emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2020v7i2p124-148

# OS JOGOS DE LINGUAGEM E A COMPREENSÃO DE SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES DE 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

## *LANGUAGE GAMES AND THE UNDERSTANDING OF SYSTEMS WITH TWO 1ST DEGREE EQUATIONS WITH TWO UNKNOWN QUANTITIES IN MIDDLE SCHOOL*

Gabriela Dutra Rodrigues Conrado[1]
Márcia Souza da Fonseca[2]

**RESUMO**

*O presente texto aborda uma experiência no ensino de sistemas de duas equações de 1º grau com duas incógnitas para estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental II, orientada pela filosofia de maturidade de Ludwig Wittgenstein. Na perspectiva do filósofo, a linguagem opera como jogo, em que é preciso conhecer as regras para poder entender seus significados. Este artigo teve como questão de pesquisa investigar de que maneira é possível compreender o ensino e a aprendizagem de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas por meio de jogos de linguagem. Para isso, utilizou-se a abordagem qualitativa com observação participante e análise de materiais com o objetivo de analisar os jogos de linguagem praticados no estudo de sistemas de equações em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental II. Para o levantamento dos dados, foram disponibilizadas imagens das produções dos estudantes, anotações em diário de bordo da professora-pesquisadora e diálogos com alunos e alunas, os quais foram analisados segundo jogos de linguagem praticados no ambiente escolar. Foi possível perceber que a resolução de sistemas de equações envolve uma série de linguagens matemáticas que possuem regras especificas não naturais. Conclui-se que a perspectiva filosófica de Wittgenstein no ensino de matemática reflete sobre a importância dos exemplos, da observação das práticas matemáticas e da clareza das regras.*

**Palavras-chave:** *Jogos de Linguagem; Wittgenstein; Sistemas de Equações; Ensino Fundamental.*

1. Professora Mestra da Secretaria Municipal de Educação e Desporto de Pelotas –RS. E-mail: gabrielapof@hotmail.com
2. Professora Doutora do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas (UFPel-RS) E-mail: mszfonseca@gmail.com

**ABSTRACT**

*The present text approaches an experience in the teaching of systems with two 1st degree equations with two unknown quantities for 8th grade Middle School students guided by the philosophy of maturity by Ludwig Wittgenstein. In the philosopher's perspective, the language works as a game in which it is necessary to know the rules in order to understand their meanings. This article had as its research question the investigation on how we can understand the teaching and the learning of systems with two 1st degree equations with two unknown quantities through language games. We used a qualitative approach with participating observation and analysis of materials with the purpose to analyze language games used in the study of systems of equations in an 8th grade Middle School class. We had images of students' productions, notes on the teacher-researcher's logbook and dialogues with students, which were analyzed according to the language games played in the school environment. We could notice that solving systems of equations involves a series of mathematical languages that have non-natural specific rules. Wittgenstein's philosophical perspective in the teaching of mathematics reflects on the importance of examples, the observation of mathematical practices and on the clarity of rules.*

**Keywords:** *Language Games; Wittgenstein; Systems of Equations; Middle School.*

## Considerações Iniciais

No oitavo ano de escolaridade, a disciplina de Matemática apresenta um aprofundamento no estudo de álgebra, principalmente na utilização e manipulação de símbolos matemáticos. Conceitos envolvendo expressões algébricas, operações de polinômios e sistemas de equações são alguns dos assuntos ensinados pelos professores da disciplina. É importante que o ensino de Matemática permita aos estudantes fazer relações entre conceitos estudados, compreender significados e aplicar seus conhecimentos.

Temos buscado alternativas no ensino de álgebra que valorizem a diversidade de ideias matemáticas e também a capacidade do estudante relacionar linguagens matemáticas. Neste texto, não consideramos a Matemática como uma linguagem universal, entendemos que existem diferentes jogos de linguagens na Matemática, que foram construídos em determinados espaços e tempos para atender necessidades específicas.

Este texto discute implicações da filosofia de maturidade de Ludwig Wittgenstein no ensino e na aprendizagem de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas por estudantes de 8º ano de Ensino Fundamental. A produção do filósofo é tratada muitas vezes como terapia, a qual "[...] busca compreender fundamentos filosóficos que causam confusões no ensino e assim apresentar outras possibilidades pedagógicas" (SILVEIRA *et al*, 2018, p. 164). A filosofia impulsiona-nos pensar diferente, repensar práticas e assumir novas posturas no exercício de nossas profissões. Nesta produção, investigamos implicações desse modo de pensar a docência em Matemática, assim, este texto teve como questão de pesquisa investigar de que maneira podemos compreender o ensino e a aprendizagem de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas por meio de jogos de linguagem.

A fase de maturidade da obra de Ludwig Wittgenstein fornece embasamento teórico para pensar o ensino de Matemática de uma forma múltipla e menos centrada em verdades absolutas. O filósofo adota uma visão pragmática da linguagem, na qual, para entendê-la, é preciso observar seu uso na prática. Wittgenstein [1953]/(2000) chama esses usos de *jogos de linguagem*, cuja função está atrelada à forma de vida dos sujeitos. De tal modo, este artigo tem como objetivo analisar os jogos de linguagem praticados no estudo de sistemas de equações em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental. Os jogos de linguagem analisados contemplam práticas dos estudantes, da professora-pesquisadora e dos materiais didáticos utilizados nas atividades em sala de aula. Para a parte empírica da pesquisa, adotamos abordagem qualitativa (MINAYO, 2012), analisando imagens das produções dos estudantes, anotações em diário de bordo da professora-pesquisadora e diálogos com alunos e alunas, trabalhando para compreender os usos feitos da linguagem em atividades matemáticas.

Visto que este estudo está centrado nas teorizações de Wittgenstein, na próxima seção do texto, apresentamos pontos relevantes da sua filosofia. Na sequência, realizamos articulações entre a filosofia de maturidade do autor com ideias matemáticas e, em seguida, descrevemos o contexto do trabalho analisando a experiência vivenciada.

## A Filosofia de Wittgenstein e seus principais conceitos

Trabalhar com a filosofia de maturidade de Wittgenstein é perceber que não se pode entender a linguagem sem considerar as formas de vida dos sujeitos. De tal modo contar um pouco sobre a vida de Wittgenstein, torna-se elemento relevante para entender sua obra e os efeitos da sua produção no modo de pensar a linguagem. Ludwig Wittgenstein nasceu na Áustria no ano de 1889, viveu em um período de intensa produção intelectual e artística em Viena. A condição financeira confortável de sua família permitiu uma juventude privilegiada com educação de qualidade. Frequentou universidades na Inglaterra, onde estudou filosofia e engenharia, aprendeu com pensadores conhecidos como Gottlob Frege e Bertrand Russell, contribuindo para as noções de sua primeira fase de produção filosófica. A primeira filosofia de Wittgenstein pode ser conhecida no *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921), no qual defende uma concepção semântico-transcendental da linguagem. A partir dela, pode-se entender que existe uma lógica superior na linguagem que permite representar o mundo por meio de signos (CONDÉ, 1998). A escrita do autor é feita por aforismos, logo para fazer referência a sua obra, neste texto, utilizaremos a notação Aforismo e seu respectivo número.

Após duas grandes guerras das quais participou, o filósofo reaparece no cenário acadêmico defendendo ideias contrárias a que tinha postulado. Wittgenstein afasta-se da ideia de que o papel da linguagem é expressar, de forma lógica, a realidade. Nessa segunda fase, também chamada de "fase de maturidade", Wittgenstein descreve, na obra *Investigações Filosóficas* (2000), a linguagem enquanto produtora da forma de vida dos sujeitos. A linguagem nessa nova concepção do filósofo não serve para descrever a o mundo, pois não existe uma verdade a ser relevada pelas palavras. A linguagem são seus usos na vida e seus significados são entendidos nos contextos nos quais ela é empregada (CONDÉ, 1998).

Dentre as proposições de Wittgenstein, destacamos noções de jogo de linguagem e gramática. "Chamarei também de 'jogos de linguagem' o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está interligada" (WITTGENSTEIN, 2000, Aforismo 7). O filósofo utiliza a palavra "jogo" para designar que a linguagem funciona por lances, por usos, os quais precisam obedecer a regras acordadas entre os jogadores. Essas regras constituem uma gramática de utilização da linguagem, que é aprendida nas formas de vida dos sujeitos. A gramática dos jogos de linguagem não é a mesma dos linguistas, é o "[...] estudo e a descrição das regras de uso da linguagem" (CONDÉ, 1998, p. 109).

Um dos caminhos para entender a filosofia de fase de maturidade de Wittgenstein é compreendê-la em oposição à sua primeira fase, o próprio autor sinaliza essa abordagem no prefácio de *Investigações Filosóficas*. É verdade que o filósofo esteve preocupado com o sentido da vida e insere a linguagem no cerne de suas investigações. Umas das principais diferenças apontadas por comentadores como Condé (1998) e Moreno (1993) entre as duas fases diz respeito às questões de inquérito de sua filosofia. Enquanto na primeira fase, a pergunta destinava-se a entender "o que é" a linguagem na procura por uma essência comum; na segunda fase, a pergunta era "como" funciona a linguagem, tentando compreender como a linguagem é utilizada na prática.

Esse deslocamento do modo de abordar a linguagem representa uma ruptura nas bases da filosofia do autor. Na primeira fase, falava-se em linguagem, no singular, na qual cada signo possui um significado e os problemas filosóficos advêm do uso incorreto desses signos na linguagem. Na segunda fase o tema de estudo é tratado de maneira plural, linguagens, e elas adquirem significado conforme seus usos nas formas de vida dos sujeitos. Aqui a linguagem admite muitos "lances", basta saber qual jogo, forma de vida, está sendo utilizada. A linguagem não é mais calculada para ser encaixada em uma visão estruturada do mundo. O mundo de Wittgenstein é mais amplo, aceita as multiplicidades das linguagens (CONDÉ, 1998).

A linguagem na fase de maturidade de Wittgenstein opera pela multiplicidade de jogos, entretanto sua filosofia não ignora semelhanças entre jogos de linguagem. Wittgenstein (2000) faz uma analogia entre os jogos de linguagem e os integrantes de uma família. Os membros de uma família têm graus de parentesco, uns possuem mais semelhanças que outros. O mesmo ocorre com os jogos de linguagem, que guardam semelhanças entre si, mas não existe um atributo comum a todos eles. Por exemplo, conhecemos muitos tipos de jogos, jogos de tabuleiro, jogos de carta, jogos de bola, jogos de vídeo game. Existem características comuns em alguns e distintas em outros, mas não há um denominador comum a todos eles. Isso porque sua prática está atrelada ao contexto no qual é praticada.

Wittgenstein sempre fez uso de exemplos matemáticos em suas considerações, possivelmente porque foi estudante de engenharia e essa área do conhecimento permite definições exatas do uso das palavras e dos símbolos, contribuindo para entender o funcionamento da linguagem

(MORENO, 1993). Neste sentido, a obra do filósofo convida a reflexões sobre a Matemática e aspectos de seu ensino, no decorrer no texto, sinalizamos algumas possibilidades de pensar o ensino de Matemática com base na filosofia do autor.

## Possibilidades de trabalhar com Wittgenstein no ensino de matemática

Contribuições de Wittgenstein na Matemática, ainda que de modo indireto, vão abordar aspectos da linguagem, já que esse é o foco de suas obras. Como vimos, a primeira filosofia de Wittgenstein está centrada na busca por uma lógica transcendental na linguagem capaz de representar a essência do conhecimento. Essa tradição filosófica pode ser observada em muitos estudos matemáticos, nos quais a disciplina é tratada como uma linguagem universal, capaz de descrever o mundo e seus fenômenos. Nesse ideal, a Matemática consegue captar determinadas verdades e expressá-las por meio da linguagem, seu objetivo último é construir generalizações, as quais, muitas vezes, envolvem abstração (JUNIOR; SILVEIRA, 2019).

Na segunda filosofia, a procura da lógica universal da linguagem é abandonada. O foco da linguagem está nas maneiras como utilizamos seus signos em determinados contextos. Assim, para entender uma linguagem matemática é preciso observar como ela é operada em uma forma de vida. Gottschalk (2008) salienta que as relações de significado em Matemática transcendem processos mentais, dessa forma, na filosofia pragmática de Wittgenstein, a compreensão dos sentidos da atividade matemática é orientada pelo processo de seguir regras e dominar uma técnica.

Assim sendo, o ensino de Matemática a partir das contribuições da fase de maturidade de Wittgenstein pressupõe deixar bastante claras as regras matemáticas utilizadas nos jogos de linguagem e trabalhar com exemplos para que os estudantes percebam como a linguagem funciona naquele modo de vida, nesse caso, vida escolar. Enfatizar a aprendizagem associada ao domínio de regras pode denotar ensino mecânico e distante da realidade dos estudantes. Todavia, existem imagens matemáticas que possuem semelhança de família com matemáticas praticadas no cotidiano, por exemplo, a aritmética, que é facilmente aprendida por meio de ações empíricas com emprego de materiais concretos. Silveira *et al* (2018, p.166) ressaltam que "[...] é comum uma ênfase negativa quando se fala em regras; estas, por vezes, acabam sendo relacionadas com um ensino rígido ou demasiadamente rigoroso, abstrato, vazio ou de mera memorização [...]". Segundo Knijnik *et al* (2012), as matemáticas praticadas na escola e na academia privilegiam essas práticas: o registro escrito, observação ao formalismo e o rigor nas respostas.

As práticas matemáticas na escola diferem quanto aos seus registros e suas gramáticas, ainda que guardem muitas semelhanças entre si. No estudo de sistemas de equações, podemos abordá-los por jogos de linguagem algébricos, aritméticos e gráficos. São diferentes gramáticas operando em um mesmo tema. Sabemos que a caraterística mais peculiar dos sistemas de equações é fornecida pelo jogo de linguagem algébrico, a escrita das equações entre chaves, os símbolos e letras e suas operações. A aritmética aparece nos procedimentos de resolução de sistemas de equações, na verificação de soluções e também na identificação de pontos pertencentes às retas das equações. O jogo de linguagem gráfico trabalha com a imagem das retas e sua intersecção no plano cartesiano para apresentar a solução do sistema. Consideramos que a diversidade de jogos de linguagem possibilita ter uma visão ampla do tema que estamos estudando. De acordo com Wittgenstein (2000, Aforismo 122):

> Uma fonte principal da nossa incompreensão é não termos uma visão panorâmica do uso das nossas palavras. – Falta clareza à nossa gramática. – A representação panorâmica permite a compreensão, que consiste precisamente em 'ver as conexões'. Daí a importância de encontrar e inventar *articulações intermediárias*.
>
> O conceito de representação panorâmica é para nós de importância fundamental. Ele designa nossa forma de representação, o modo como nós vemos as coisas. (Isto é uma 'visão de mundo'?)

De tal modo, apresentar conexões entre os jogos de linguagem no estudo de sistemas de equações possibilita uma visão panorâmica do tema, podendo facilitar sua compreensão. Expresso isso, na sequência, explicamos o contexto da experiência de ensinar sistemas de duas equações do 1º grau orientados pela filosofia pragmática de Wittgenstein, enfatizando abordagem metodológica e organização das atividades em sala de aula.

## Contexto da experiência

Este trabalho, de cunho qualitativo (MINAYO, 2012), teve como questão de pesquisa investigar de que maneira podemos compreender o ensino e a aprendizagem de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas por meio de jogos de linguagem. Em muitas passagens no decorrer do texto, optamos por utilizar apenas a expressão sistemas de equações para designar o referido conceito matemático estudado. O trabalho foi realizado pela professora regente da turma no segundo semestre letivo de 2019, com vinte e quatro estudantes de oitavo ano do Ensino Fundamental em uma escola pública municipal em Pelotas-RS. A fim de preservar a identidade dos jovens participantes desta produção, eles serão designados por aluno/a A, aluno/a B, etc. e os grupos de estudantes da mesma forma, grupo A, grupo B, etc.

O objetivo deste estudo foi analisar os jogos de linguagem praticados no estudo de sistemas de equações em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, para isso, foram analisadas imagens das produções dos estudantes, observação participante e registros das práticas matemáticas dos jovens no diário de campo da professora. O diário de campo é um instrumento comum em pesquisas qualitativas, no qual o pesquisador registra suas observações, questionamentos, diálogos, tudo aquilo que faz parte do contexto estudado para, posteriormente, analisar, buscar relações e sentidos para as impressões registradas (MINAYO, 2012). A análise dos materiais buscou identificar os jogos de linguagem matemáticos envolvidos no estudo de sistemas de equações. A organização desses jogos de linguagem ocorreu em função da gramática disponível nos materiais didáticos na prática da professora-pesquisadora e dos estudantes. Observamos a manifestação de jogos de linguagem matemáticos na escrita dos problemas, na aritmética, na álgebra e também nos gráficos.

O trabalho didático foi realizado em pouco mais de vinte aulas. Em alguns momentos, os estudantes trabalharam em grupos e, em outras situações, deveriam participar individualmente. De início, foram apresentadas situações que podem ser modeladas por meio de um sistema de equações, no qual é possível chegar a uma solução apenas por cálculo mental, por exemplo, “A soma de dois números resulta em sete e a diferença resulta em três. Que números são esses?”.

Após esse momento, ensinamos técnicas de resolução de sistemas de equações, realizamos alguns exercícios e problemas. Neste artigo, chamamos de problema um texto com informações capazes de originar um sistema de equações. Posteriormente, com a turma organizada em grupos de, no máximo, quatro estudantes, cada grupo recebeu um problema diferente para ser solucionado, utilizando linguagem aritmética, algébrica e gráfica, conforme a figura a seguir:

**Quadro 1.** Problemas criados para o estudo de Sistemas de equações

| | **Problemas** |
|---|---|
| **A** | Henrique participou de um campeonato de futebol de botão jogando dez vezes. Cada vitória vale quatro pontos e cada derrota vale dois pontos. Henrique conseguiu acumular trinta e dois pontos. Qual número de vitórias e de derrotas de Henrique sabendo que não empatou nenhuma vez? |
| **B** | Alex disputou um campeonato individual de lance livres na quadra de basquete. Acertar a cesta vale quatro pontos e errar vale um. Sabendo que Alex lançou a bola doze vezes e alcançou trinta e três pontos, qual o número de vezes que ele acertou a cesta? |
| **C** | Marília participou de um campeonato de futebol de botão. Cada vitória vale três pontos e cada empate vale dois pontos. Marília não perdeu nenhuma vez e conseguiu acumular dezenove pontos jogando nove vezes. Qual número de vitórias de Marília? |
| **D** | Cristina e Cristiane são mãe e filha, respectivamente. A soma da idade das duas é oitenta e três anos e a diferença é trinta e cinco. Qual a idade de Cristina e de Cristiane? |
| **E** | Rogério é o primo mais velho de Otávio. A soma de idade dos dois é trinta e sete anos e a diferença é de três anos. Qual a idade dos dois primos? |
| **F** | Somando a idade de meu gato e meu cachorro resulta em onze. A diferença de idade entre eles é de três anos. Qual a idade de meu gato? E de meu cachorro? |
| **G** | Bruno e Mariana são namorados. A diferença de idade entre eles é de dois anos e a soma de suas idades é de trinta anos. Qual a idade de Bruno e Mariana? |
| **H** | A soma de dois números resulta em cinco e a diferença resulta em onze. Que números são esses? |
| **I** | Vicente pensou em dois números. A soma deles é um e a diferença é três. Quais números Vicente pensou? |

Fonte: arquivos das autoras

Os problemas foram criados e distribuídos de acordo com observações diagnósticas em sala de aula. Não deveriam ser difíceis demais a ponto de desestimular os alunos e alunas e nem fáceis a ponto de resultarem desinteressantes. Cabe mencionar que as observações indicaram que grande parte dos alunos e alunas apresentava limitações na realização de operações matemáticas no conjunto dos números inteiros, consequentemente, resolver equações do 1º grau mostrava-se um problema para a maioria dos jovens do oitavo ano. Esses fatores impulsionaram o planejamento de um trabalho minucioso no estudo de sistemas de equação do 1º grau, pois esse conteúdo permite resgatar o entendimento de conceitos que não haviam sido assimilados de maneira satisfatória anteriormente. A seguir, realizamos a análise dos processos de compreensão de concepção de jogos de linguagem.

## Discussão das atividades escolares

Para a discussão das atividades, optamos por organizar a escrita de acordo com as etapas do trabalho em grupo, quais sejam: (i) Interpretação do problema; (ii) Resolução de sistema de equações; (iii) Identificação de pares ordenados; (iv) Sistemas de equações e retas no plano cartesiano. A partir dessa orientação, tecemos articulações com a filosofia de maturidade de Wittgenstein.

## Interpretação do Problema

Para que os estudantes consigam solucionar um sistema de equações a partir de um problema, é preciso converter as informações ali contidas em jogo de linguagem algébrico ou aritmético. O próprio texto do problema é um jogo de linguagem já que possui uma gramática específica na sua enunciação. Os problemas debatidos neste artigo são tratados como jogos de linguagem na Matemática, mesmo que escritos na língua materna, pois o objetivo de um texto de problema é servir ao estudo matemático.

Consideramos que a interpretação de problemas é um desafio no ensino de Matemática. Muitos professores entendem que essa etapa é competência da área de língua portuguesa, trabalhar com a interpretação de texto. Porém, esse tipo de texto é produzido para utilização em um contexto matemático e obedece a essa gramática. De acordo com Wittgenstein (2000), uma palavra assume significado na sua utilização, está atrelada ao contexto no qual é enunciada. Sendo o contexto o estudo de Matemática, entendemos que cabe ao professor de Matemática apresentar esses significados às palavras e suas funções na linguagem.

Nas aulas para a turma de 8º ano, foram apresentados alguns problemas com enunciados em situações iguais ou semelhantes aos problemas entregues aos grupos de alunos. O primeiro momento do trabalho consistia na interpretação do problema para a resolução da equação. Uma interpretação equivocada prejudicaria a continuidade das atividades. Para alguns alunos e alunas, esse momento foi o mais desafiador, podendo ser observado nos diálogos:

> Assim, para mim, entender o problema foi o mais difícil (Aluno W).
>
> Eu não ia conseguir escrever isso (equações) se a colega não tivesse dito o que era para fazer (Aluna J).

A interpretação do problema não se restringe a um pré-requisito para resolver os sistemas, também oferece uma visão ampla do tema estudado quando adquire significado na solução. Quando existe o retorno para o problema de posse da solução, almejamos que o estudante consiga estabelecer as relações entre todos os momentos. Discutiremos esses aspectos mais adiante, na última seção de análise.

As palavras utilizadas no texto têm um significado específico quando o contexto é o estudo de temas matemáticos. Condé (1998) destaca que a essência de um jogo de linguagem é seu uso na forma de vida, no caso dos jogos de linguagem presentes nos problemas, sua essência é propiciar um contexto de ensino e aprendizagem matemático. Podemos analisar nos problema F e B do quadro 1 (um) algumas expressões e seus significados em contextos distintos:

> Problema F: Somando a idade de meu gato e meu cachorro resulta em onze. A diferença de idade entre eles é de três anos. Qual a idade de meu gato? E de meu cachorro?
>
> Problema B: Alex disputou um campeonato individual de lance livres na quadra de basquete. Acertar a cesta vale quatro pontos e errar vale um. Sabendo que Alex lançou a bola doze vezes e alcançou trinta e três pontos, qual o número de vezes que ele acertou a cesta?

No problema F, é utilizada a palavra *diferença* que, em um contexto matemático, tem o sentido específico de fornecer resultado de uma operação de subtração, essa informação não está colocada para sabermos somente que o gato nasceu três anos antes do cachorro, ela exige uma ação matemática. Se retirarmos a palavra diferença do contexto matemático e solicitarmos que os estudantes apontem a diferença entre gatos e cachorros é possível que citem características físicas distintas entre eles. De acordo com a filosofia de Wittgenstein (2000), só podemos entender o sentido de uma expressão se observarmos como ela é utilizada em uma forma de vida, "a significação de uma palavra é seu uso na linguagem" (Aforismo 43).

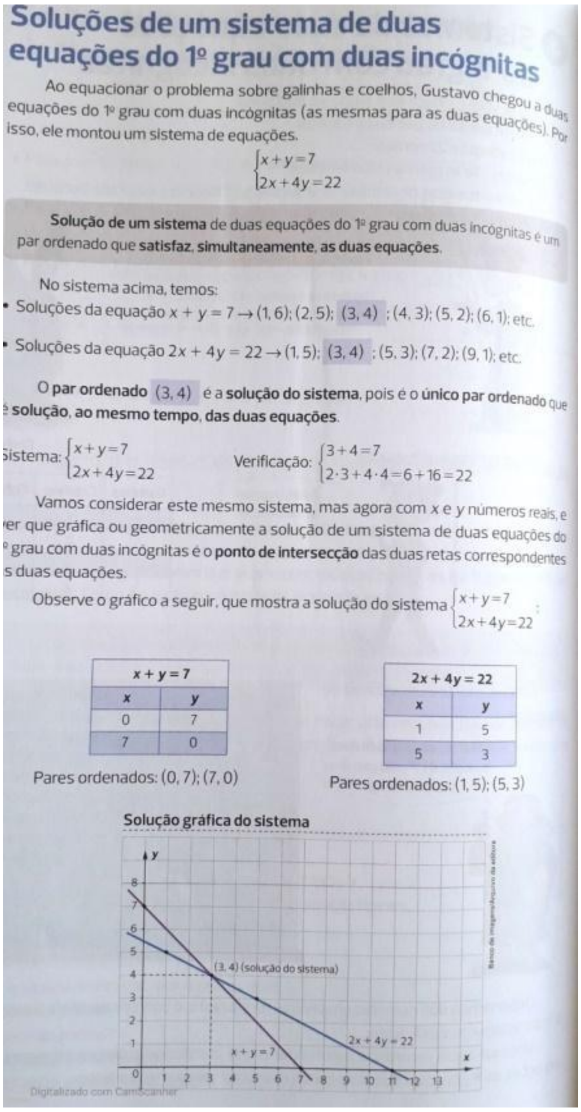
Para destacar outro exemplo, o vocábulo *alcançou* no problema B deve ser interpretado pelo total de somatório de pontos, significa entender que a soma entre cestas acertadas e erradas é igual a trinta e três pontos. Ao retirar a palavra alcançou do contexto em que é apresentada, ela pode assumir outro sentido, completamente distinto do que estava apresentado.

Para Gottschalk (2008), o modo como utilizamos uma expressão em Matemática auxilia na organização de nossas experiências empíricas, mas também possui significado normativo, indicam-nos um procedimento que deverá ser utilizado em um jogo de linguagem. Com efeito, afirmamos que as palavras em um problema têm uma função específica nos jogos de linguagem. Entretanto, não guardam para si um sentido único e universal. Interpretar um problema não é descobrir o significado último de uma expressão, tal qual uma verdade que pudesse ser revelada a partir de uma gramática matemática. É preciso compreender a forma de vida a que se refere a palavra e observar em qual contexto ela é utilizada (WITTGENSTEIN, 2000).

Além disso, interpretar um problema de sistemas de equações institui definir valores ou grandezas a serem descobertos, que, em Matemática, nomeamos "incógnitas". Esse modo de pensar explicita uma prática que ordena ao sujeito definir o que desconhece, geralmente por letras, em um sistema de equações de duas variáveis, muito provavelmente $x$ e $y$. Essas práticas são jogos de linguagem na Matemática, cuja característica é normativa. Sabemos que é possível designar incógnitas por quaisquer letras ou símbolos, mas existem, no currículo da Matemática escolar e acadêmica, direcionamentos nos modos de fazer Matemática.

Esses códigos e procedimentos estão presentes em livros didáticos, plataformas on-line de Matemática e em aplicativos matemáticos para celular. Na sequência, trazemos a imagem do livro didático utilizado pela turma de 8º ano em 2019, na qual podemos observar esses direcionamentos:

**Figura 1.** Livro Didático de 8º ano



## Soluções de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Ao equacionar o problema sobre galinhas e coelhos, Gustavo chegou a duas equações do 1º grau com duas incógnitas (as mesmas para as duas equações). Por isso, ele montou um sistema de equações.

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+4y=22 \end{cases}$$

**Solução de um sistema** de duas equações do 1º grau com duas incógnitas é um par ordenado que **satisfaz, simultaneamente, as duas equações**.

No sistema acima, temos:

- Soluções da equação $x + y = 7 \rightarrow (1, 6); (2, 5);$ $\boxed{(3, 4)}$ $; (4, 3); (5, 2); (6, 1);$ etc.
- Soluções da equação $2x + 4y = 22 \rightarrow (1, 5);$ $\boxed{(3, 4)}$ $; (5, 3); (7, 2); (9, 1);$ etc.

O **par ordenado** $\boxed{(3, 4)}$ é a **solução do sistema**, pois é o **único par ordenado** que é **solução**, **ao mesmo tempo**, **das duas equações**.

Sistema: $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+4y=22 \end{cases}$ Verificação: $\begin{cases} 3+4=7 \\ 2\cdot 3+4\cdot 4=6+16=22 \end{cases}$

Vamos considerar este mesmo sistema, mas agora com $x$ e $y$ números reais, e ver que gráfica ou geometricamente a solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas é o **ponto de intersecção** das duas retas correspondentes às duas equações.

Observe o gráfico a seguir, que mostra a solução do sistema $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+4y=22 \end{cases}$:

| $x + y = 7$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 0 | 7 |
| 7 | 0 |

Pares ordenados: (0, 7); (7, 0)

| $2x + 4y = 22$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 1 | 5 |
| 5 | 3 |

Pares ordenados: (1, 5); (5, 3)

**Solução gráfica do sistema**



Fonte: Dante (2015, p. 168)

Na imagem, vemos as incógnitas escritas como $x$ e $y$, as chaves à esquerda delimitando as equações do sistema, os parênteses indicando que os números separados por vírgulas são pares ordenados, tabelas com equações e posteriores valores substituindo $x$ e $y$, cujas funções agora são de variáveis e, por fim, as retas interceptando-se no plano cartesiano. Existe uma série de símbolos que foram construídos e significados na prática de resolução de sistemas.

Após a identificação de grandezas desconhecidas, observamos os caminhos tomados pelos estudantes na resolução de sistemas de equações: resolução por cálculo mental, escritas de pares ordenados com técnica de tentativa-erro e a escrita algébrica. Debatemos as experiências dos estudantes nesse processo.

## Resolução de sistemas de equações

Nesta seção do texto, discutimos momentos nos quais os estudantes buscavam obter os valores das incógnitas de $x$ e $y$ para resolver os sistemas de equações. Segundo Junior e Silveira (2019, p. 33), métodos de resolução de equações são uma espécie de explicação da própria equação, são regras capazes de dar sentido às práticas matemáticas. "Por exemplo, na equação $2. x+3=11$, temos que a raiz da equação é $4$. Mas, não será 4 por causa do método pelo qual foi resolvida, e sim porque se criou um método, devido ao resultado ser 4 [...] ". Neste sentido, resolver sistemas de equações é buscar usos aceitos em uma determinada gramática.

No decorrer do texto, analisamos os jogos de linguagem utilizados pela turma de 8º ano em diferentes estratégias de resolução. Iniciamos a análise, trazendo um diálogo entre a professora em um dos grupos que optou por cálculos mentais na resolução do problema D:

> Aluno W: Uma tem oitenta e dois e a outra um.
>
> Aluna V: Não né, tem que ver a diferença. Senão ia dizer diferença de um ano.
>
> Aluno L: Acho que é cinquenta e poucos e uns trinta.
>
> Professora: Tá ótimo. Esse é o caminho. Peguem o caderno e vamos testar, será que pode ser cinquenta e três e trinta? Se eu somo dá oitenta e três, fechou a primeira afirmação. Mas quando eu faço a subtração, a diferença, dá quanto? Tem que ser trinta e cinco.

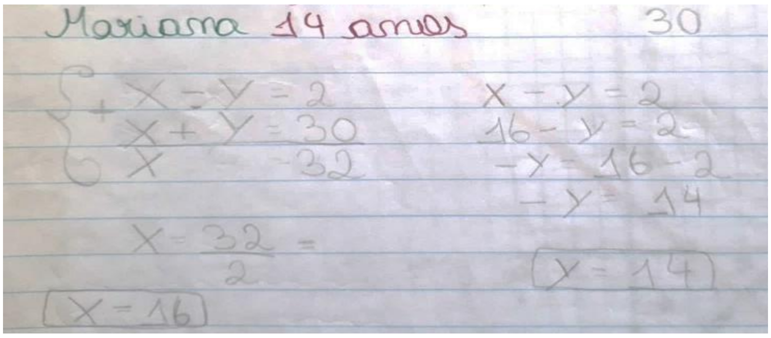
Aluno W: Então não tem como. Não tem resposta.

Professora: Vamos testar, vamos lá!

Observamos que alguns integrantes perceberam que os valores deveriam servir às duas afirmações do problema para que fosse uma solução aceita pelo jogo de linguagem dos sistemas de equações. Um dos alunos parece ter mais dificuldade em compreender a simultaneidade dos valores em relação às equações, concluindo, inclusive, que o problema “não tem resposta”. Só é possível essa conclusão porque já se conhece o jogo, ainda que não tenha o domínio de todas as regras. Para Wittgenstein (2000, Aforismo 31), “[...] pode-se também imaginar alguém que tenha aprendido o jogo sem aprender as regras ou formulá-las. Ele pode ter aprendido inicialmente, pela observação, um jogo de tabuleiro bem simples, e ter progredido pela constante complexificação [...].” Nesses casos, entendemos que existe um processo de apreensão dos significados do jogo de linguagem pelos alunos, eles entendem que os valores devem servir para as duas equações e se isso não é identificado, assumem que não existe uma resposta.

Assim como esse grupo, outros também iniciaram e concluíram a resolução sem fazer uso da escrita algébrica. Porém, consideramos importante que os estudantes, além de escrever o problema com a simbologia algébrica, também operem com as técnicas de resolução de sistemas de equações, por esse motivo, uma das exigências da atividade era realizar essa etapa, que foi cumprida por todos os grupos.

**Figura 2.** Resolução do problema G pelo grupo A




Fonte: arquivos dos autores

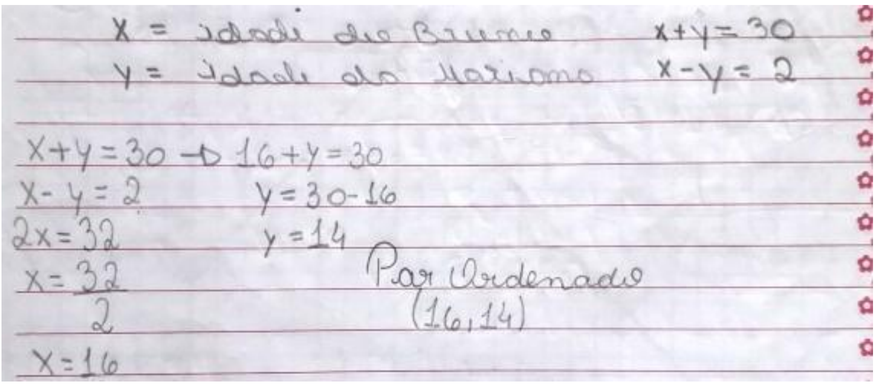
O problema G poderia ser facilmente solucionado por meio de cálculo mental. Isso foi verificado como podemos observar no canto esquerdo da imagem anterior. Entretanto, não podemos afirmar que houve um domínio dos jogos de linguagem nos procedimentos que envolviam a resolução de sistemas por meios algébricos.

Por meio de técnica resolução de sistemas de equações, o grupo não realizou a soma $x + x = 2x$, mas o coeficiente $2$ surge dividindo o $32$ fornecendo a resposta correta $16$. Esse procedimento pode ter sido utilizado imitando algum exercício realizado em aula. O grupo de alunas entende que deve somar $30 + 2$, $y$ é cancelado facilitando os cálculos, porém o $x$ permanece inalterado, indicando que as regras desse jogo de linguagem ainda não foram dominadas.

No lado esquerdo da imagem, o $x$ é substituído por 16, sinalizando habilidades da técnica Matemática ensinada em aula. Os processos restantes fazem parte de procedimentos de solução de equações do primeiro grau: isolar a incógnita, passando o número para o outro lado da igualdade trocando a operação. É possível que esses equívocos tenham acontecido porque há confusões entre o sinal do número e a operação desempenhada na conta, o significado desses elementos na prática não foi compreendido pelo grupo.

Neste outro exemplo, os passos para resolver os sistemas estão escritos de maneira coerente com a expectativa de aprendizagem dos alunos.

**Figura 3.** Resolução do problema G pelo grupo B




Fonte: arquivos dos autores.

Na parte superior da imagem, vemos a identificação das variáveis considerando o problema e a montagem do sistema de equações. Na parte central da figura 4 (quatro), percebemos os processos de solução, realizando operações aritméticas e algébricas de acordo com os jogos de linguagem, eles finalizam com a escrita comum aos jogos de linguagem da geometria analítica, "par ordenado (16,14)". Na figura 3 (três), as expressões do jogo de linguagem estão mais claras em relação ao exposto na figura 2 (dois) e a capacidade de escrever de forma precisa e organizada os jogos de linguagem indicam habilidades dos estudantes em entender significados do próprio jogo.

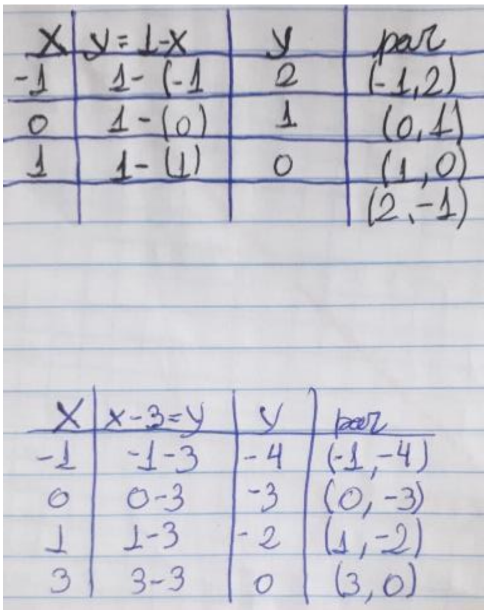
Na perspectiva da filosofia de Wittgenstein, aprender um jogo de linguagem significa conseguir fazer uso respeitando sua gramática. "Para Wittgenstein, a compreensão, assim como o pensar, não é um processo mental; compreender algo é ter uma habilidade [...]" (SILVEIRA *et al*, 2018, p. 168). No estudo de sistemas de equações, implica conseguir realizar as etapas de uma ou mais técnicas a fim de encontrar os valores das incógnitas. Essas técnicas indicam a realização de procedimentos algébricos e aritméticos, os quais precisam ser dominados. Além de saber os procedimentos, é preciso saber também em quais momentos devem ser utilizados, esses saberes constituem jogos de linguagem funcionando em uma forma de vida.

## Identificação de pares ordenados

Após identificar algebricamente a solução do sistema de equações, os grupos deveriam prosseguir seu estudo no contexto gráfico. Para isso, era preciso encontrar pares ordenados para cada uma das equações do sistema, as quais permitem a construção de retas no plano cartesiano.

Na etapa anterior, muitos alunos e alunas recorreram principalmente a técnicas de tentativa-erro com cálculo mental para identificar as soluções, esperávamos que isso acontecesse também nessa etapa, mas não ocorreu. Na figura a seguir a resolução do problema I:

**Figura 4.** Identificação de pares ordenados



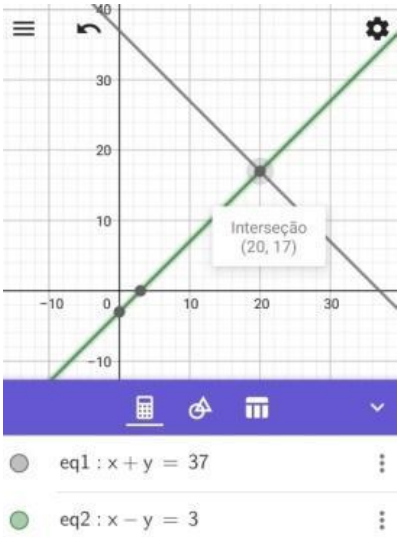

Fonte: arquivo das autoras

A grande maioria trabalhou com atribuição de valores para $x$ e, por meio de cálculos, encontrou o valor correspondente de $y$, como podemos observar na figura anterior. Salientamos que, nas primeiras duas etapas, os procedimentos empregados na interpretação do problema (i) e na resolução de sistema de equações (ii) guardam mais semelhanças de família se comparados à etapa de identificação do problema (iii). Essas semelhanças possivelmente facilitaram a resolução por cálculo mental.

Na identificação dos pontos pertencentes a cada uma das retas, predomina o jogo de linguagem algébrico, cuja característica é ser mais específico e rigoroso em sua gramática. Analisando a prática dos estudantes em preferir cálculos escritos a cálculos mentais, consideramos que eles podem não ter compreendido que a regra do cálculo mental funcionaria para qualquer equação. Optando pela técnica escrita de cálculos, a prática dos estudantes aproxima-se do jogo de linguagem praticado no ambiente escolar, marcado pelo registro escrito, sinônimo de rigor na produção matemática (KNIJNIK *et al*, 2012).

Cabe mencionar que essa etapa foi realizada com auxílio do aplicativo GeoGebra, que, pelo menos, um dos integrantes de cada grupo possuía instalado em seus telefones celulares. O aplicativo contribuiu no processo de verificação das soluções encontradas pelos estudantes, pois ao digitar as equações e os pares ordenados calculados pelos estudantes deveria haver uma coincidência, isto é, os pontos desses pares ordenados teriam que pertencer à reta da equação.

**Figura 5.** Imagem das retas modeladas no problema E pelo aplicativo GeoGebra



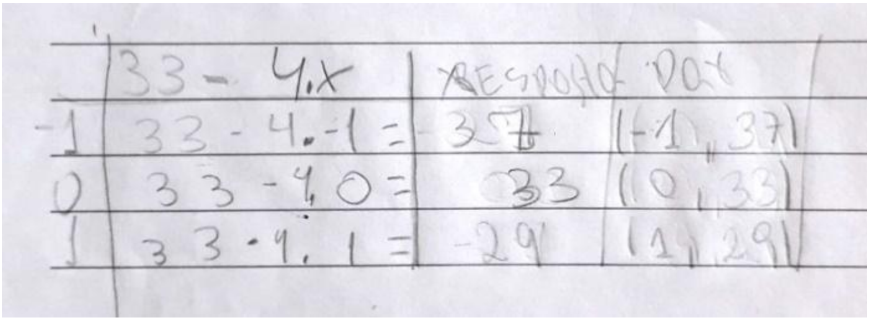

Fonte: arquivo das autoras

Essa prática forneceu maior autonomia para os estudantes, em contrapartida, quando esses pontos não estavam sobre a reta da equação, eles tiveram muitas dificuldades em encontrar o erro. Segundo a filosofia de Wittgenstein (2000), um erro ocorre porque não se possui clareza da gramática aplicada no jogo de linguagem. Nossa experiência mostrou que a maior parte dos erros surgia na aplicação das regras em operações matemáticas com números inteiros.

Ao iniciar a revisão das operações com números inteiros, a maioria da turma afirmava, sem dificuldades, frases do tipo: “Mais com mais dá mais; Menos com menos dá mais; Menos com mais dá menos; Mais com menos dá menos.” Ou ainda: “Sinais iguais mais; Sinais diferentes menos.” Sabemos que essas regras são aplicadas em operações de multiplicação e divisão.

Entretanto, o principal obstáculo apresentou-se no momento em que precisavam determinar em quais situações deveriam aplicar essas regras. Quando estamos trabalhando com soma ou subtração de números inteiros, as regras matemáticas aplicadas são outras, ainda que na prática às vezes resultem em uma mesma resposta. Uma maneira adequada de enunciar as regras para soma ou subtração com números inteiros pode ser: “Sinais iguais, soma e conserva o sinal” e “Sinais diferentes, subtrai e conserva o sinal do maior”. Observamos que a maioria dos erros ocorria porque alguns estudantes aplicavam a regra de multiplicação e divisão em operações de soma e subtração. Para exemplificar esse raciocínio, discutiremos o problema B:

**Figura 6.** Identificação dos pares ordenados do Problema B



Fonte: arquivos das autoras

Atribuindo $x = -1$ na equação $33 - 4x = y$, temos $33 - 4(-1)$, vemos que $-4$ multiplica $-1$, pela regra “menos com menos dá mais”, $+4$. Continuando $33 + 4$, pela lógica dos alunos a regra aplicada era “mais com mais dá mais”, logo a resposta é $+37$, o que resulta verdadeiro, porém pela gramática errada, a justificativa correta é “sinais iguais, soma e conserva o sinal”. No pensamento dos estudantes, se a resposta está correta, eles conseguiram aprender o conteúdo.

Na terceira tentativa, segundo a figura 6 (seis), atribuindo $x = 1$ na equação $33 - 4x = y$, temos $33 - 4(1)$, vemos que $-4$ multiplica $+1$, pela regra “menos com mais dá menos”, resposta $-4$. Continuando $33 -$

4, utilizando a regra adotada pelos alunos “mais com menos dá menos”, temos $-29$. Ainda que os estudantes realizem a subtração $33 - 4$, eles aplicam a regra de sinais equivocadamente, escrevendo 29 com sinal negativo (observamos o sinal apagado na coluna central na figura 6 (seis), após intervenção da professora).

Compreender as razões dos erros dos estudantes com relação aos sinais demandou bastante diálogo com os grupos, nos quais se verificava essa confusão. Segundo Junior e Silveira (2019), as confusões acontecem ao assumir que existe algo intrínseco às imagens matemáticas, quando se trata de regras práticas adotadas por convenções. Para grande parte dos estudantes, havia um problema com a regra, pois funcionava em uns casos e em outros, não. Por meio de exemplos de aplicação dessas gramáticas e buscando semelhanças de família com outros jogos de linguagem, conseguimos esclarecer o uso da Matemática nos sistemas de equações. Para os referidos autores: “[...] é preciso que o aluno aceite certas convenções, é preciso que ele aceite o novo formato de cálculo presente na álgebra, que é diferente da aritmética, e que seja inserido no uso contínuo das regras desse novo jogo de linguagem” (JUNIOR; SILVEIRA, 2019, p. 34). Existem semelhanças entre os jogos de linguagem algébricos e em outros jogos de linguagem na Matemática, mas cada jogo opera com certa autonomia que é definida pela sua gramática e seus usos.

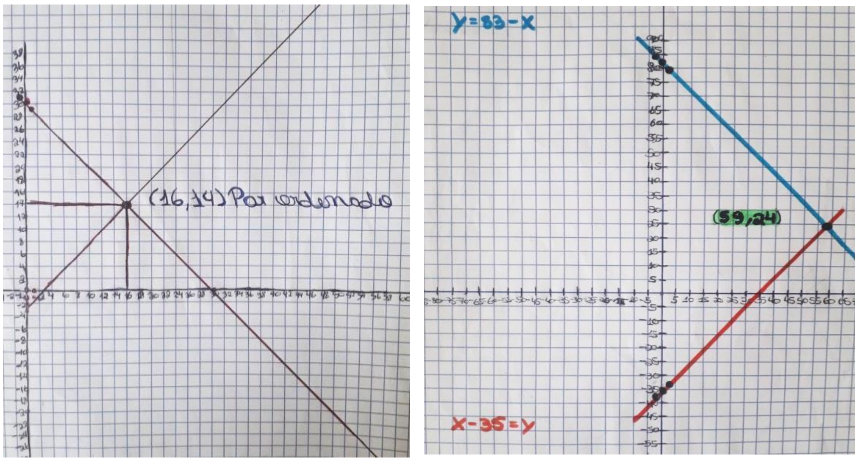
Após os grupos conseguirem identificar pelo menos dois pares ordenados de cada uma das equações era o momento de representa-los no plano cartesiano.

## Sistemas de equações e retas no plano cartesiano

O estudo de sistemas de equações pode ser realizado de várias maneiras, não necessariamente precisa do jogo de linguagem gráfico no plano cartesiano para apresentar suas soluções. Porém, entendemos que a variedade de jogos de linguagem possibilita uma visão ampla e articulada da Matemática. Essa etapa foi realizada em folha quadriculada e com auxílio aplicativo GeoGebra. Existem muitas semelhanças entre construir um plano cartesiano em folha quadriculada e o uso do aplicativo GeoGebra. Ambos possibilitam o estudo de interseção de retas de um sistema de equações, cada um com sua gramática. No aplicativo, é preciso saber onde digitar as informações, que símbolos usar para obter a equação estudada, permite mobilidade e interação mais rápidas do usuário. Na folha quadriculada, o plano deve ser construído e escolhido o intervalo entre os números dos eixos, qualquer descuido na sua construção ou das retas implica refazer as etapas. Podemos perceber que a forma como utilizamos esses dois instrumentos de aprendizagem possuem semelhanças, porém são jogos de linguagem diferentes, justamente porque seu uso pressupõe gramáticas distintas (WITTGENSTEIN, 2000).

Para podermos utilizar o aplicativo nas aulas foi preciso ensinar seus recursos básicos para o estudo de sistemas de equações, assim a garantia de sua funcionalidade estava atrelada à capacidade de os estudantes digitarem as informações corretamente. Quanto à construção do plano cartesiano em folha quadriculada, foi necessário que cada grupo estabelecesse um padrão no intervalo entre os pontos. Em alguns casos, essa variação foi de uma unidade, em outros de duas ou cinco unidades, dependendo dos pares ordenados encontrados nas etapas anteriores.

**Figuras 7 e 8.** Intervalos dos gráficos em duas unidades e cinco unidades




Fonte: arquivo das autoras

Deveria haver semelhanças entre os gráficos construídos no aplicativo e na folha quadriculada, quando isso não ocorria o grupo precisava investigar onde estavam os erros. Pudemos observar que houve poucos equívocos na utilização do aplicativo durante esta experiência. A maior parte dos erros dos alunos e alunas nessa etapa ocorreu pela falta de um padrão na escrita dos intervalos. Ao marcar os pares ordenados de uma equação no plano, esperamos que eles formem uma reta, ao construir intervalos sem um padrão de repetição, isso não acontece. Por isso, muitos grupos tiveram que refazer os gráficos.

Esse processo teve mediação da professora, questionando e auxiliando na identificação dos erros matemáticos. Além disso, buscamos analisar a qualidade da aprendizagem, uma das perguntas procurou saber como os estudantes sabiam se o gráfico estava correto:

> Porque os pontos deram bem certinho (Aluna K).
>
> Porque quando coloquei no celular ficou igual (Aluna V).

Essa etapa ficou caracterizada principalmente pelo rigor na escrita matemática, vários elementos tiveram que ser manipulados para obter as respostas esperadas. Exigiu dos estudantes utilização de várias formas de linguagem convergindo para um mesmo tópico de estudo.

Além da construção das retas, os estudantes teriam que verificar que sua interseção coincidisse com a resposta encontrada na solução dos sistemas de equações. Por meio de observações em aula, percebemos que, para alguns estudantes, não ficou clara a relação entre a solução dos sistemas e a interseção de retas. É possível que os estudantes precisassem de mais tempo para estabelecer conexões entre esses jogos de linguagem com exemplos de sistemas que não possuem soluções e aqueles que possuem mais de uma solução. Para Wittgenstein (2000, Aforismo 130): “Os jogos de linguagem, estão aí, antes, como objetos de comparação que, pela semelhança e dessemelhança, devem lançar uma luz nas relações da nossa linguagem”. Segundo o filósofo, além do trabalho com a clareza das regras, os exemplos de como funciona a linguagem em determinado contexto e a de funcionalidade a comparação com outras formas de emprego podem auxiliar na produção de sentidos da linguagem.

## Considerações finais

Neste estudo, investigamos de que maneira podemos compreender o ensino e a aprendizagem de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas como jogos de linguagem. A filosofia pragmática de Wittgenstein (2000) permite pensar a existência de várias formas de matematizar, com semelhanças e diferenças, marcadas pelas formas de vida em que são utilizadas. Na forma de vida escolar, o ensino de sistemas de equações implica a aplicação de regras próprias dos jogos de linguagem aritmético, algébrico e gráfico e também a escrita de problemas.

A fim de possibilitar uma visão ampla do tema, utilizamos variados jogos de linguagem, proporcionando aos estudantes aprender suas gramáticas, mesmo que, em alguns momentos, sem dominá-las totalmente. Apoiados nos jogos de linguagem presentes nos livros didáticos, aplicativos de celular, apresentamos como as linguagens matemáticas funcionam nesses contextos, para que os estudantes possam manipulá-las.

Muitas vezes, ocorreu uma compreensão equivocada das regras. As respostas não condiziam com o esperado, era preciso revisitar a gramática do jogo de linguagem estudado. Foi no uso das linguagens que as capacidades de compreender os jogos foram colocadas à prova. Na interpretação do problema, foi preciso definir nexos entre palavras e escrita matemática; na resolução de equações, compreender relações dos valores desconhecidos e técnicas para encontrá-los é fundamental, o domínio nas operações com números inteiros mostrou-se indispensável na identificação dos pares ordenados e, por fim, a construção de retas no plano cartesiano expos aos estudantes o rigor e precisão desses jogos de linguagem.

Para concluir, a perspectiva da fase de maturidade de Wittgenstein no ensino de Matemática reflete sobre a importância dos exemplos, da observação das práticas matemáticas e da clareza das regras. Não espera que os estudantes descubram relações ou significados matemáticos nos temas de estudo, antes ensina e incentiva a aplicá-lo em contextos que sua gramática permite.

Recebido em: 24/03/2020
Aprovado em: 22/07/2020

## Referências

CONDÉ, M. L. L. **Wittgenstein linguagem e mundo**. São Paulo: Annablume, 1998.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris Matemática**: **ensino fundamental**. São Paulo: Ática (ed. 2.2.), 2015.

GOTTSCHALK, C. M. C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cadernos Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 75-96, 2008.

JUNIOR, V. P. T.; SILVEIRA, M. R. A. O ensino de álgebra e a filosofia de Wittgenstein: sobre regras e essência. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 21, n. 3, p. 29-49, 2019.

KNIJNIK, G. *et al*. **Etnomatemática em movimento.** Belo Horizonte: Autêntica, n. 25, 2012.

MINAYO, M. C. S. Análise qualitativa: teoria, passos e fidedignidade. **Ciênc. saúde coletiva**, Rio de Janeiro, v. 17, n. 3, p. 621-626, 2012.

MORENO, A. R. **Wittgenstein: através de imagens.** Campinas: Editora da UNICAMP, 1993

SILVEIRA, M. R. A.; SILVA, P. V.; JÚNIOR, V. P. T. A terapia filosófica wittgensteiniana: perspectivas para a Educação Matemática. **Educação, Ciência e Cultura**, v. 23, n. 1, p. 161-175, 2018.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas.** São Paulo: Editora Nova Cultural, 2000.