria e proporcionalidade**

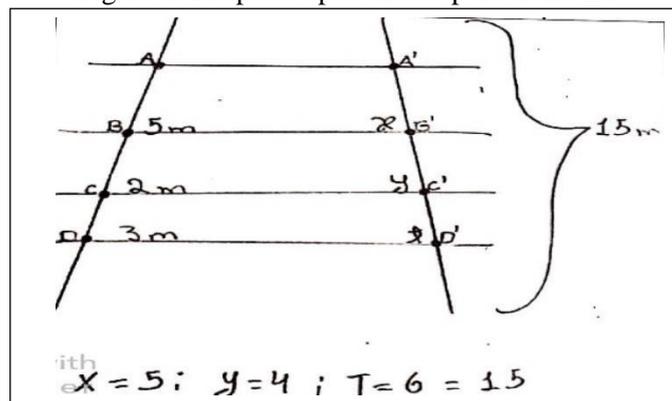
Um feixe de quatro retas paralelas é cortado por duas transversais  $t_1$  e  $t_2$ . A transversal  $t_1$  corta o feixe nos pontos A, B, C e D (de cima para baixo). A transversal  $t_2$  corta o feixe nos pontos  $A', B', C'$  e  $D'$  (de cima para baixo). Se

$\overline{AB} = 5m$ ,  $\overline{BC} = 2m$ ,  $\overline{CD} = 3m$  e  $\overline{A'D'} = 15m$ , então determinar as medidas de

Fonte: Arquivo dos autores (2018).

Inicialmente apresentamos na Figura 1, a solução construída pelo aluno  $A1$ , ele conseguiu fazer o registro figural das retas paralelas cortadas pelas transversais formando segmentos de retas proporcionais correspondentes. Entretanto, não conseguimos identificar que estratégia ele utilizou para chegar ao resultado.

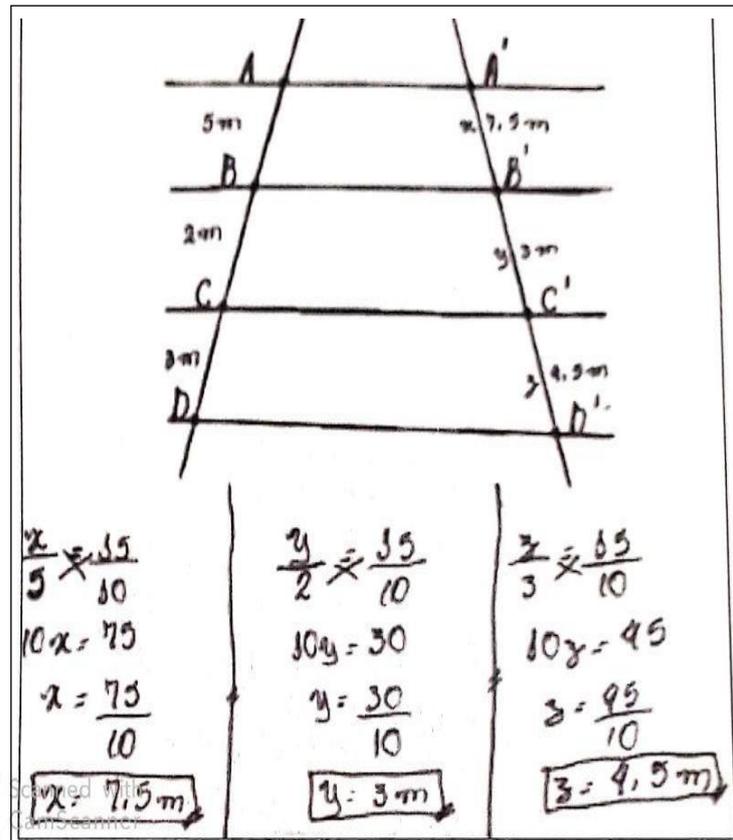
Figura 1: Resposta apresentada pelo aluno  $A1$



Fonte: Arquivos dos pesquisadores, (2018).

Na Figura 2, apresentamos a solução do aluno  $A22$ , essa escolha foi aleatória, pois a maioria dos outros alunos das salas construíram suas respostas semelhantemente a ele. Fez o esboço figural corretamente, assim como, conseguiu expressar a resposta corretamente.

Figura 2: Resposta apresentada pelo aluno  $A22$



Fonte: Arquivo dos pesquisadores, (2018).

Segundo Duval (2012), para haver aprendizagem é necessário que o estudante transite com segurança em pelo menos dois registros semióticos de um mesmo objeto de estudo, perfeitamente entendido por esses alunos. Pois, ao realizarem o tratamento dos registros construídos, aprimoraram os conhecimentos sobre o conceito de proporcionalidade e identificaram conexões entre a proporcionalidade e a geometria.

No Quadro 2, apresentamos outro problema que foi aplicado aos alunos, nosso objetivo foi mostrar para os alunos um exemplo de conexão da proporcionalidade com a física.

Quadro 2: Conexão da proporcionalidade com a física

Um móvel desloca-se sobre uma reta com a velocidade constante de 40m/s e leva 10 segundo para percorrer certa distância. Pergunta-se:

- Se a velocidade fosse de 80m/s, quanto tempo o móvel levaria para percorrer a mesma distância?
- As grandezas, velocidade e tempo, são diretamente ou inversamente proporcionais?

Fonte: Arquivo dos pesquisadores, (2018).

Em relação ao item a) alguns alunos intuitivamente observaram que se a velocidade aumentava o tempo gasto diminuía. Entretanto, quando faziam a igualdade entre as razões das grandezas dadas apresentaram dificuldades para chegar ao resultado. Dessa forma, os pesquisadores fizeram intervenções lembrando aos alunos que eles deveriam usar a proporção inversa, com essa explicação

muitos alunos conseguiram chegar ao resultado pedido. Na Figura 3 apresentamos as soluções dadas pelos alunos A22 e A15, para o item a).

Figura 3: Conexão entre proporcionalidade e física

Solução de A22

40 m/s → 10 s

80 m/s → 5 s

Solução de A15

40 - 10

80 - x

40x = 800

x =  $\frac{800}{40}$

x = 20

Fonte: Arquivo dos pesquisadores, (2018).

Embora, os pesquisadores tenham dito que os alunos deveriam usar a proporção inversa para resolver o problema dado, mesmo assim os alunos A22 e A15 não seguiram as orientações dos pesquisadores. Entretanto, intuitivamente o aluno A22 entendeu que a resposta correta seria  $t = 5s$ . Se a questão fosse objetiva, o aluno A15 teria também acertado, pois disse que seria  $x = 5s$ . No entanto observando os registros apresentados, ele não fez a simplificação correta, haja vista que  $80 \div 4 \neq 5$ .

A prática acadêmica e os diálogos com os alunos do 9º (nono) ano do Ensino Fundamental são fontes riquíssimas que, na maioria das vezes, não são registradas, quando da resolução de atividades de matemática. Quando há mediação, às vezes, confirma-se que a matemática é marcada por pragmatismo de que esta disciplina é de difícil compreensão por parte de muitos alunos.

No decorrer dessa pesquisa os pesquisadores ouviram vários depoimentos dos estudantes envolvidos na pesquisa, os quais relataram enfrentar dificuldades para compreender alguns conteúdos ministrados.

- Em sua maioria, afirmaram que, se os professores com os quais já tinham estudado, tivessem trabalhado com essa metodologia de ensino, com certeza teriam tido maior aprendizado.

Observamos que essa aversão pela disciplina pode refletir-se em dificuldades de aprendizagem, conseqüentemente influenciando o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Contudo, tal fato não deve ser generalizado.

Baseado nesse contexto, pedimos aos estudantes que relatassem, brevemente, as dificuldades que tinham em relação à matemática, ou a alguns conteúdos específicos, ao longo da trajetória estudantil.

Relatamos a seguir algumas dessas falas:

- Aluno A<sub>8</sub>: *Na minha vida estudantil tenho muitas dificuldades com a matemática, por isso, tiro muitas notas baixas. Sempre tive dificuldades com proporcionalidades. Mas, com este tipo de metodologia desenvolvidos por vocês, trabalhando com a conexão entre conteúdos, fica mais fácil para a aprendizagem dos mesmos.*

- Aluno A<sub>15</sub>: *Sempre gostei de matemática, tive excelentes professores; portanto, quero ser professor.*

*Acho que poderei contribuir com o ensino de matemática. Trabalhando com estes tipos de conexões ficou mais claro a importância da aprendizagem da matemática*

- Aluno A<sub>23</sub>: *Gosto de matemática, no entanto, nem sempre aprendi com clareza determinados conteúdos, um deles trabalhar com problemas envolvendo proporcionalidade. Também não tenho segurança em fazer gráfico de funções. Principalmente estudar matemática usando a interrelação de conteúdos.*

- Aluno A<sub>68</sub>: *Tenho dificuldades em mostrar meus conhecimentos matemáticos; não gosto de geometria. Mas, da forma como os conteúdos nos foi apresentado fica mais fácil aprender.*

- Aluno A<sub>58</sub>: *Estou me esforçando para aprender mais, mas pouco consegui em minha trajetória de aluna. Mas, agora acho que vou aprender mais.*

- Aluno A<sub>40</sub>: *Gosto de matemática, quero aprender mais, pois me atrapalho com gráfico de funções e com problemas que envolvem geometria. Estudando dando sentido à estas conexões vou aprender mais matemática.*

(Registros dos pesquisadores, 2018).

Esses depoimentos elevaram a importância de nossa pesquisa, pois, com o acesso a esse conjunto de informações teóricas sobre a importância da apreensão de proporcionalidade, desenvolvidas por meio dos registros de representação semiótica, nossa pesquisa estava ancorada na realidade dos alunos. Esse propósito de resolver problemas envolvendo proporcionalidade em conexão com outros conteúdos poderia contribuir para que eles enfrentassem os desafios matemáticos no dia a dia escolar. Percebemos que muitos alunos não apresentaram dúvidas quanto ao enunciado, embora alguns tenham colocado apenas a resposta final sem registrar os cálculos ou procedimentos utilizados para chegar ao resultado.

Todos os estudantes responderam ao problema proposto, fato marcante observado foi que alguns deles utilizaram heurísticas diferentes para construir as soluções. Com isso, demonstraram terem entendido a importância de se trabalhar conteúdos de matemáticas fazendo as conexões necessárias entre eles.

A seguir relatamos algumas falas desses estudantes em relação ao item a) do problema do Quadro 2.

- Os alunos A<sub>1</sub> e A<sub>63</sub>: *Afirmaram que, para resolver o problema proposto se utilizaram das igualdades entre as razões equivalentes.*

- Os alunos A<sub>12</sub> e A<sub>42</sub>: *Disseram que, para resolver, recorreram diretamente ao registro algébrico proporcional; aí ficou fácil, pois foi só escrever a resposta. Claro que observamos as mudanças de registros semióticos.*

(Registros dos pesquisadores, 2018).

Por outro lado, Vergnaud (2009) e Gitirana et al., (2014), levantam hipóteses de que essas estruturas multiplicativas permitem analisar situações cujo tratamento matemático implica em uma ou várias multiplicações.

Observamos que, do ponto de vista cognitivo, as dificuldades de alguns alunos não estavam concentradas só na falta de compreensão do conceito de proporcionalidade, pois, às vezes não conseguiam interpretar corretamente o que estavam lendo. Essa constatação vai ao encontro das ideias de Duval (2011), quando ele afirma que para haver compreensão se faz necessário que o aluno mobilize pelo menos dois tipos de representação semiótica e não confunda o objeto com sua representação.

Por outro lado, embora o estudante consiga trabalhar com registros distintos, faz-se necessário considerar o que afirma Almouloud (2007). Para ele, muitas das situações de ensino e de aprendizagem, em alguns conteúdos, não ocorrem, efetivamente, só nas operações com a matemática; às vezes são problemas advindos da mediação didática e da apropriação da linguística.

Com relação ao item b) do problema expresso no Quadro 2, ou seja: se as grandezas “velocidade” e “tempo” eram diretamente ou inversamente proporcionais? Alguns alunos, como, por exemplo, A15 e A22, responderam que as grandezas eram inversamente proporcionais. No entanto, os alunos A17 e A31 responderam que eram diretamente proporcionais. As respostas e justificativas são apresentadas na Figura 4, conforme protocolos.

Por outro lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) recomendam que, no desenvolvimento de atividades envolvendo o conteúdo proporcionalidade, é fundamental considerar as relações com outras áreas do conhecimento. O que ficou evidente para as alunas quando apresentaram a solução para a referida atividade.

Figura 4: Respostas apresentadas por alguns alunos para o item b) do problema do Quadro 2.

<p>A<sub>15</sub></p> <p>Não. Pois quanto maior a velocidade menor é o tempo</p>	<p>A<sub>17</sub></p> <p>Sim, porque com a proporção que a velocidade se altera o tempo vai diminuindo.</p>
<p>A<sub>22</sub></p> <p>Não. Porque de acordo com que a velocidade aumenta o tempo diminui.</p>	
<p>A<sub>31</sub></p> <p>São proporcionais, porque quanto maior a velocidade constante maior o tempo o percorrer.</p>	

Fonte: Arquivo dos pesquisadores (2018).

Dando sequência, no Quadro 3, apresentamos um problema de conexão da função linear com a proporcionalidade, com o objetivo de mostrar aos alunos mais um tipo de aplicação desse conteúdo.

Quadro 3: Conexão entre função e proporcionalidade

Numa frutaria o abacaxi é vendido por unidades, e cada unidade custa três reais e cinquenta centavos. Pense nestas variáveis:  
 $x$  correspondendo à quantidade de abacaxis vendidos e  $y$  o custo total pago por  $x$  abacaxis.

a) Descreva, através de uma fórmula, a relação entre custo total e a quantidade ( $x$ ) de abacaxis vendidos.

b) Pode-se afirmar que o valor pago e a quantidade de abacaxis vendidos são diretamente proporcionais?

Fonte: Arquivo dos pesquisadores, (2018).

Quanto ao primeiro item do problema todos os alunos responderam corretamente, não apresentaram dificuldades em representar a função linear, que definiram por:  $y = 3,5x$ .

No item b) solicitamos dos alunos a compreensão se se tratava de grandezas diretamente proporcional. Todos os alunos responderam que sim, no entanto, as justificativas apresentadas foram bem diversificadas. Na figura 5, apresentamos algumas dessas afirmações.

Figura 5: soluções apresentadas pelos alunos.

Em resposta ao primeiro item da atividade proposta aos alunos eles construíram a função $y = 3,5x$ .	Esta função descreve $y$ como uma função de $x$ .								
Ainda em relação ao item a) com o registro algébrico $y = 3,5x$ construíram a tabela	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th><math>x</math></th> <th><math>y</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>3,5</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>35</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>52,5</td> </tr> </tbody> </table>	$x$	$y$	1	3,5	10	35	15	52,5
$x$	$y$								
1	3,5								
10	35								
15	52,5								
Com relação ao item b) expressamos algumas resoluções									
<p><i>Sim, a cada unidade aumenta os valor total.</i></p> <p><i>Sim. Pois dependendo da quantidade o valor aumenta.</i></p> <p><i>Sim, pois dependendo da quantidade de abacaxis vendidos tem um determinado valor a pagar.</i></p>	<p>Entretanto, não atentaram que poderiam transcrever a resposta na forma de igualdade entre dois registros numéricos (duas razões diretamente proporcionais).</p> $\frac{10}{15} = \frac{35}{52,5}$								

Fonte: arquivo dos pesquisadores, (2018).

Algumas das justificativas dos alunos expressas na forma de registro semiótico com linguagem natural não estavam totalmente corretas. No entanto, na tabela apresentada havia proporcionalidade, pois estava claro a existência da igualdade entre duas razões.

Focando nas análises buscamos também verificar, em cada atividade de matemática desenvolvida, a operação utilizada na resolução e o tipo de situação, as grandezas e os valores numéricos envolvidos. Nesse contexto, constatamos que o conjunto dos problemas resolvidos pelos alunos contemplou os conteúdos envolvendo proporcionalidade e suas conexões com outros ramos da matemática, fator relevante para o aprofundamento das competências dos sujeitos envolvidos nessa e futuras pesquisas sobre esse assunto.

Convém ressaltar que para os estudantes realizarem as atividades propostas, mobilizaram vários tipos de registro, dentre eles: o registro linguagem natural, o algébrico e o numérico, de acordo com o enunciado de cada problema.

Constatamos que a maioria dos alunos conseguiram trabalhar com conexões entre os conteúdos matemáticos e entre outras áreas do conhecimento tendo, portanto, se apropriado dos conteúdos ensinados pelos professores. Por outro lado, quando os alunos aprendem conceitos matemáticos isolados de um contexto, rapidamente esquecem o seu significado e sintomatizam dificuldades para fazerem conexões com outras matemáticas.

### **Considerações Finais**

Consideramos que esta pesquisa contribuiu para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, tanto na compreensão dos conteúdos ensinados envolvendo conexões da proporcionalidade com outros conteúdos matemáticos, quanto na resolução de problemas usando registros de representação semiótica e heurísticas de resolução. Os objetivos foram alcançados, pois, com a exploração das atividades propostas de ensino, facilitou a compreensão e desenvolveu habilidades que ajudaram os alunos na resolução das atividades desenvolvidas.

Ao explorarmos as atividades envolvendo a proporcionalidades, tínhamos como meta a produção de conhecimentos e desenvolver habilidades matemáticas que permitisse aos estudantes descobrir novas maneiras de resolver um problema matemático. De acordo, com os resultados apresentados, os objetivos foram alcançados.

Observamos, também, a preocupação dos alunos, ao resolverem uma atividade: primeiro levantar as variáveis envolvidas na sentença matemática, cuidados ao equacionar e só depois montar uma estratégia de resolução, de forma a poder desenvolver um raciocínio lógico para construir a solução do problema em discussão.

Esse raciocínio está de acordo com Damm (2007), quando suscita a hipótese de que é necessário levantar essas informações antes de resolver um problema, pois, quando as informações acerca dos elementos – incógnitas e os números - estão indicados claramente, será facilitada a construção da resposta.

A maioria dos alunos conseguiram mobilizar, pelo menos, dois registros semióticos: algébrico e numérico, além de fazerem a conversão do registro linguagem natural para os registros citados e operá-los com segurança, consideramos que ocorreu aprendizagem. Hipótese observada e constatada nesta pesquisa. Por outro lado, Duval (2014) afirma que, para haver compreensão em Matemática, é exigido que o aluno coordene muitos sistemas de representação semiótica e, também, a língua natural, mesmo que não sirva para calcular.

Em suma: a pesquisa revelou que grande parte dos participantes se mostraram capazes de trabalhar, com habilidade, a conversão e o tratamento de registros, e com conexões entre a proporcionalidade e outros conteúdos de matemática.

Observou-se ainda que, alguns alunos demonstraram dificuldades em trabalhar com a conversão do registro figural para o registro algébrico, principalmente quando se trabalhou com geometria plana. Entretanto, após conseguiram fazer a conversão dos registros as operações de tratamento dentro do registro mobilizado transcorria normalmente

Contudo, nada é acabado, outras pesquisas poderão ser realizadas seguindo essa linha de raciocínio. Além disso, convém destacar que os problemas da Educação do Brasil estão distantes de serem resolvidos.

Recebido em: 24/08/2019  
Aprovado em: 10/04/2021

## Referências

- ALMOULOU, S. A. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. 3. ed. Campinas- SP: Papirus, 2007, p. 125-147.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática 1º e 2º ciclos**: Brasília: MEC, SEF, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª à 8ª séries)**. Brasília: MEC, SEF, 2001.
- BRUNER, J. S. **O processo da educação**. São Paulo: Nacional, 1978.
- CARDOSO, L. F. **Dicionário de Matemática**. Rio de Janeiro: Lexikon, 2007.
- COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. AVALIAÇÃO: um processo integrado ao ensino e à aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. **ACTA SCIENTIAE – Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Canoas, v. 17, n. 2, p. 1-17, 2015.
- DAMM, R. F. Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. 3. ed. Campinas/SP: Papirus, 2007, p. 35-47.

- DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3. ed. revista. São Paulo: EDUC, 2008. p. 167-188.
- DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnements cognitifs de la pensée. In: DUVAL, R. (Org.). **Annales de didactique et Sciences Cognitives**. Strasbourg: ULP Irem, v. 5, 1993, p. 37-65.
- DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. 3. ed. Campinas -SP: Papirus, 2007, p. 11-33.
- DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Física, 2009.
- DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas**. CAMPOS, Tânia M. M. (Org.). Tradução: Marlene Alves Dias. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.
- DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Mércles T. Moretti. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v. 7, n. 2, 2012, p. 266-297.
- DUVAL, R. Rupturas e Omissões entre Manipular, Ver, Dizer e Escrever: História de uma Sequência de Atividades em Geometria. Tradução Celia F. Brandt e Mércles T. Moretti. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Orgs.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Unijuí, 2014, p.15 - 38.
- DUVAL, R. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, 2016, p. 1-78.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigações em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. revista. Campinas: Autores Associados, 2012.
- GITIRANA, V. *et al.* **Repensando multiplicação e divisão**: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.
- LAMON, S. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3th edition. New York: Routledge, 2012.
- LEFEBVRE, M. **Images, écritures et espace de médiation: étude anthropologique des pratiques graphiques dans une communauté de mathématiciens**. 2001. 224 f. Thèse (Doctorat em Sciences de l'Information et de la Communication) - Université Louis Pasteur, Strasbourg I, Strasbourg, França, 2001.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**: coleção do professor de Matemática. Vol. 1, 2ª ed. Rio de Janeiro, Graefex, 2005.
- MARANHÃO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular do Estado do Maranhão – Matemática: Ensino Fundamental – 5ª a 8ª série**, 2000.
- MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revistas**, n. 1, p. 141-156, Editora UFPR, 2011.

MORETTI, M. T. A Translação como Recurso no Esboço de Curvas por meio da Interpretação Global de Propriedades Figurais. In: MACHADO, S. D. A. (org). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. 3. ed. Campinas - SP: Papirus, 2007, p. 149-160.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. **Contrapontos**. Ijuí, ano 2, n.6, 2002, p. 423-437.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Lisboa: APM, 2007.

TINOCO, L. A. A. **Razões e Proporções**. Instituto de Matemática / UFRJ – Projeto Fundão – SPEC/PADCT/CAPES - Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

VALE, I; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A. Ensinar matemática com resolução de problemas. **Quadrante**. Lisboa/Portugal, v. XXIV, n.2, 2015, p. 40-60.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, G. A. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 155–191.