emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2020v7ip217-238

Processos do pensamento matemático avançado revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais[1]

Advanced mathematical thinking processes revealed in resolutions of activities involving rational numbers

Marcia Viaro Flôres[2]

Jussara Aparecida da Fonseca[3]

Eleni Bisognin[4]

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar quais processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) são mobilizados por estudantes de um curso de formação inicial de professores de Matemática, ao realizarem tarefas exploratórias envolvendo alguns aspectos da representação de números racionais. Para isso, foi utilizada uma abordagem qualitativa, pautando a coleta de dados na produção escrita dos participantes, por meio da proposição de tarefas relacionadas à representação decimalfinita de números racionais. Como resultado, verificou-se que os estudantes mobilizaram diferentes aspectos do processo de representação (mudança e tradução) do PMA, relacionados aos conceitos envolvidos. No entanto, em relação aos processos de sintetização, generalização e abstração, foram recorrentes as dificuldades apresentadas. Destacamos a importância de propor atividades que permitam aos estudantes mobilizarem os processos do

1. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
2. Doutoranda Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana. Professora do Instituto Federal Farroupilha. E-mail: marcia.flores@iffarroupilha.edu.br
3. Doutoranda Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana. Professora do Instituto Federal Farroupilha. E-mail: jussara.fonseca@iffarroupilha.edu.br
4. Doutora – UFRJ. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana. E-mail: eleni@ufn.edu.br

PMA, principalmente no que tange ao desenvolvimento da abstração, pois ela deve ser uma das preocupações quando se trata da Matemática em um nível superior.

Palavras-chave: *Pensamento Matemático Avançado; Números Racionais; Representação Decimal.*

ABSTRACT

The present work aims to analyze which processes of Advanced Mathematical Thinking (AMT) are mobilized by students of an initial training course of Mathematics teachers, when performing exploratory tasks involving some aspects of their presentation of rational numbers. For this, we use a qualitative approach, guiding our data collection in the written production of the participants from the proposition of activities related to the finite decimal representations of the rational numbers. As a result, we verified that the students mobilized different aspects of the process of representation (change and translation) of the AMT, related to the concepts involved. However, in relation to the processes of synthesis, generalization and abstraction, the difficulty presented was recurrent. We emphasize the importance of proposing activities that allow students to mobilize AMT processes, especially regarding the development of abstraction, as this should be one of the concerns when it comes to Mathematics at a higher level.

Keywords: *Advanced Mathematical Thinking; Rational Numbers; Decimal Representation.*

1. Introdução

O estudo dos números racionais tem papel relevante na formação matemática dos estudantes. Damico (2007), apoiando-se nos resultados de pesquisas sobre o assunto, justifica essa importância sob quatro perspectivas: educacional, prática, psicológica e matemática. A perspectiva educacional é devida a presença dos números racionais no currículo de Matemática desde os anos iniciais da Educação Básica; a prática, é oriunda da relação entre a habilidade de trabalhar com esses conceitos e a capacidade dos alunos resolverem problemas do mundo real; a psicológica, se refere ao fato dos números racionais serem um campo conceitual rico, a partir do qual se desenvolvem estruturas cognitivas mais complexas e a matemática, remete ao papel dos números racionais como uma base sólida, sobre a qual se apoiam outras estruturas matemáticas.

Um dos aspectos relevantes no estudo dos números racionais são suas diferentes representações (decimal, fracionária, pictórica e percentual), assim como o entendimento da conversão entre tais representações, visto que esse processo é essencial na resolução de diversas situações que se apresentam com o uso dos números racionais.

Em relação à transformação de um número racional na forma fracionária para a decimal finita ou infinita e vice-versa, não é raro encontrarmos alunos que realizam processos de transformação de maneira mecânica, utilizando apenas uma regra mnemônica, sem compreensão do princípio matemático que justifica o princípio utilizado. Todavia, a compreensão da justificativa e/ou do conceito matemático que origina um dado resultado é imprescindível para a construção do conhecimento matemático em todos os níveis de ensino, em especial, nos cursos de formação inicial de professores.

Com o intuito de explorar alguns aspectos dessas representações, de forma a possibilitar ao aluno a percepção dos conceitos matemáticos envolvidos com vistas à elaboração de justificativas para os processos realizados, elaboramos uma sequência de tarefas exploratórias. A mesma envolveu a representação decimal finita, com destaque para a condição necessária e suficiente que fundamenta o processo de transformação de um número racional na forma fracionária para a decimal finita.

As tarefas elaboradas vão ao encontro dos processos do Pensamento Matemático Avançado, propostos por Dreyfus (2002): representação e abstração, os quais fundamentam as análises posteriores. No que segue ambos os processos, bem como seus respectivos subprocessos, serão melhor explanados.

Acreditamos que a utilização de tarefas exploratórias,na perspectiva proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), favorece o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, visto que possibilitam ao aluno situações em que deve observar, elaborar e testar conjecturas, a partir de padrões e regularidades. Com essa prática, deixamos de apresentar o conhecimento matemático como um algo pronto, para possibilitar ao aluno sua descoberta.

Nesse contexto, concordamos com Gereti e Savioli (2015, p. 221), ao defenderem que “estudantes devem ser conduzidos para desenvolverem os processos do Pensamento Matemático Avançado, uma vez que alguns professores ainda ensinam aspectos matemáticos mais práticos, seguindo a sequência teorema-prova-aplicação".

Assim, a partir do exposto, buscamos neste trabalho analisar que processos do Pensamento Matemático Avançado são mobilizados por alunos de um curso de formação inicial de professores de Matemática, ao realizarem tarefas exploratórias envolvendo aspectos da representação decimal finita de números racionais.

2. Pensamento Matemático Avançado

Uma das temáticas que vem sendo explorada em estudos voltados aos processos de ensino e aprendizagem matemática na Educação Básica e no Ensino Superior é o Pensamento Matemático Avançado. Carmo e Igliori (2017) investigam esse cenário, a partir da realização de uma investigação com o objetivo de analisar como noções do Pensamento Matemático Avançado estão sendo utilizadas em pesquisas em nível de pós-graduação na área de Educação Matemática.

Com a análise do *corpus* da pesquisa, os autores constataram que a maioria das investigações se voltaram para o Ensino Superior e tiveram caráter teórico (pesquisa documental). Além disso, concluíram que "a transição entre pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançado têm ocasionado dificuldades de aprendizagem para muitos estudantes de Educação Básica e Ensino Superior" (CARMO; IGLIORI, 2017, p. 110).

Mas o que diferencia o Pensamento Matemático Avançado do Pensamento Matemático Elementar? Para Tall (2002), a possibilidade de definição formal e dedução é um fator que os distingue, sendo que a passagem do elementar para o avançado envolve uma transição:

> da descrição à definição, do convencimento à prova, de maneira lógica com base nessas definições. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva [...]. É a transição da coerência da matemática elementar à consequência da matemática avançada, baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir através de deduções formais[5] (TALL, 2002, p. 20).

5. That from *describing* to *defining*, from *convincing* to *proving* in a logical manner based on those definitions. This transition requires a cognitive reconstruction [...]. It is the transition from

Dreyfus (2002) assinala que não há uma distinção clara entre os processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado e no Elementar. É possível pensar em conceitos matemáticos avançados de forma elementar e reciprocamente. Apesar da matemática avançada estar mais voltada às abstrações e deduções, conforme o autor, o que diferencia os dois tipos de pensamentos é a complexidade e como ela é tratada.

Enquanto Tall (2002) aponta que o Pensamento Matemático Avançado se desenvolve nos anos finais do Ensino Médio e no Ensino Superior, Dreyfus (2002) destaca que ocorre desde os anos iniciais da Educação Básica, tendo relação direta com a forma que a complexidade é gerida pelo sujeito. Por exemplo, para uma criança, o valor posicional de um algarismo, na construção do conceito de número, apresenta um grau de complexidade que será tratado de forma diferente por um adolescente.

Tall (2002) reconhece o Pensamento Matemático Avançado como um processo criativo e não apenas em termos de dedução e prova. Nas palavras do autor, o ciclo completo da atividade no Pensamento Matemático Avançado vai "do ato criativo de considerar um contexto problemático na pesquisa matemática que leva à formulação criativa de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova[6]" (p. 3, tradução nossa).

Para Dreyfus (2002), o Pensamento Matemático Avançado, assim como o Elementar, consiste em uma interação dos processos de representação e de abstração que se complementam. A representação envolve três etapas intrinsecamente relacionadas: o processo de representação, a mudança e a tradução de diferentes representações e a modelagem. Por sua vez, a abstração é baseada em dois subprocessos indissociáveis: generalização e sintetização.

De acordo com o autor, o primeiro subprocesso engloba a representação simbólica, a representação mental e a visualização. A representação com a utilização de símbolos é importante, mas também

---

the *coherence* of elementar mathematics to the *consequence* of advanced mathematics, based on abstract entities which the individual must constructo through deductions from formal definitions.

6. From the creative act of considering a problem context in mathematical research that leads to the creative formulation of conjectures and on to the final stage of refinement and proof.

deve envolver as relações entre o signo e o significado, o que, muitas vezes, tem sido negligenciado no ensino de Matemática (DREYFUS, 2002). Já as representações mentais são o cerne para aprender e pensar em Matemática. Como dependem das relações que cada um faz com aquilo que tem em sua mente, representações mentais de um mesmo conceito podem variar de indivíduo para indivíduo.

A visualização é o processo que possibilita a existência das representações mentais. SegundoKaput (1987, apud DREYFUS, 2002) uma representação mental depende de um sistema de representação, ou seja, de artefatos concretos que podem ser materialmente realizados. Desse modo, um mesmo conceito matemático pode admitir várias representações mentais.

Entretanto, o fato de um sujeito apresentar várias representações de um mesmo conceito não é suficiente para garantir a flexibilidade na utilização deste na resolução de problemas. É necessário que saiba integrá-las adequadamente e, ainda, que consiga realizar o processo de mudança e de tradução de diferentes representações. Esse processo de mudança de representação está intimamente relacionado com a noção de tradução, o qual tem como significado a passagem da formulação de um problema matemático de uma representação à outra (DREYFUS, 2002).

O último subprocesso da representação é a modelagem. Dreyfus (2002) explica que, normalmente, a modelagem se refere à determinação de uma representação matemática para um objeto ou processo não matemático. De certo modo, os processos de modelação e de representação são análogos, mas em níveis distintos. Ao modelar, a situação é física, e o modelo é matemático; ao representar, o objeto a ser representado é uma estrutura matemática, e o modelo, uma estrutura mental.

Por sua vez, a abstração está vinculada a generalização e a sintetização. O processo de generalizar refere-se à capacidade de “[...] derivar ou induzir a partir de particularidades, identificar semelhanças, expandir domínios de validade[7]” (DREYFUS, 2002, p. 35, tradução nossa). É por meio do processo de generalização que se realiza uma transição de casos particulares para o geral.

---

[7] [...] to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity.

O autor explica que a sintetização é a combinação ou composição de diferentes partes, de modo a formar um todo. Sintetizar, elencando relações e conexões entre conceitos, faz parte da rotina do professor. Entretanto, na prática de sala de aula, poucas atividades são pensadas de maneira a direcionar o aluno ao processo de sintetização de diferentes aspectos de um conceito. Assim, sintetizar acaba sendo uma atividade do professor e não do aluno.

Abstrair é um processo em que se busca "a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, a partir de propriedades e relações entre objetos matemáticos[8]" (DREYFUS, 2002, p. 37, tradução nossa). Nessa construção mental, o aluno deve atentar para as estruturas que fazem parte do conceito abstrato, abandonando aquelas que são irrelevantes, permitindo, dessa maneira, uma redução da complexidade da situação proposta.

Logo, constata-se que a generalização, a sintetização e a abstração estão intimamente ligadas. Entretanto, de acordo com o autor, nem a generalização nem a sintetização exigem as mesmas estruturas cognitivas que a abstração. Enquanto a generalização envolve uma expansão da estrutura do conhecimento, a abstração abrange uma reconstrução mental.

Assim, entre os processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado, o mais importante é a abstração. Para o autor, o aluno que desenvolve essa habilidade, atinge um nível avançado de pensamento matemático. E mais, alcançar a capacidade de abstrair pode ser o objetivo mais importante da Educação Matemática Avançada.

3. Procedimentos metodológicos

O presente trabalho foi desenvolvido em uma abordagem qualitativa, seguindo a perspectiva da investigação matemática em sala de aula, proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 23), a qual pode ser conceituada como uma atividade de ensino e de aprendizagem que "ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa".

8. The building of mental structures from mathematical structures, i.e. from properties of and relationships between mathematical objects.

Conforme os autores, ao se empregar as investigações matemáticas em sala de aula, é realizada uma aproximação do aluno com a natureza da construção do conhecimento matemático, já que nesse cenário o educando é instigado a atuar como um matemático, formulando e verificando conjecturas, procurando regularidades e generalizações. Isso pode levar a níveis graduais de generalização e de abstração.

Os sujeitos participantes do estudo foram três estudantes de um curso de licenciatura em Matemática de um Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, os quais serão identificados como aluno A, B e C. Os três alunos estavam cursando a disciplina de Análise Matemática.

A coleta de dados se pautou na produção escrita dos participantes, obtida a partir da aplicação de uma sequência de tarefas exploratórias, abordando aspectos da representação decimal finita dos números racionais. No próximo tópico, as tarefas serão detalhadas, bem como as respectivas resoluções apresentadas pelos participantes, acompanhadas de discussões e reflexões suscitadas a partir delas, com base no aporte teórico do Pensamento Matemático Avançado.

4. Análise e discussão dos resultados

A primeira tarefa consistia em uma tabela, na qual a partir da representação fracionária de um número racional, o estudante deveria indicar a forma decimal deste número, a fatoração do denominador da fração e os fatores primos utilizados na fatoração. Como exemplo, no Quadro 1 apresentamos as informações para o número $\frac{1}{2}$. Além desse, também foram solicitados os mesmos itens para os números racionais $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{5}{11}, \frac{1}{80}$ e $\frac{1}{25}$.

Quadro 1. Enunciado da primeira tarefa

Tarefa 1

Complete a tabela com as informações solicitadas.

Forma fracionária	Forma decimal	Fatoração do denominador	Conclusões: Fator (es) primo(s) do denominador
$\frac{1}{2}$	0,5 (finita)	2 = 2	2

Fonte: elaborado pelas autoras

Nesta tarefa, esperávamos a manifestação do processo de mudança de representação, característica do PMA, uma vez que números racionais, na forma fracionária, deveriam ser escritos na forma decimal, entendendo que se tratava do mesmo objeto matemático, escrito de duas formas distintas. Pelas respostas apresentadas, detectamos que os três alunos não apresentaram dificuldades na realização da tarefa, visto que completaram a tabela corretamente, dando indícios das características desse subprocesso envolvido.

Na sequência, a segunda tarefa estava relacionada à primeira, como indicado no Quadro 2. Em sua resolução, esperávamos que os participantes identificassem que os números dados na primeira tarefa, que apresentaram uma representação decimal finita tinham, na representação fracionária, o denominador com fatores 2 e/ou 5.

Quadro 2. Enunciado da segunda tarefa

Tarefa 2

Quais os números racionais apresentados na tabela têm uma representação decimal finita? Você notou algum padrão nesses números?

Fonte: elaborado pelas autoras

A identificação de padrões, apesar de não ser descrita por Dreyfus no PMA, faz parte do processo de generalização, conforme afirma Vale (2013, p. 71), "'ver' um padrão é necessariamente o primeiro passo na exploração do padrão. [...] 'ver' é uma componente importante da generalização". Cabe destacar que "ver", para a autora, vai além do que é percebido pelo sentido da visão. Nesse contexto, "ver" se refere à visualização, ou seja, envolve os componentes mentais os quais são mobilizados na identificação de um padrão.

Todos os participantes apresentaram a lista de números corretamente. Quanto ao padrão observado, as três respostas foram distintas, o que nos leva a inferir que o processo de identificação de padrão é bem mais complexo. O aluno A não respondeu ao questionamento, o aluno B respondeu de forma correta, e o aluno C apresentou uma explicação parcial, a qual pode ser visualizada na Figura 1.

Figura 1. Resposta do Aluno C para a segunda tarefa

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{80}$; $\frac{1}{25}$; *Os denominadores pares ;
* Denominadores múltiplos de "5" (os terminados em Zero se encaixam em ambas situações);

Fonte: arquivo das autoras

A explicação dada pelo aluno C não está incorreta, porém é insuficiente para garantir a inclusão ou exclusão de números na lista de racionais que apresentam representação decimal finita. Por exemplo, na tabela, constava o número $\frac{1}{6}$, que possui denominador par, contudo ele não faz parte da lista de números indicada, visto que apresenta representação decimal infinita.

Para a terceira tarefa, foi solicitado aos estudantes que completassem uma tabela em que, a partir de números racionais na forma fracionária, deveriam: determinar o resultado da divisão do numerador pelo denominador; encontrar uma fração equivalente, cujo denominador fosse uma potência de 10, destacando o fator utilizado para determinação da equivalência e também a representação decimal da nova forma fracionária. No Quadro 3 apresentamos um exemplo do preenchimento da tabela para o número $\frac{1}{4}$. Além de $\frac{1}{4}$, foi solicitado aos estudantes que preenchessem a tabela com as informações para os números $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{3}{50}, \frac{7}{20}, \frac{4}{200}, \frac{25}{40}, \frac{3}{625}$.

Quadro 3. Enunciado da terceira tarefa

Tarefa 3

Complete a tabela a fim de obter uma fração cujo denominador seja uma potência de 10, destacando suas conclusões.

Forma fracionária	Divisão	Denominador como potência de 10	Forma decimal	Conclusões
$\frac{1}{4}$	$1 \div 4 = 0{,}25$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \frac{1.5^2}{2^2.5^2} = \frac{25}{10^2}$	0,25	Multiplicamos o denominador por 5^2

Fonte: elaborado pelas autoras

Novamente, compreendemos que o processo de mudança de representação permeava a resolução da tarefa, bem como a tradução entre as representações, já que o estudante deveria ser capaz de transitar entre as representações fracionárias equivalentes para o número racional e, ainda, entre representações fracionárias e decimais do mesmo número.

Nas resoluções apresentadas, foi possível observar que os estudantes não apresentaram dificuldades, manifestando o processo de mudança de representações e de tradução entre elas, tanto no que se refere à mudança da representação fracionária para a decimal, quanto nas representações fracionárias equivalentes.

Prosseguindo, apresentamos a quarta tarefa, que consistia na generalização das observações feitas na resolução da tarefa anterior. Essa foi dividida em três itens, como está indicado no Quadro 4.

Quadro 4. Enunciado da quarta tarefa

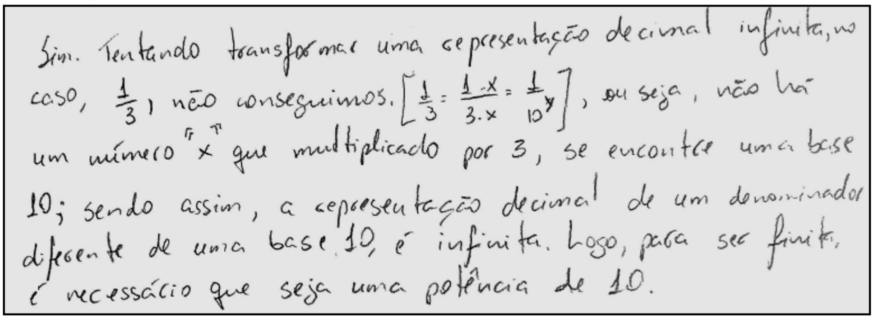
Tarefa 4
a) Observando a tabela, você percebeu alguma semelhança entre os denominadores dos números apresentados? Se sim, qual (is)?
b) Considere a seguinte afirmação: “Para que um número racional tenha uma representação decimal finita, é necessário que o denominador seja uma potência de 10.” Essa afirmação é verdadeira? Por quê?
c) Sempre se pode escrever um número racional com representação decimal finita como uma fração de denominador potência de 10? Justifique.

Fonte: elaborado pelas autoras

No primeiro item, o objetivo era que os alunos percebessem que números racionais que apresentam forma decimal finita possuem denominadores com fatores 2 e/ou 5. Analisando as resoluções, verificamos que os alunos A e B indicaram respostas bem próximas, destacando os fatores primos 2 e 5 na composição dos denominadores. Por sua vez, o aluno C, novamente, apresentou a explicação sobre denominadores pares e múltiplos de 5, como apresentado na resolução da segunda tarefa. Nesse caso, notamos que os estudantes foram capazes de identificar o padrão dos fatores primos que compõem os denominadores, diferentemente do que aconteceu na segunda tarefa. É possível que a tabela da terceira tarefa, da forma como foi proposta, tenha contribuído para essa identificação.

No item seguinte, os estudantes deveriam julgar a afirmação como verdadeira ou falsa, argumentando sobre sua escolha. Nesse tópico, foram encontradas respostas variadas. O estudante A apenas respondeu que a afirmação era verdadeira, sem apresentar justificativa. Já aluno B, não respondeu claramente se a afirmação era verdadeira ou falsa, mas, pela explicação produzida, ficou subtendido que a considerou verdadeira, pois afirmou que o denominador sempre terá os fatores primos 2 e 5, logo, com a multiplicação, sempre haverá uma potência de 10. Por fim, o estudante C também considerou a afirmação verdadeira, justificando que números racionais com representação decimal infinita não podem ser escritos na forma fracionária em que denominadores sejam potências de 10 (Figura 2).

Figura 2. Resposta do Aluno C para o segundo item da quarta tarefa


Sim. Tentando transformar uma representação decimal infinita, no caso, $\frac{1}{3}$, não conseguimos. $\left[\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot x}{3 \cdot x} = \frac{1}{10^y}\right]$, ou seja, não há um número "x" que multiplicado por 3, se encontre uma base 10; sendo assim, a representação decimal de um denominador diferente de uma base 10, é infinita. Logo, para ser finita, é necessário que seja uma potência de 10.

Fonte: arquivo das autoras

Detectamos que, apesar de os estudantes terem preenchido a tabela de forma correta e chegado às conclusões sobre as multiplicações realizadas nos denominadores, não foram capazes de observar que o número racional, na sua representação fracionária, não precisa, necessariamente, ter o denominador como potência de base 10, basta que ele possa ser transformado em uma representação equivalente e com essa característica. Entendemos que os estudantes apresentaram dificuldades nessa identificação de padrão, não alcançando o processo de síntese necessário para refutar a afirmação feita.

O terceiro item desta tarefa buscava indícios do PMA, focado, especificamente, no processo de generalização. Nas análises, notamos que o estudante A não respondeu e que os alunos B e C responderam afirmativamente, produzindo as respectivas explicações: "basta multiplicar o fator do denominador por um número na potência desejada para que a divisão seja exata ou melhor que dê a dízima finita" e "a divisão de um número qualquer por uma potência de 10 sempre será um número finito, pois, conforme os padrões apresentados, os números racionais finitos apresentam base 2 ou 5 em seus denominadores". Nesse sentido, compreendemos que ambos produziram, parcialmente, a generalização pedida, já que apresentaram certa confusão em termos de escrita e parecem ter se baseado na tabela completada por eles ao elaborarem suas justificativas.

A quinta tarefa buscou verificar a capacidade de generalização dos resultados obtidos, bem como observar como os estudantes formalizam esses resultados. Essa tarefa também foi dividida em itens, procurando auxiliar na generalização dos padrões encontrados (Quadro 5).

Quadro 5. Enunciado da quinta tarefa

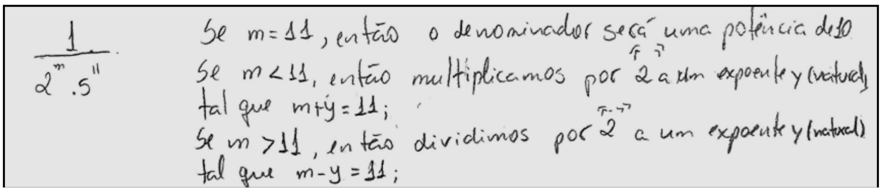
Tarefa 5
Considere o número $\frac{1}{2^9.5^{11}}$:
a) Por quanto deveríamos multiplicar o número $\frac{1}{2^9.5^{11}}$ para obter uma fração cujo denominador seja uma potência de 10?
b) E, se no lugar do expoente 9, colocássemos um número m natural qualquer, como ficaria essa multiplicação?
c) O valor que se deve multiplicar pode mudar dependendo do valor de m? Explique como.

Fonte: elaborado pelas autoras

O primeiro item explorava o processo de mudança de representação, a partir da percepção de qual multiplicação deveria ser realizada para obtenção da fração equivalente, com denominador com potência de 10. Analisando as resoluções, percebemos que o estudante A não respondeu; já os alunos B e C responderam corretamente, ao afirmarem que tanto o numerador quanto o denominador deveriam ser multiplicados por 2^2.

Quanto ao segundo item, procuramos, mais uma vez, explorar o processo de mudança de representação e a capacidade dos estudantes observarem as diferentes situações que podem ocorrer dependendo do valor de *m*. Nesse questionamento, percebemos que o estudante A não respondeu e o estudante B parece não ter compreendido o que era pedido na questão, apresentando apenas a expressão $\frac{1}{2^m.5^{11}}$, sem nenhuma explicação. Já o aluno C produziu uma explicação para a situação. Essa levou em consideração as três possibilidades para o valor de *m*, em comparação ao outro expoente presente nos fatores do denominador e como cada uma influencia no valor a ser multiplicado (Figura 3). Nesse caso, foi possível observar indícios do PMA, pois o aluno conseguiu observar o padrão necessário para fazer a mudança de representação.

Figura 3. Resolução do Aluno C para o item (b) da quinta tarefa



$\frac{1}{2^m \cdot 5^{11}}$

Se $m=11$, então o denominador será uma potência de 10

Se $m<11$, então multiplicamos por 2 a um expoente y (natural) tal que $m+y=11$;

Se $m>11$, então dividimos por 2 a um expoente y (natural) tal que $m-y=11$;

Fonte: arquivo das autoras

O terceiro item visava o processo de generalização, a partir das construções dos itens anteriores. Analisando as respostas, verificamos que o estudante A não respondeu, e o aluno B respondeu afirmativamente, destacando que dependendo do valor a ser multiplicado, o denominador muda e, desse modo, o valor de *m* influencia no fator de multiplicação. Todavia, ele não explicou como essa influência acontece. Já o estudante C, que no item anterior havia produzido uma explicação para o fato, apenas reforçou seus argumentos, confirmando os indícios do processo de generalização, característico do PMA.

Por fim, a sexta tarefa (Quadro 6) teve como intuito explorar o processo de síntese, ligado à abstração. Esperávamos que os estudantes, observando todos os padrões encontrados nas tarefas anteriores, produzissem um resultado geral, que interligasse as conclusões que foram sendo construídas ao longo da primeira atividade.

Quadro 6. Enunciado da sexta tarefa

Tarefa 6
É possível generalizar os padrões encontrados nas tarefas anteriores para qualquer número racional? Se sim, como fica a generalização? Como você faria uma prova para essa garantir essa generalização?

Fonte: elaborado pelas autoras

Apenas o estudante C tentou produzir uma resposta para a questão, porém não conseguiu encontrar uma generalização pautando-se no que foi produzido nos itens anteriores. A tentativa de prova também deixou muito a desejar no sentido de que ele já havia produzido uma boa explicação no segundo item, contudo não conseguiu fazer a ligação entre o que havia respondido anteriormente com o que a questão solicitava. Logo, entendemos que o processo de síntese necessário, para responder a essa tarefa, não foi plenamente alcançado pelo estudante, comprometendo o processo de abstração envolvido na atividade.

No Quadro 7 apresentamos uma síntese dos processos do PMA abordados em cada uma das tarefas, bem como nossas conclusões sobre que processos cada aluno conseguiu mobilizar.

Quadro 7. Síntese dos processos do PMA mobilizados pelos participantes

PROCESSOS DO PMA	TAREFAS	ALUNOS
MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO	1	A; B; C
	3	A; B; C
	5(a)	B; C
TRADUÇÃO ENTRE REPRESENTAÇÕES	3	A; B; C
GENERALIZAÇÃO	2	B; C
	4(a)	A; B; C
	4(c)	B; C
	5(b)	C
SINTETIZAÇÃO	4(b)	Nenhum
	5(c)	C
	6	C
ABSTRAÇÃO	6	Nenhum

Fonte: elaborado pelas autoras

Do quadro construído, podemos observar que três das seis tarefas propostas mobilizavam processos envolvendo representações, tanto em relação à mudança de representação quanto à tradução entre elas. Em conformidade às análises realizadas, acreditamos que todos os alunos evidenciaram, com clareza, os processos de representação, mudança de representação e tradução entre elas.

Esse resultado se aproxima de algumas pesquisas relacionadas ao pensamento matemático avançado, como é o caso do estudo realizado por Gereti e Savioli (2015). As autoras, ao desenvolverem uma pesquisa com estudantes do curso de Matemática de uma universidade paranaense, baseada nas questões do Exame Nacional de Avaliação dos Estudantes (ENADE), também destacaram que dos seis estudantes que responderam às questões propostas, todos apresentaram indícios de processos envolvendo a representação simbólica. Elas afirmam que transitar por representações diferentes de um conceito ou de um objeto matemático requer habilidades para que o estudante possa interligá-los corretamente.

Na mesma direção, Bianchini e Machado (2013) apresentam os resultados de um estudo feito com professores em formação continuada no qual discutiram os principais processos do pensamento matemático avançado. As autoras destacam que:

> Isso nos levou a investigar o potencial de propiciar ao professor, tanto a conscientização da importância da seleção de situações-problema que possibilitem o aluno a vivenciar diferentes usos da variável, quanto compreender quais as situações favoráveis ao aluno para o desenvolvimento de processos do pensamento matemático avançado – PMA – ademais compreender melhor algumas das dificuldades que seus alunos enfrentam ao serem expostos a essas situações (BIANCHINI; MACHADO, 2013, p. 1288).

Como resultados, as pesquisadoras perceberam que a maioria dos professores destacou os processos de representação como sendo importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado. Isso reforça nossa ideia de que ao longo da trajetória escolar os estudantes devem ser instigados a trabalhar com esses processos, o que contribui com o seu desenvolvimento.

Quanto aos processos de generalização e síntese, pelas informações do Quadro 7, temos esses envolvidos em quatro das seis questões propostas; e nesse caso, os resultados dos estudantes foram diferentes dos apontados para os processos de representação. Os alunos A e B apresentaram aspectos insuficientes relacionados ao processo; e apenas o aluno C demonstrou bom entendimento em relação ao reconhecimento de padrões, visando inferir resultados partindo de casos particulares para o geral. Todavia, ele apresentou dificuldades quanto à formalização, não alcançando o processo de abstração.

Nossos achados novamente vêm ao encontro de outros trabalhos semelhantes ao nosso. Marins e Savioli (2016) desenvolveram uma pesquisa com treze estudantes de um curso de Matemática e trabalharam com questões envolvendo o conteúdo de transformações lineares. Como resultados, as autoras destacam que para os processos de abstração, apenas dois estudantes manifestaram características relacionadas à generalização e à síntese.

Para finalizar, realizamos uma análise do caminho percorrido por cada um dos participantes. Para tanto, organizamos, conforme mostramos no Quadro 8, um resumo dos indícios dos processos que estão envolvidos no pensamento matemático avançado, encontrados nas respostas de cada um dos estudantes participantes da pesquisa.

Quadro 8. Indícios dos processos do PMA apresentados pelos participantes

PROCESSOS DO PMA	CARACTERÍSTICAS DOS PROCESSOS DO PMA APRESENTADOS POR CADA ESTUDANTE
Mudança de representação	Estudante A: exibe as representações decimais da maioria dos números racionais apresentados de forma correta, na Tarefa 1 e na Tarefa 3, mas não responde ao primeiro item da Tarefa 5. Apresentou dificuldades com o número $\frac{1}{80}$, sendo que não apresentou a decomposição do denominador em fatores primos.
	Estudante B: exibe as representações decimais dos números racionais apresentados de forma correta, em todas as tarefas que demandavam utilizar esse processo.
	Estudante C: exibe as representações decimais dos números racionais apresentados de forma correta, em todas as tarefas que demandavam utilizar esse processo.
Tradução entre as representações	Estudante A: realiza a tradução solicitada na Tarefa 3 para a maioria dos números, apresentando dificuldade para o número $\frac{25}{40}$.
	Estudante B: realiza a tradução solicitada na Tarefa 3.
	Estudante C: realiza a tradução solicitada na Tarefa 3.
Percepção de padrões	Estudante A: não responde sobre o padrão solicitado na Tarefa 2, mas no primeiro item da Tarefa 5 apresenta o padrão que os denominadores apresentam.

	Estudante B: percebe corretamente os padrões apresentados, destacando-os por meio de textos.
	Estudante C: percebe que existe padrão e o destaca através de explicações de quais seriam os observados. Porém, os padrões destacados não são suficientes para garantir a representação decimal finita (Vide Figura 1).
Generalização	Estudante A: em apenas uma das tarefas percebe que existe uma generalização possível, porém responde brevemente sem explicar muito o observado.
	Estudante B: apresenta algumas tentativas de generalização, porém não completa os raciocínios envolvidos e não consegue responder ao pedido nas questões.
	Estudante C: evidencia generalizações mais consistentes, mesmo não apresentando as respostas totalmente corretas do ponto de vista matemático, apresenta coerência nas suas produções. Parte dos exemplos trabalhados, e a partir deles consegue formular suas generalizações (Vide Figura 3).
Sintetização	Estudante A: não consegue desenvolver nenhumas das tarefas que envolvem esse processo.
	Estudante B: faz tentativas de desenvolver as sínteses solicitadas das Tarefas 4 e 5, apresentando dificuldades. Não consegue desenvolver a Tarefa 6 que envolve o processo de síntese como base para sua resolução.
	Estudante C: apresenta processos de síntese em todas as questões que os solicitavam, não totalmente corretos do ponto de vista matemático, mas coerentes com os raciocínios apresentados (Vide Figura 2, por exemplo).
Abstração	Estudante A: não foi possível observar indícios da abstração nas respostas apresentadas.
	Estudante B: poucos indícios de abstração, pois os processos de generalização e síntese foram bastante comprometidos no desenvolvimento das tarefas.
	Estudante C: apresenta indícios de abstração, porém ainda comprometido sendo que comete alguns equívocos que comprometem o resultado final.

Fonte: elaborado pelas autoras

O estudante A apresenta dificuldades em praticamente todos os processos envolvidos no pensamento matemático avançado. Mesmo nos processos de mudança de representação e tradução comete equívocos que comprometem suas conclusões. A dificuldade de observar os padrões envolvidos também fica clara quando o estudante não consegue produzir respostas para as tarefas que apresentavam padrões como pano de fundo para responder ao que era pedido e mesmo quando responde, as respostas são curtas e sem as devidas explicações, como se fosse algo mecânico.

Entendemos que esses fatos comprometem o desenvolvimento dos processos ligados à abstração que são praticamente inexistentes nas respostas dadas pelo estudante A. Nesse caso, entendemos necessário fazer um trabalho profundo de resgate com esse estudante começando pelas representações, destacando os padrões e a partir destes, construir passo a passo os processos de generalização e síntese.

No caso do estudante B os processos envolvendo a representação parecem estar bem sedimentados em suas respostas e esse estudante também consegue "enxergar" os padrões existentes e explicá-los de forma breve. Porém, quando analisamos os processos de generalização e síntese, percebemos as dificuldades apresentadas para formular as produções escritas e compreender o que está sendo solicitado nas questões.Consideramos que esse estudante precisa desenvolver um trabalho focado nos processos de abstração, envolvendo a linguagem matemática e as generalizações.

O estudante C apresenta os processos envolvendo representações, bem desenvolvidos e consegue "enxergar" os padrões e expressá-los de forma satisfatória. Quanto aos processos envolvendo a abstração, apresenta indícios de generalização e de síntese, mesmo que as respostas não estejam totalmente corretas sob o ponto de vista matemático, porém são coerentes com suas construções no decorrer das tarefas. Nesse caso, o trabalho com esse estudante precisa ser realizado no sentido de mostrar todas as possibilidades de generalização envolvidas nas questões e após focar em como garantir a veracidade das generalizações e sínteses encontradas.

5. Considerações Finais

No presente trabalho objetivou-se analisar que processos do Pensamento Matemático Avançado são mobilizados por alunos de um curso de formação inicial de professores de Matemática, ao realizarem tarefas exploratórias envolvendo aspectos da representação decimal finita dos números racionais.

Ao finalizar as atividades, detectou-se que os alunos, em fase final de um curso de graduação, mobilizaram diferentes aspectos do processo de representação (mudança e tradução) do PMA, relacionados à representação decimal finita.

No entanto, em relação aos processos de sintetização, de generalização e de abstração, o cenário foi diferente. Foi recorrente a dificuldade em relação à identificação de padrões, passo importante para o processo de generalização, gerando limitações no processo de sintetização e, consequentemente, na abstração.

Isso posto, acredita-se que mais atividades como a que foi proposta precisam ser trabalhadas com alunos, tanto no Ensino Superior quanto na Educação Básica, respeitando-se o grau de complexidade de cada nível de escolaridade. Uma atenção especial necessita ser dada ao processo de abstrair, o qual, de acordo com Dreyfus (2002), deve ser o objetivo mais importante da Educação Matemática Avançada.

Recebido em: 04/12/2019
Aprovado em: 19/04/2019

Referências

BIANCHINI, B., MACHADO, S. Reflexões de professores de matemática sobre os processos do pensamento matemático avançado. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, VII., 2013, Montevideo, Uruguai. **Anais**... Disponível em: <http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/446.pdf>. Acesso em: 07 out. 2019.

CARMO, P. F., IGLIORI, S. B. C. Noções de pensamento matemático avançado utilizados em pesquisas na área de educação matemática. **Revista Produção Discente em Educação Matemática**. São Paulo, v. 6, n. 1, p. 109-120, 2017.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no**

ensino fundamental. 316 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D.(Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 25-41.

GERETI, L. C. V., SAVIOLI, A. M. P. D. Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE. **Bolema**. Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 206-222, 2015.

MARINS, A. S., SAVIOLI, A. M. P. D. Pensamento matemático avançado manifestado em tarefas envolvendo transformações lineares. **Revista Ciência e Educação.** Bauru, v. 22, n. 2, p. 489-504, 2016.

PONTE, J. P., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. rev. ampl.; 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: ______.**Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 3-21.

VALE, I. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **REVEMAT (Revista Eletrônica de Educação Matemática)**. Florianópolis, v. 8, n. 2, p. 64-81, 2013.