emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2020v7i3p47-64

Dificuldades de licenciandos em Matemática na resolução de inequações sob a luz da interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais

Difficulties of under-graduates in Mathematics in solving inequalities in light of the interaction of algorithmic, intuitive and formal aspects.

Otavio Paciullo Furquim[1]
Gabriel Oliveira Pinto[2]
William Vieira[3]
Roberto Seidi Imafuku[4]

RESUMO

Apresenta-se, neste artigo, uma análise da resolução de duas inequações aplicadas para 42 ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática. Os objetivos foram detectar e classificar os principais erros e dificuldades dos participantes na resolução de inequações. As respostas foram classificadas segundo uma análise de erros. A interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais são as ideias teóricas adotadas na investigação. A análise dos protocolos revelou que a maioria dos participantes desconhece técnicas básicas de resolução de inequações e tem incompreensões de natureza formal relacionadas ao tema avaliado.

Palavras-chave: *Aspectos algorítmicos, intuitivos e formais; Análise de erros; Inequações; Educação matemática.*

1. Licenciando em Matemática. IFSP – campus Guarulhos. Bolsista de Iniciação Científica do CNPq. E-mail: otaviopfurquim@gmail.com
2. Licenciando em Matemática. IFSP – campus Guarulhos. E-mail gabrieloliveira brotero@gmail.com
3. Doutor em Educação Matemática. IFSP – campus Guarulhos. E-mail wvieira@ifsp.edu.br
4. Doutor em Educação Matemática. IFSP – campus Guarulhos. E-mail roberto. imafuku@ifsp.edu.br

ABSTRACT

In this article, we present an analysis of the resolution of two inequalities applied to 42 students entering a math licentiate degree. The objectives were to detect and classify the main errors and difficulties of the participants in the resolution of inequalities. Responses were classified according to an error analysis. The interaction of algorithmic, intuitive and formal aspects are the theoretical ideas adopted in the research. The analysis of the protocols revealed that the majority of the participants are unaware of basic techniques of solving inequalities and have misunderstandings of a formal nature related to the evaluated theme.

Keywords: *Algorithmic, intuitive and formal aspects; Error Analysis; Inequations; Mathematical Education.*

Introdução

Igualdades e desigualdades são temas bastante importantes e amplamente utilizados em programação, no estudo de estatística, para modelar situações do cotidiano onde se procura um intervalo de valores como solução, nas ciências e na Matemática, por isso, merecem destaque nos programas oficiais para o ensino de Matemática da Educação Básica brasileiro (BRASIL, 2017; SÃO PAULO, 2012) e internacionais (PONTE *et al*., 2007; OCDE, 2016).

No caso das inequações, as orientações para o ensino aparecem no currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2012), pela primeira vez, no 8º ano do Ensino Fundamental, que indica que as habilidades de "compreender situações-problema que envolvem proporcionalidade, sabendo representá-las por meio de equações ou inequações e saber expressar de modo significativo a solução de equações e inequações de 1º grau" (SÃO PAULO, 2012, p. 62) devem ser desenvolvidas pelos estudantes. No Ensino Médio, o tema volta a ser indicado ao longo dos três anos, na 1a série no estudo de funções do 1º e 2º graus, exponencial e logarítmica; na 2a série no assunto trigonometria e na 3a série no estudo da geometria analítica (SÃO PAULO, 2012). Essas orientações oficiais reiteram a importância e relevância do estudo de inequações na formação matemática de estudantes do ensino básico.

Vale ressaltar que, apesar da BNCC (BRASIL, 2017) valorizar o desenvolvimento do conhecimento algébrico dos estudantes desde o começo do Ensino Fundamental II, diferente das equações, que são amplamente citadas e têm até mesmo metas a serem cumpridas no final do ciclo, as inequações são poucas vezes citadas e não possuem nenhuma meta para ser cumprida até que os estudantes ingressem no Ensino Médio.

No entanto, apesar das indicações e recomendações para o ensino deste tema, pesquisas como as de Tsamir, Almog e Tirosh (1998), Fontalva (2006), Mata-Pereira e Ponte (2013), Mineiro (2019) e Travassos e Proença (2018) vêm apontando, ao longo dos anos, para formação precária e deficiente de estudantes na resolução de inequações.

Tsamir, Almog e Tirosh (1998), em investigação para avaliar de que maneira os estudantes do Ensino Médio israelense raciocinam durante a resolução de inequações, aplicaram um questionário para 160 participantes e analisaram, sob a luz dos aspectos formais, algorítmicos e intuitivos definidos por Fischbein (1994) os diferentes métodos de resolução utilizados. Em suas conclusões, os autores apontam que os estudantes utilizaram manipulações algébricas, quadros de sinais e gráficos durante suas resoluções e destacam que "[...] aqueles que utilizaram o método de resolução gráfica geralmente acertaram as questões" (TSAMIR; ALMOG; TIROSH, 1998, p. 7). Além disso, verificou-se que os participantes da pesquisa recorrentemente utilizaram métodos de resolução de equações para resolver inequações, pois "[...] as fortes similaridades estruturais entre equações e inequações criaram uma forte intuição de que as estratégias utilizadas na resolução de equações deveriam também ser válidas para a resolução de inequações" (TSAMIR; ALMOG; TIROSH, 1998, p. 8), situação que levava os sujeitos a não terem sucesso em suas resoluções.

Souza (2008), em sua pesquisa de doutorado, apresentou uma proposta de intervenção para o estudo de inequações baseada em uma abordagem não apenas algébrica, mas também gráfica. Para preparar a sequência de atividades, a autora analisa as respostas dadas por alunos do primeiro ano da formação inicial em Matemática e professores de formação continuada à um pré-teste que envolvia a resolução de inequações. O referencial teórico da investigação é a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos (FISHBEIN, 1994). Em suas conclusões, a autora destaca que "[...] a maioria deles não domina aspectos formais que chamamos de lógicos e têm, com bastante ênfase, aspectos intuitivos numéricos" (SOUZA, 2008, p. 251).

Em sua pesquisa, Fontalva (2006) analisou as respostas de questões que pediam que os alunos do Ensino Médio de uma escola estadual de São Paulo resolvessem diversas inequações. Segundo ele, os participantes recorreram majoritariamente a resoluções algébricas, mesmo quando esse tipo de estratégia não era a mais econômica do ponto de vista dos processos, e também não foram capazes de explicitar quais as propriedades que justificavam cada um dos passos das resoluções que empregaram. Fontalva concluiu que para os participantes de sua pesquisa "[...] o processo ensino-aprendizagem dos tópicos de equações e inequações privilegiou o aspecto algorítmico (técnicas) em detrimento do aspecto conceitual (conceitos, propriedades, princípios...)" (FONTALVA, 2006, p. 122).

A extensão do uso de técnicas de resolução de equações para resolver inequações também foi identificado por Mata-Pereira e Ponte (2013). Esses pesquisadores aplicaram um questionário com inequações para alunos dos 8º e 9º anos da educação básica portuguesa, com o qual buscavam observar não somente as respostas, mas principalmente as justificativas para as manipulações algébricas realizadas pelos participantes e verificaram que "[...] os alunos não dão relevância às características necessárias para que [as manipulações algébricas] sejam válidas" (MATA-PEREIRA & PONTE, 2013, p. 28) e que, com isso "[...] seguem uma abordagem indutiva, generalizando as relações observadas num caso particular (equações) para uma classe de objetos mais ampla (inequações)" (MATA-PEREIRA & PONTE, 2013, p. 28).

Em sua tese de doutorado, Mineiro (2019) buscou analisar como o estudo de inequações era abordado nos documentos oficiais e como isso se refletia na sala de aula, bem como nos resultados de provas à nível nacional. O cenário encontrado foi que apenas 20% dos estudantes de nível médio acertaram questões contextualizadas sobre o tema de inequações. O autor atribui essa ocorrência pela maneira como os documentos oficiais tratam o tema, apenas como uma extensão do tema de equações. Segundo ele, "a crença de que técnicas utilizadas na resolução de equações sejam sempre eficazes para a resolução de inequações parece estar na raiz de grande parte dos problemas associados à falta de compreensão a respeito das inequações" (MINEIRO, 2019 p. 213).

Travassos e Proença (2018a) solicitaram a 16 estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática do estado do Paraná (4 em cada um dos quatro anos de formação) que resolvessem oito inequações de primeiro grau com uma variável, com níveis de dificuldades crescente. Os resultados evidenciaram dificuldades dos participantes em compreender os enunciados propostos e dificuldades relacionadas a resolução das inequações valendo-se apenas de elementos de resolução de equações, o que ocasionou erros como a não inversão dos sinais de desigualdade ao multiplicar a expressão por um valor negativo.

Além disso, Travassos e Proença (2018b) também analisam a situação da publicação acadêmica no Brasil no que diz respeito ao ensino e aprendizagem de inequações. Nesse artigo, eles apontam que "[...] os resultados aqui obtidos evidenciam, de modo geral, um número muito pequeno de trabalhos que contribuam com tema em questão, pressupondo-se assim a necessidade de um olhar mais atento a estes fatos por parte de professores e pesquisadores" (TRAVASSOS & PROENÇA, 2018b, p.10).

Entendemos que uma maneira de colaborar com a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem de inequações passa pela formação dos futuros professores de Matemática e, por isso, em nossa investigação estamos interessados em classificar os principais erros e dificuldades de ingressantes de um curso de Licenciatura em Matemática do estado de São Paulo na resolução de inequações, com o objetivo de explicitar as dificuldades apresentadas pelos estudantes com relação ao tema de inequações. Para isso, decidimos aplicar duas inequações para quarenta e dois licenciandos em Matemática selecionados. As respostas foram analisadas segundo a análise de erros proposta por Cury (2007). A interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais colocada por Fischbein (1994) é o referencial teórico adotado na análise dos protocolos.

No que segue, apresentamos as ideias colocadas por Fischbein.

Referencial teórico

Fischbein (1994) argumenta sobre a necessidade de observarmos se há ou não a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos num sujeito em atividade matemática. Segundo ele, isto significa olhar a Matemática como um processo criativo, uma atividade humana, que envolve momentos de "iluminação, hesitação, aceitação e refutação" (FISCHBEIN, 1994, p. 231). Partindo dessa premissa, entendemos que a interação desses três aspectos deve guiar nossas escolhas e práticas, se desejamos que nossos estudantes sejam capazes de produzir afirmações e provas matemáticas e de avaliar, formal e intuitivamente, a validade dessas produções.

No que segue, descrevemos brevemente cada um dos aspectos considerados neste trabalho.

O aspecto formal refere-se a axiomas, definições, teoremas e demonstrações e Fischbein reitera que "[...] têm de penetrar como um componente ativo do processo de raciocínio. Devem ser inventados ou aprendidos, organizados, checados e usados ativamente pelo estudante" (FISCHBEIN, 1994, p. 232), uma vez que compõem o núcleo da Matemática e precisam ser considerados no processo de criação nessa ciência. Este autor aponta ainda que o pensamento proposicional e as construções hipotético-dedutivas não são adquiridos espontaneamente pelos sujeitos e que só um adequado processo de ensino pode promover essa aquisição.

O aspecto algorítmico corresponde às técnicas e procedimentos de resolução, que têm caráter fundamental nos processos de entendimento e de criação, pois só o conhecimento das estruturas formais não é suficiente para conferir a habilidade de resolver problemas. Segundo Fischbein (1994, p. 232), "[...] Esta profunda simbiose entre significado e habilidades é uma condição básica para o produtivo e eficiente raciocínio matemático".

O aspecto intuitivo diz respeito a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva, ou seja, o que um sujeito considera auto evidente e não vê necessidade de prova ou justificativa (FISCHBEIN, 1994), como afirmações do tipo 'A parte é menor que o todo', o que nem sempre é verdade, afinal, o conjunto dos números naturais é parte do conjunto dos números inteiros, mas não tem cardinalidade menor do que o conjunto dos números inteiros ou pensar que 'Multiplicar um número sempre o torna maior' ou ainda resolver uma inequação como se fosse uma equação. Esse conhecimento intuitivo exerce um papel coercitivo no raciocínio, definindo caminhos e estratégias para a resolução de problemas que, se estiverem de acordo com verdades logicamente justificáveis, podem facilitar o processo; caso contrário, podem configurar dificuldades e conduzir a contradições e equívocos, como os destacados nesse parágrafo.

Fischbein *et al*. (1981) destacam que o conceito de intuição não está claramente definido e diferentes autores apresentam várias interpretações, mas a imediatez desse conhecimento é comumente aceita. Para nós, apresentar uma solução ou interpretação intuitiva significa lançar mão de um conhecimento sem que seja necessária uma justificativa formal consciente para ele. Por exemplo, aceitamos e usamos intuitivamente que por dois pontos passa uma única reta e que a qualquer parte de algo é menor do que seu todo, sendo esse um conceito relacionado ao campo multiplicativo, nas divisões, que nem sempre é verdadeiro.

Sobre o papel do conhecimento intuitivo no processo de aprendizagem, Fischbein *et al*. (1981) alertam que é importante identificar os vieses intuitivos naturais do indivíduo, porque podem afetar conceitos, interpretações, compreensões e a capacidade de resolver e de memorizar. Como indivíduos, somos inclinados a manter interpretações que se adequam a esses vieses naturais e intuitivos e a esquecer ou distorcer aqueles que não se encaixam.

Sobre a interação de aspectos intuitivos e formais, Fischbein (1994) defende que a capacidade de processar uma informação não é controlada somente pelas estruturas lógicas, mas também por modelos intuitivos, que agem de maneira implícita, colocando restrições e definindo caminhos. E a influência desses modelos no pensamento matemático é mais importante e decisiva do que se acredita e permanece agindo, mesmo após as estruturas formais do raciocínio estarem desenvolvidas.

Essas são as ideias teóricas que embasam nossas análises. No que segue, apresentamos os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa.

Procedimentos Metodológicos

Para atingir nossos objetivos, um questionário com seis questões que tratavam sobre funções e inequações foi aplicado para uma turma de quarenta e dois ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública de ensino do Estado de São Paulo no início do ano de 2019. Neste artigo, analisaremos apenas a questão com dois itens que tratava sobre inequações. O questionário foi respondido individualmente, com duração máxima de uma hora e meia, no campus em que os participantes estudam, no horário de aula das disciplinas. Não foi permitido nenhum tipo de consulta a materiais externos e o pesquisador não forneceu nenhuma informação adicional, além daquelas constantes na questão proposta.

No que segue, apresentamos a questão proposta na pesquisa e destacamos seu objetivo.

Questão Proposta - Resolva as inequações em R:

a) $\frac{5}{x} < \frac{5}{2}$

b) $x^2 \geq 25$

Com essa questão, nosso objetivo foi verificar se os participantes inter-relacionam aspectos algorítmicos, intuitivos e formais na resolução de inequações e como articulam técnicas algébricas para a resolução das inequações propostas.

No item **a**, acreditamos que o intervalo que pode ser obtido com o emprego de técnicas de resolução do tipo 'multiplicar em cruz' seja encontrado pela maioria dos participantes. No entanto, estamos interessados em observar se os estudantes atentam para o fato de que todos os números negativos também verificam a desigualdade e, dessa forma, encontrem $S = \{x \in R \mid x > 2 \; ou \; x < 0\}$ como solução da inequação.

No item **b** buscamos avaliar se os participantes são capazes de transitar entre as representações algébrica e gráfica no processo de resolução de uma inequação do 2º grau e, com isso, identificar $S = \{x \in R \mid x \geq 5 \; ou \; x \leq -5\}$ como a solução deste item.

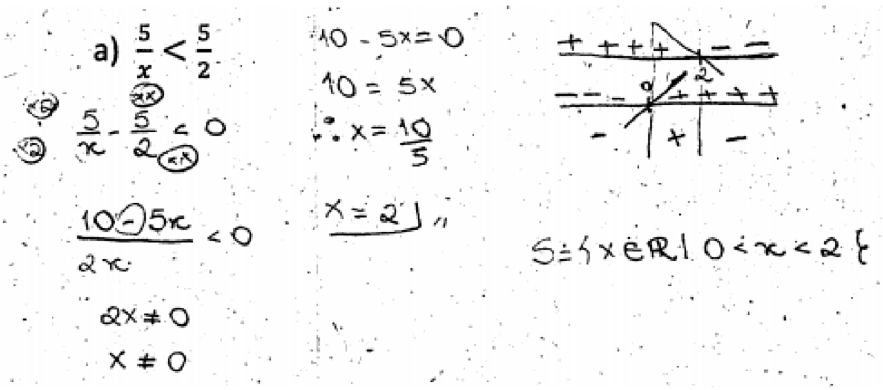
Em seguida, foi realizada uma avaliação das respostas dadas pelos participantes, acompanhada de uma Análise de Erros proposta por Cury (2007). Este procedimento metodológico está baseado em uma análise de conteúdo, que visa identificar classes de erros que são recorrentes nas resoluções de problemas. Por fim, foi elaborado um quadro que apresenta as frequências e os percentuais que cada tipo de erro identificado ocorreu.

Todos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e são tratados por apelidos nas análises dos dados coletados, de modo a garantir o anonimato dos participantes.

Discussão dos resultados

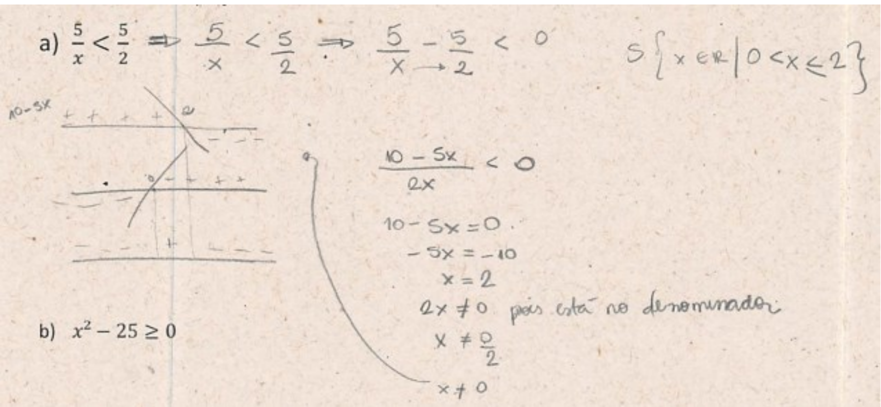
A análise dos protocolos revelou que, no item a, as estudantes Ana (Figura 1) e Bia (Figura 2) foram aquelas que chegaram mais próximas de uma resposta correta. Elas apresentaram desenvolvimento de técnicas de resolução de inequações corretas, porém confundiram-se ao final dos processos e anotaram soluções contrárias às desejadas pelo problema.

Figura 1. Resposta de Ana para o item a



Fonte: Dados da pesquisa

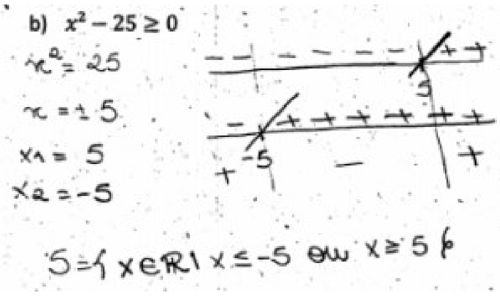
Figura 2. Resposta de Bia para o item a



Fonte: Dados da pesquisa

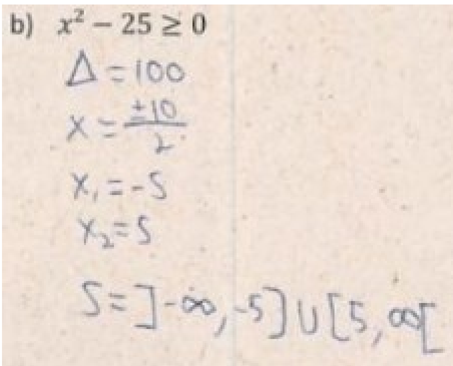
No item **b**, a análise dos protocolos revelou que dois dos quarenta e dois participantes (5%) acertaram a inequação proposta. A Figura 3 e a Figura 4 trazem as respostas corretas de Bia e Caio, respectivamente.

Figura 3. Resposta de Bia para o item b



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 4. Resposta de Caio para o item b



Fonte: Dados da pesquisa

Neste caso, é interessante observar que Caio (Figura 4) não registrou a 'técnica do varal' para o estudo do sinal e a obtenção de sua resposta, como foi o caso de Bia.

No Quadro 1 apresentamos uma classificação dos erros das respostas consideradas incorretas e, em seguida, exemplificamos cada um dos erros identificados. Ressaltamos que uma mesma resposta pode ser enquadrada em mais de uma classe de erro, por isso a soma dos percentuais das classes não totaliza 100%.

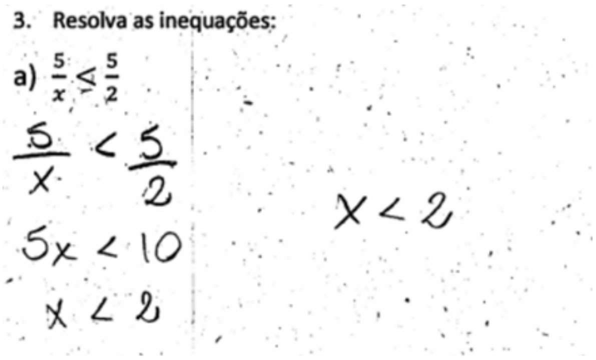
Quadro 1. Erros identificados nas resoluções dos participantes

	Erro	Freq.	%
A1	Inverter a desigualdade no item **a**	12	29%
A2	Não considerar os valores de x menores que zero no item **a**	26	62%
A3	Tratar a desigualdade como uma igualdade no item **b**	30	71%
A4	Fazer a representação gráfica do intervalo errado em algum dos itens	7	17%
A5	Resposta em branco no item **a**	5	11%
A6	Resposta em branco no item **b**	5	11%

Fonte: Elaborado pelos autores

A resposta de Denise (Figura 5) exemplifica o erro da categoria A1, *Inverter a desigualdade no item **a**,* que ocorreu em 29% das respostas. A categoria abrange respostas para o item **a** e são situações nas quais, após realizarem alguma manipulação algébrica para isolar a incógnita (como em uma equação), os participantes inverteram a desigualdade, encontrando o intervalo incorreto. Entendemos que esse tipo de resposta explicita uma dificuldade dos participantes relacionadas aos aspectos formais e algorítmicos. Nelas, os estudantes aparentam não compreender o significado de inequação (aspectos formais) e não dominarem as técnicas algébricas relacionadas a resolução de inequações (aspectos algorítmicos) e com isso não compreendem em que casos e porquê a inversão da desigualdade deve ser feita.

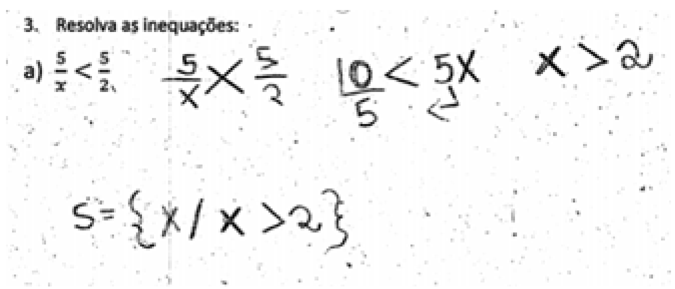
Figura 5. Resposta de Denise para o item a



Fonte: Dados da pesquisa

A resposta de Emanuel (Figura 6) exemplifica a classe de erros A2, *Não considerar valores de x menores que zero no item **a**,* que ocorreu em 62% das respostas. A categoria abrange situações em que os participantes da pesquisa encontraram corretamente o intervalo $x > 2$ como solução da inequação do item **a**; contudo, deixaram de indicar a possibilidade dos valores negativos como solução da inequação, tornando suas respostas incompletas. Esse tipo de resposta pode ser fruto de um aspecto intuitivo equivocado, o de entender que é possível reproduzir técnicas de resolução de equações em inequações. Ao utilizar uma abordagem puramente algébrica para a resolução dessa inequação, a maioria dos estudantes não considerou o intervalo dos números negativos como uma possível resposta.

Figura 6. Resposta de Emanuel para o item a



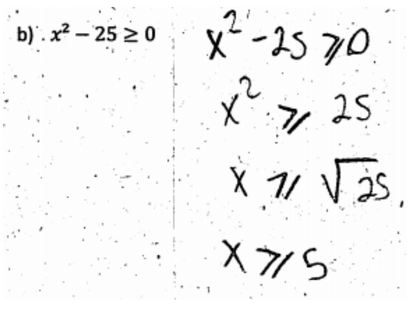
Fonte: Dados da pesquisa

Nessa classe de erros, invariavelmente, os participantes realizaram uma ‘multiplicação em cruz’ na resolução da inequação, perspectiva que os conduziu ao erro. Comportamento semelhante foi observado por Souza (2008), em que 75% dos participantes de sua pesquisa aplicaram a técnica para responder a uma inequação semelhante.

Além disso, nenhum dos participantes de nossa pesquisa considerou aspectos formais relacionados ao princípio multiplicativo das inequações, perspectiva também identificada por Mata-Pereira e Ponte (2013) que constataram que “[...] os alunos não dão relevância às características necessárias para que [as manipulações algébricas] sejam válidas” (MATA-PEREIRA & PONTE, 2013, p. 28).

A resposta de Felipe (Figura 7) representa o erro da categoria A3, *Tratar a desigualdade como uma igualdade no item **b***, que ocorreu em 71% das respostas e foi o mais recorrente entre os participantes da pesquisa. A categoria engloba as respostas em que os participantes isolaram a incógnita por meio de métodos de resolução de equação incompleta do 2º grau e encontraram um intervalo incorreto como solução da inequação. Essas respostas podem mostrar que os participantes não entendem equações e inequações como objetos matemáticos diferentes, o que é um erro relacionado aos aspectos formais. Além disso, assim como no erro A2, *Não considerar valores de x menores que zero no item **a***, os estudantes com respostas enquadradas nessa categoria aparentam possuir um aspecto intuitivo equivocado, que faz com que eles utilizem técnicas de resolução de equações para encontrar os conjuntos soluções de inequações.

Figura 7. Resposta de Felipe para o item b



Fonte: Dados da pesquisa

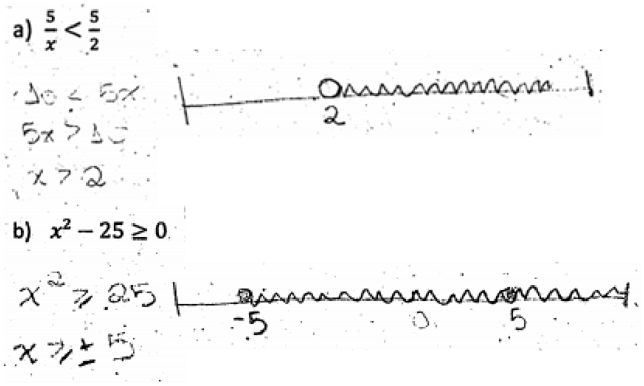
Esse tipo de erro também foi identificado por Fontalva (2006), que aponta que, na resolução de inequações do 2º grau "[...] 68,2% dos alunos que erraram (os itens que continham inequações do 2º grau) cometeram um erro do tipo 'conexões sem sentido com raízes quadradas'" (FONTALVA, 2006, p. 63).

A análise dos protocolos indica que os participantes de nossa pesquisa estendem os aspectos intuitivos e algorítmicos da resolução de equações para a resolução de inequações. Entendemos que uma explicação para essa situação está relacionada "[...] as fortes similaridades estruturais entre equações e inequações criaram uma forte intuição de que as estratégias utilizadas na resolução de equações deveriam também ser válidas para a resolução de inequações" (TSAMIR; ALMOG; TIROSH, 1998, p. 8).

As respostas de José (Figura 8) para as inequações evidenciam um erro relacionado aos aspectos formais, ao denotar a reta real de forma incorreta, com pequenos traços em suas extremidades. As resoluções deste participante mostram uma não interação dos aspectos formais e algorítmicos e enquadram sua resposta no erro A2, *Não considerar os valores negativos no item **a***.

O estudante também não atenta ao fato de que os números negativos satisfazem a equação, esse erro pode ter sido causado por uma não compreensão dos conceitos de inequação, e assim também comete o erro do tipo A3, *Tratar desigualdade como igualdade no item **b***. As resoluções de inequações usando métodos de equação acabam por evidenciar uma dificuldade dos participantes em compreender e diferenciar as inequações das equações. Por fim, sua resposta também apresenta o erro A4, *Fazer a representação gráfica do intervalo errado em algum dos itens*, erro que enquadra as respostas dos estudantes que não articularam aspectos algorítmicos e intuitivos para encontrar e representar os intervalos que são soluções das inequações de forma correta.

Figura 8. Resposta de José para a Questão proposta



Fonte: Dados da pesquisa

Além disso, cinco estudantes deixaram o item **a** em branco e outros cinco deixaram o item **b** em branco, as respostas em branco podem ter sido causadas por um receio dos estudantes em dar a resposta errada.

Considerações finais

De maneira geral, entendemos que as dificuldades apresentadas pelos participantes da pesquisa na resolução da questão proposta estão relacionadas com a não interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais relativas ao trabalho com inequações.

O método de resolução mais comum do item a, em que os estudantes realizam a 'multiplicação em cruz', pode ser fruto da ideia de que uma inequação pode ser tratada como uma equação, e essa ideia, além de incorreta, não favorece a transição entre outras representações de uma inequação. Entendemos que um tipo de ensino que se apoia essencialmente no desenvolvimento de técnicas e na valorização de aspectos algorítmicos e intuitivos relacionados ao trabalho com desigualdades seja o principal responsável por esse cenário que revela muitas dificuldades dos participantes. Acreditamos que atividades de ensino que valorizem aspectos formais relacionados ao princípio multiplicativo das inequações e o trabalho com múltiplas representações como os propostos por Souza (2008) poderiam favorecer uma melhor visão dos aprendizes sobre a resolução de inequações.

A presença dos aspectos algorítmicos e intuitivos nas tentativas de responder a inequação do item a como uma equação se repetem também no item b. Os 71% de ocorrência do erro A3, *tratar a desigualdade como igualdade no item b*, reforçam essa ideia. Em todos esses casos, os participantes apenas tentaram encontrar o valor de x e assim que o fizeram deram por encerradas as resoluções, sem refletir sobre os valores encontrados. Acreditamos que avaliações, por parte dos participantes, de valores pertencentes aos intervalos encontrados nas inequações originais (aspecto algorítmicos e intuitivos) possibilitariam a verificação de que as desigualdades não eram verdadeiras para as soluções obtidas. Por exemplo, José (Figura 8) encontrou o conjunto solução $x \geq 5\ ou\ -5$, o que significa também que $x \geq -5$ e substituindo $x = 0$ na inequação original do item b encontra-se que $-25 \geq 0$, um absurdo, mas esse tipo de reflexão não foi identificada nas resoluções dos participantes de nossa investigação. Ainda, esse tipo de estratégia envolve a interação de aspectos formais, relacionados ao conceito de inequação, com aspectos algorítmicos e intuitivos relacionados ao uso das técnicas de resolução e poderia favorecer uma percepção mais crítica por parte dos estudantes sobre o trabalho com inequações.

Os resultados da pesquisa reiteram, portanto, as conclusões apresentadas por Tsamir, Algom e Tirosh (1998), Travassos e Proença (2018) e Mineiro (2019). Todos esses autores também encontraram, ao analisar as respostas dos participantes de suas pesquisas em diferentes locais e épocas, um cenário no qual estudantes utilizaram técnicas de resolução de equações para responder as inequações solicitadas, por mais que, como afirmado por Fontalva (2006) e Mata Pereira e Ponte (2013), não conseguiam justificar a validade das manipulações que realizaram.

Conforme procuramos destacar ao longo do trabalho, todos os erros e dificuldades apresentadas pelos participantes da pesquisa vêm sendo identificados e destacados por pesquisadores de Educação Matemática há mais de 20 anos. Ainda assim, Travassos e Proença (2018) analisaram o cenário das publicações sobre o ensino-aprendizagem de inequações no Brasil e concluíram que ainda são publicados poucos trabalhos com esse tema. Essas perspectivas reforçam a necessidade de mais investigações e propostas alternativas para o ensino deste tema.

É possível que os estudantes que participaram dessa pesquisa tenham passado por um tipo de ensino focado apenas em técnicas algébricas, que não privilegiou uma formação que os tornassem capazes de resolver problemas articulando mais de um modo de representação do mesmo objeto matemático. Reiteramos que, um tipo de ensino que favoreça a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais e que se valha das múltiplas representações de inequações poderia minimizar a ocorrência das dificuldades identificadas e conferir aos estudantes mais independência e autonomia na resolução de inequações.

Comum aos dois itens, o tratamento de inequações como equações revelam muitas percepções e ideias equivocadas dos participantes da pesquisa na resolução de inequações. Resta perguntar de que maneira a formação oferecida num curso de Licenciatura em Matemática será capaz de transformar os conhecimentos destes licenciandos sobre a resolução de inequações.

Recebido em: 28/05/2020
Aprovado em: 30/11/2020

Referências

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Terceira Versão ed. [S.l.]: MEC, 2017.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1a. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FISCHBEIN, E.; TIROSH, D.; MELAMED, U. Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? In: GOOS, M. (org.). **Educational Studies in Mathematics**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1981. p. 491.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In: BIEHLER, R. *et al*. (org.) **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.** Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994. p. 328.

FONTALVA, G. M. **Um estudo sobre inequações: entre alunos do Ensino Médio.** Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP. São Paulo, 2006.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. **Boletim GEPEM**. 2013.

MINEIRO, R. M. **Estudo das três dimensões do problema didático de inequações**. Tese de Doutorado. PUC-SP, São Paulo, 2019.

OCDE. **Equations and Inequalities**: Making Mathematics Accessible to All, PISA, OCDE Publishing, Paris, 2016. https://doi.org/10.1787/9789264258495-en.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, L.; GUIMARÃES, H.; BREDA, A.; GUIMARÃES, F.; SOUSA, H.; MENEZES, L.; MARTINS, M. E.; OLIVEIRA, P. **Programa de Matemática do ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação/Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular, 2007.

SÃO PAULO. Secretaria Estadual de Educação. **Currículo do Estado de São Paulo, Matemática**. SEE, 2012.

SOUZA, V. H. G. **O uso de vários registros na resolução de inequações**: uma abordagem funcional gráfica. Tese de Doutorado. PUC-SP, São Paulo, 2008.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In GOOS, M. (Org.). **Educational Studies in Mathematics**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1981. p. 151.

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In TALL, D. (Org.), **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991. p. 3-21.

TRAVASSOS, W. B.; PROENÇA, M. C. Registros de Representação Semiótica e o conceito de inequação: análise do desempenho de licenciandos em matemática à luz da congruência semântica. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 13, n. 2, p. 162-183, 2018a.

TRAVASSOS, W. B.; PROENÇA, M. C. Análise dos trabalhos do Encontro Nacional de Educação Matemática sobre o conteúdo Inequações. **Revista Valor**e, v. 3, p. 26-37, 2018b.

TSAMIR, P.; ALMOG, N.; TIROSH, D. Student's solution of inequalities; **Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (22nd, Stellenbosch,South Africa)**, 1998. Volume 4, p.143.