emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2020v7i2p282-295

TAREFAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COVARIACIONAL[1]

TASKS FOR THE DEVELOPMENT OF COVARIATIONAL REASONING

André Luis Trevisan[2]
Daniel Daré Luziano da Silva[3]
Claudete Cargnin[4]
William José Gonçalves[5]

RESUMO

O objetivo deste estudo foi o desenvolvimento de tarefas que contribuam no desenvolvimento de habilidades do raciocínio covariacional em aulas de Matemática. Com o objetivo de atribuir um design experimental à atividade matemática, por meio da integração de tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), utilizou-se o GeoGebra como recurso à investigação, em uma perspectiva de trabalho em ambientes de ensino e de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas. A elaboração fundamentou-se em referências que tratam do raciocínio covariacional e do trabalho com episódios de resolução de tarefas com integração de TDIC. A proposta apresentada tem por objetivo estimular o estudante a pensar nas situações envolvidas, na relação

1. Trabalho desenvolvido como parte do projeto “Conceitos mobilizados por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral no trabalho em episódios de resolução de tarefas de aprendizagem”, com aporte financeiro da Fundação Araucária (bolsa Produtividade do primeiro autor) e do CNPq (Bolsa de IC do segundo autor).

2. Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Docente do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT/UTFPR – Câmpus Londrina. Bolsista Produtividade da Fundação Araucária. Email: andrelt@utfpr.edu.br.

3. Discente bolsista de iniciação científica da UTFPR/Câmpus Londrina. Email: dlsilvadaniel@hotmail.com.

4. Doutora em Educação Para a Ciência e o Ensino de Matemática. Docente do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT/UTFPR – Câmpus Campo Mourão. Email: cargnin@utfpr.edu.br.

5. Mestre em Ensino de Matemática pelo PPGMAT/UTFPR – Câmpus Londrina. Professor da Educação Básica. Email: williamboatematica@gmail.com.

entre as grandezas e, a partir dessa concepção, nas suas múltiplas representações em articulação com o uso de TDIC.

Palavras-chave: *Ensino de Matemática; Tarefas Matemáticas; Raciocínio Covariacional.*

ABSTRACT

The objective of this study was the development of tasks that contribute to the development of covariate reasoning skills in Mathematics classes. In order to assign an experimental design to the mathematical activity, through the integration of digital information and communication technologies (DICT), GeoGebra was used as a resource for research in a work perspective in teaching and learning environments in episodes of task resolution. The elaboration was based on references that deal with covariational reasoning, and the work in episodes of task resolution with integration of DICT. The purpose of the present proposal is to stimulate the student to think about the situations involved, the relationship between the magnitudes and, based on this conception, their multiple representations in articulation with the use of DICT.

Keywords: *Mathematics Teaching; Mathematical Tasks; Covariational Reasoning.*

Introdução

Em geral, o contato que os estudantes tiveram com o conceito de função nos anos que antecedem seu ingresso em cursos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) em pouco (ou em nada) relaciona-se com as ideias de variação e acumulação, centrais no desenvolvimento dos conceitos próprios dessa disciplina. Uma alternativa para ressignificar esse conceito na Educação Básica é considerar que uma função representa como duas ou mais quantidades variam uma em relação à outra (e é essa a ideia que se pretende enfatizar neste trabalho), e não como é feito atualmente (como uma relação entre elementos de conjuntos), como discutido por Thompson e Carlson (2017). Nessa perspectiva, tal relação pode ser descrita por palavras, símbolos matemáticos e representações, como gráficos ou tabelas.

Esse tipo de raciocínio, chamado de covariacional (THOMPSON; CARLSON, 2017) é baseado em relações entre duas (ou mais) quantidades que variam, cuja gênese "acontece quando o estudante se envolve numa atividade, escolhe prestar atenção às quantidades que variam e começa a focar-se na relação entre essas quantidades" (MESTRE, 2014, p.71).

No intuito de estimular a promoção do raciocínio covariacional tanto em aulas de Matemática da Educação Básica quanto no âmbito do CDI, neste artigo é apresentado um conjunto de três tarefas exploratórias (PONTE, 2005), mobilizadoras de ideias do raciocínio covariacional (RC) por meio da integração de tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), utilizando o GeoGebra como recurso à investigação, numa perspectiva de trabalho em ambientes de ensino e de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas (COUTO; FONSECA; TREVISAN, 2017; TREVISAN; MENDES, 2018).

O raciocínio covariacional e o conceito de função

Sabe-se que o conceito de função foi elaborado, historicamente, a partir de discussões matemáticas e problemas físicos do mundo real. As ideias de "mudança" e "variação" e a busca de maneiras para representá-las estiveram intimamente ligadas ao processo de elaboração desse conceito. O próprio CDI como desenvolvido por Newton e Leibniz não era um cálculo de funções, propriamente dito, mas sim uma coleção habilidosa de "recursos" para resolução de problemas de curvas.

A definição atual de função "camufla" sua aplicabilidade como ferramenta para o estudo de situações dinâmicas. Assim, "ideias de variação e covariação em valores de variáveis não se encaixam na definição matemática de função adotada na atualidade" (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 422), pois adotam os passos de determinação de pontos, produtos cartesianos e a ênfase na lei de correspondência entre os valores de x e y. Pensar em como o que está sendo estudado em uma situação se altera – variáveis - e em como elas se comportam em relação às outras variáveis deveria ser o cerne de todo o raciocínio que se espera obter no estudo de funções.

Conforme destacam Thompson e Carlson (2017), as dificuldades dos estudantes na compreensão desse conceito e a investigação de possibilidades para seu ensino levaram a discussões acerca do RC no final da década de 1980 e início dos anos 1990. Esse tipo de raciocínio pode ser caracterizado em termos de coordenação das imagens de duas variáveis à medida que elas mudam, ou em termos de conceituar os valores das quantidades individuais como variáveis e, em seguida, de duas ou mais quantidades como variando simultaneamente. Para Carlson et al (2002), o RC contempla atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades que variam quando se presta atenção às formas como cada uma delas muda em relação à outra. Nessa acepção, uma função é mais que um conjunto de pares ordenados, é a expressão do modo como duas quantidades variam em uma situação dinâmica.

O método: sobre o processo de construção das tarefas

As tarefas aqui apresentadas sustentam-se em experiências em aulas de CDI (ministradas/observadas pelos autores entre os anos de 2016 e 2018), e surgem do aprimoramento de versões reformuladas a cada semestre, nas quais buscou-se incluir TDIC, em especial o Geogebra, como aliadas à experimentação matemática. O tipo de pesquisa que resultou nessas tarefas adotou pressupostos da investigação baseada em design – IBD (PONTE et al., 2016).

Neste artigo, apresentamos três tarefas que mobilizam diferentes ideias do RC. O trabalho com elas pressupõe que os estudantes já estejam inseridos em um ambiente de ensino e de aprendizagem pautado em episódios de resolução de tarefas, organizando-se em grupos com três integrantes, dispondo de um notebook com acesso à internet e o software GeoGebra instalado. Além disso, cada item da tarefa deve ser apresentado em separado, e seguido por momentos de discussões matemáticas com os estudantes (PONTE, 2017).

Na elaboração das tarefas apresentadas buscamos desenvolver as habilidades do RC, conceituando gráficos como representações emergentes de fenômenos em constante mudança (FRANK, 2017), a constar: (i) constituir quantidades envolvidas na situação (reconhecer atributos de uma situação passíveis de medição); (ii) raciocinar sobre o processo de medição dessas quantidades; (iii) imaginar medidas de quantidades variando continuamente; (iv) coordenar duas quantidades que variam juntas, reconhecendo: quais quantidades se relacionam, a direção de (de)crescimento, a existência de taxas de variação e eventuais mudanças na taxa de crescimento.

Resultados e discussão: as tarefas e suas potencialidades para mobilização de ideias do RC

Tarefa 1: o problema da praça

A primeira tarefa, adaptada de Grueso e González(2016), envolve a situação de construção de praça, como mostrado no Quadro 1.

Quadro 1. Problema da praça.

Deseja-se construir uma praça em formato retangular, dentro de um terreno quadrado. As condições é que cada vértice da praça deve estar sobre um dos lados do terreno. As partes restantes serão utilizadas como área verde. a) Faça algumas representações do formato que a praça pode ter (mínimo 3 representações). b) Nessa situação, o que se pode medir? Como as grandezas listadas acima elas se relacionam? c) Represente o gráfico de uma grandeza em relação à outra.

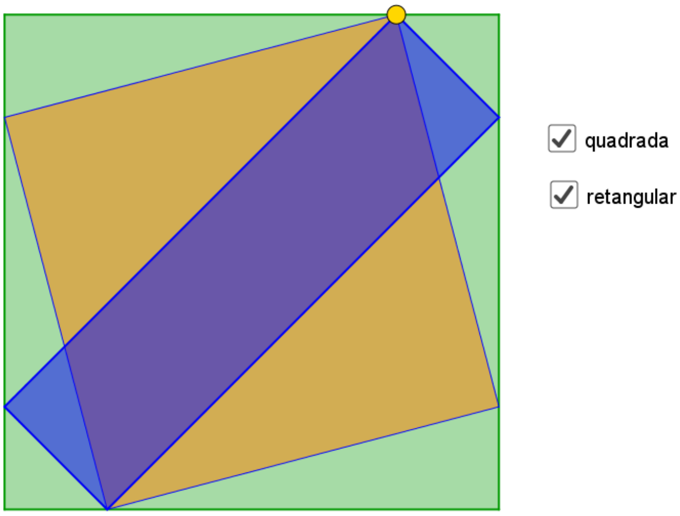
Fonte: autores.

O objetivo do item (a) da tarefa é levar os estudantes a refletirem a respeito das configurações possíveis para a praça, e a observarem que a alteração de um vértice acarretará na mudança de configuração da praça e consequentemente em suas medidas e nas relações entre as quantidades envolvidas (item b).

Algumas perguntas podem ser propostas pelo professor, durante cada etapa da investigação, no intuito de mobilizar discussões matemáticas: É possível movimentar os quatro vértices, mantendo o formato da praça e não alterando sua área, porém “deslocando-a” para outro lugar, dentro dos limites do terreno? Considerar vértices sobre as arestas é uma alternativa plausível? Há algum tipo de relação entre os vértices? Como identificar as grandezas envolvidas? Ao modificar a área disponível para a construção da praça, as demais grandezas se alteram? Como? As grandezas identificadas têm uma mesma relação de (de) crescimento: se uma aumenta, a outra também aumenta? Ou não?

Nesse processo de investigação da situação, o aplicativo 1 do Geogebra (Figura 1) pode ser usado para estimular a visualização da situação dinâmica e favorecer a discussão. Movendo o ponto amarelo, o estudante tem como visualizar situações exploradas nos itens (a) e (b), e refletir sobre relações entre as grandezas, cuja representação gráfica é solicitada no item (c).

Figura 1. Interface do aplicativo 1 do Geogebra.



Fonte: Adaptado de https://www.geogebra.org/m/HfmkQj21

No item (c), dentre as relações que podem ser exploradas pelos estudantes estão: perímetro da praça × área da praça; área verde × perímetro da praça; comprimento de determinado segmento × área da praça, mas, em alguns desses casos, o gráfico obtido não representará uma função (embora seja uma relação entre duas variáveis). A partir de toda a discussão sobre variáveis que os itens iniciais propõem (configuração-situação, variação e variáveis), no último busca-se representar a relação entre tais quantidades.

Essa tarefa, apesar de mobilizar várias ideias de RC, prioriza a reflexão na constituição de quantidades envolvidas na situação e o raciocínio sobre o processo de medição de tais quantidades, bases para um raciocínio covariacional de maior valor cognitivo.

Tarefa 2: o problema do boato

A tarefa a seguir (Quadro 2) foi adaptada de uma situação apresentada por Connally et al. (2009), e tem por objetivo levar os estudantes a refletirem sobre como uma função pode ser crescente, mas com taxa ora crescente, ora decrescente, e reconhecerem o instante em que essa mudança nas taxas acontece, o que será interpretado como ponto de inflexão, indicando mudança de concavidade da curva nesse momento.

Quadro 2. Tarefa do boato.

Quando surge um boato, inicialmente, o número de pessoas que ouviram começa crescendo lentamente e conforme mais pessoas começam a saber e comentar, este se espalha rápido, até quando o número de pessoas que sabe chegar no limite de pessoas na região. Represente um gráfico da quantidade de pessoas que sabe em função do tempo.

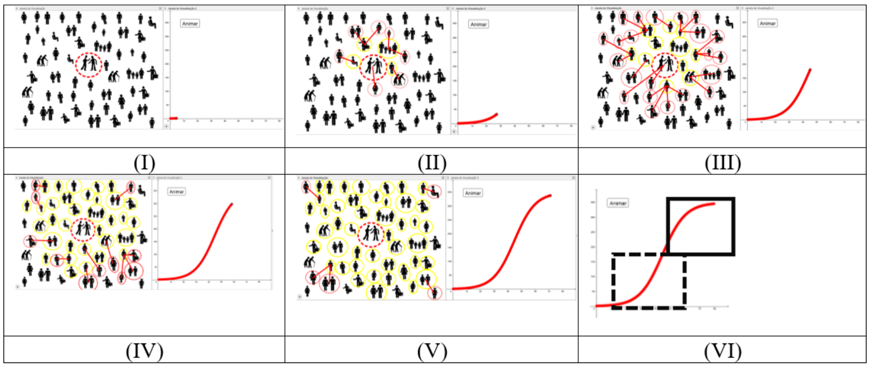
Fonte: autores.

No intuito de mobilizar discussões matemáticas produtivas, podem ser apresentados questionamentos como: Quantas pessoas sabem inicialmente? Como representar a evolução do número de pessoas que conhecem o boato, se ele continuasse crescendo rápido? E como seria se ele crescesse apenas devagar? Qual a diferença entre as duas representações?

Para validar ou refutar as hipóteses levantadas pelos estudantes para a representação da situação, pode-se disponibilizar o aplicativo 2 do Geogebra (Figura 2). Alguns questionamentos podem ser levantados de acordo com as imagens, como por exemplo, na imagem (I), quais devem ser as legendas dos eixos coordenados neste gráfico? b) Se o tempo está passando e apenas duas pessoas sabem do boato, faz sentido que ele inicialmente seja constante? Por que o gráfico da imagem (III) não é uma reta? É possível afirmar pela imagem (VI) que haverá um instante a partir do qual o gráfico será constante? Por quê?

Na Tarefa 2, além dos aspectos que são priorizados na Tarefa 1, há a necessidade de imaginar medidas de quantidades variando continuamente, o que aumenta o seu nível de complexidade. Essa evolução permite com que outros conceitos importantes no CDI sejam tratados de forma intuitiva, e provoca no estudante a sensação de poder compreendê-los, atribuindo-lhes um significado prático.

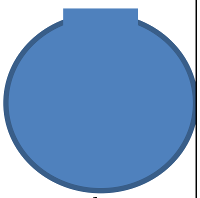
Figura 2. Interface do aplicativo 2 do Geogebra.



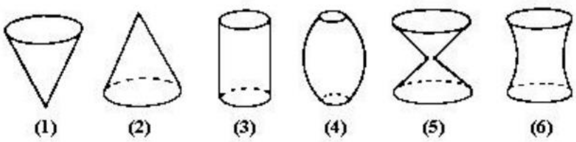
Fonte: autores.

Tarefa 3: o problema do vaso

Quadro 3. Tarefa do Vaso.



Água é derramada em um vaso (figura ao lado) a uma taxa constante. Use esta informação e a forma do vaso para responder as perguntas a seguir.
a) O que você entende por taxa constante de derrame de água nesta situação?
b) Imagine a cena do vaso sendo enchido e escreva o que você acha que pode ser medido nesta situação.
c) Esboce um gráfico que relacione o volume de água na garrafa com o passar do tempo. Explique o raciocínio que levou ao seu esboço.
d) Esboce um gráfico que relacione a altura de água na garrafa com o passar do tempo. Explique o raciocínio que levou ao seu esboço.
e) Como tempo, altura e volume se relacionam? Se as questões (c) e (d) pedissem um esboço da relação entre altura e volume, os gráficos seriam diferentes daqueles construídos anteriormente? Explique.
f) Agora, considerando que todos os vasos seguintes têm a mesma altura, esboce gráficos que relacione a altura com o volume.



Fonte: autores.

Esta tarefa 3, proposta a partir da situação apresentada em Carlson et al (2002), é a de maior valor cognitivo dentre as apresentadas, pois mobiliza a ação de coordenar variações instantâneas correlacionadas, já que cada forma de vaso estabelece relações diferentes entre os comportamentos da altura e do volume de água.

Essa tarefa instiga professor e estudante a convergirem nos entendimentos sobre termos usados, como é o caso da palavra "derrame" (que, nesse contexto, indica água caindo na garrafa), mas que pode ter outro sentido conforme a realidade do discente. Além disso, instiga a reflexão acerca da importância de que assumir como constante a "taxa" de queda d'água (e que não seria possível resolver a questão de modo tão intuitivo se esta não fosse constante).

No caso do item (b), objetiva-se reconhecer diferentes grandezas (variáveis) que podem ser analisadas na situação, por exemplo, instigando os estudantes a pensarem sobre o que é "fixo" e o que "muda" enquanto a garrafa enche, ou sobre o comportamento da altura ou volume de água em função do tipo de vaso e do raio de suas secções ou ainda em função da taxa de derrame constante.

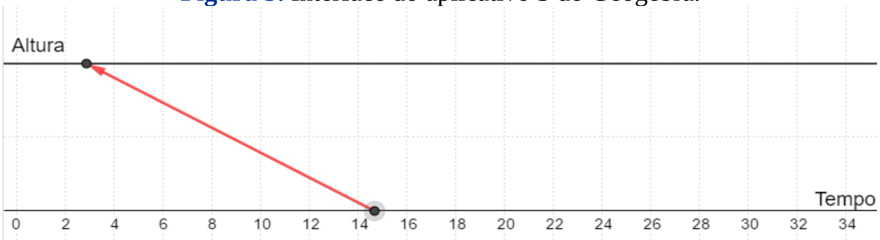
Ao longo da resolução da tarefa, o estudante pode perceber a importância de analisar a concavidade em um gráfico e atribuir-lhe um significado coerente com a situação em análise, em função das quantidades envolvidas na situação, bem como avaliar a influência de algumas variáveis sobre outras e suas restrições.

Para estimular a investigação da situação a partir da visualização da situação dinâmica, o aplicativo 3 (Figura 3) do Geogebra pode ser disponibilizado aos estudantes antes da proposição do item (e) da tarefa. Trata-se de um *dinagráfico*, apresentado por Goldenberg, Lewis e O'keefe (1992, p. 244) como um tipo de representação que constitui

> uma classe de ferramentas de visualização de função que têm como características comuns que 1) a variável de domínio é dinamicamente manipulada pelo usuário e 2) a variável de domínio e sua imagem estão representadas cada uma em seu próprio espaço. Por exemplo, uma versão R → R permite que a variável de domínio seja dinamicamente controlada pelo mouse movendo um cursor em uma linha de números, enquanto a imagem se move em uma linha numérica paralela.

A utilização de dinagráficos está intimamente ligada à representação da correlação entre as variáveis, uma vez que possibilita visualizar tal relação. Goldenberg, Lewis e O'keefe (1992, p.246) destacam que, "embora o DynaGraph seja uma abstração baseada em tela, é manipulável em tempo real, e seu comportamento se assemelha fortemente aos fenômenos do mundo real".

Figura 3. Interface do aplicativo 3 do Geogebra.

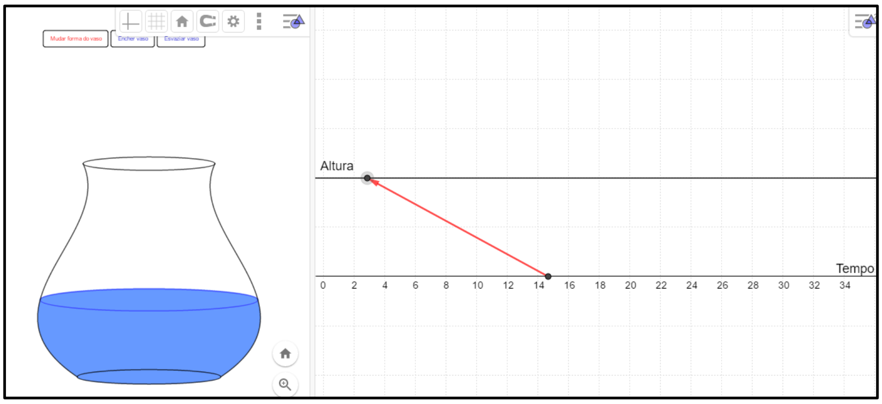


Fonte: Adaptado de https://www.geogebra.org/m/D2F2GQ9E

Com a intenção de estender a análise para outros formatos de vasos, como sugerido no item (f) da tarefa, pode-se disponibilizar aos estudantes o aplicativo 4 (Figura 4) do Geogebra, e solicitar que, a partir da análise da representação da correlação entre as variáveis altura e tempo, esbocem gráficos que relacionem a altura com o volume de água no vaso.

O uso dessa ferramenta permite priorizar as variáveis e como estas variam; a representação sobre uma reta numérica facilita a visualização dos conceitos de domínio, contradomínio, imagem e continuidade, além de permitir a inferência da relação entre as variáveis volume e altura. Pode-se, também, instigar uma discussão que envolve o conceito de simetria (funções cujos gráficos são opostos pela bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano) e a análise de quais são as diferenças dinâmicas observadas neste movimento ao pensarmos o papel assumido pela escolhida das variáveis na representação (o volume ora no eixo horizontal, ora no vertical).

Figura 4. Interface do aplicativo 4 do Geogebra.



Fonte: www.geogebra.org/m/D2F2GQ9E

Como aprofundamento da situação envolvida nesta tarefa, pode-se instigar os estudantes a investigarem o que mudaria nos gráficos se partíssemos de vasos cheios e assumíssemos que estivessem furados na parte inferior, esvaziando-se ao longo do tempo a uma taxa constante[6].

É importante destacar que as três tarefas propostas aumentam paulatinamente o nível de complexidade das situações apresentadas, acarretando maior desempenho cognitivo do estudante, sem, no entanto, causar desconfortos em relação aos conceitos de CDI, pois as simulações proporcionadas pelo aplicativo GeoGebra confrontam e colaboram com as análises individuais da situação.

Ainda sobre esse aspecto, essas tarefas contribuem com a investigação de Rolfes, Roth e Schnotz (2013) que questionam se uma tabela de valores ativa mais recursos cognitivos dos estudantes do que um gráfico, em se tratando de pensamento covariacional. A nosso ver, a dinamicidade proporcionada pelas simulações gráficas no GeoGebra são uma rica fonte de informações, pois fornecem um ambiente reflexivo propício às descobertas das implicações práticas do raciocínio covariacional a partir da necessidade de interpretação global do gráfico em análise. Assim como no trabalho de Mejia (2011), nas tarefas propostas, a ferramenta computacional contribui fortemente para a validação das construções dos estudantes, consequentemente, aprimorando conjecturas e conclusões acerca das situações.

6. Em www.geogebra.org/m/BepEA9cN há simulações envolvendo outros formatos de vaso.

Considerações finais

As tarefas aqui apresentadas têm por objetivo estimular o estudante a pensar na situação proposta, na relação entre as grandezas envolvidas e, a partir daí, na representação gráfica da relação entre elas; o "cerne" do raciocínio covariacional (THOMPSON; CARLSON, 2017). De modo geral, possibilitam mobilizar diferentes ideias, pois, no processo de compreensão dessa situação, o estudante deve i) constituir as quantidades envolvidas e ii) pensar sobre como acontecem seus processos de medição, além de iii) pensar na possibilidade de as quantidades variarem continuamente. A representação gráfica de cada quantidade envolvida, explicitando as relações formuladas nos passos i), ii) e iii), expressa a coordenação de covariabilidade dessas duas (ou mais) quantidades.

Vários dos gráficos que podem ser elaborados em algumas das situações analisadas não são gráficos de função, mas representam a relação entre duas variáveis por meio de uma abordagem que "foge" aos processos usuais de construção de leis matemáticas, ou ainda tabelas e pares ordenados. Em nenhuma das tarefas foram utilizadas ferramentas algébricas ou se assumiu um conhecimento da definição "formal" de função como requisito para que o estudante pudesse com elas lidar. Enfatizou-se o entendimento da situação, da relação de variáveis, da correlação entre elas, dos aspectos de crescimento e decrescimento e da taxa de crescimento e decrescimento, ou ainda, da simetria.

Assim, embora os matemáticos encaminhem uma definição para o conceito de função como correspondência, de modo a solucionar inconsistências dentro da própria Matemática, a natureza e os problemas reais nem sempre servem a essas demandas. A abordagem covariacional, com ênfase na busca das múltiplas representações entre um conjunto de variáveis (PALIS, 2013), atrelada às experimentações que são possibilitadas pelo uso da TDIC (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015) mostra-se como um recurso que "quebra" esse paradigma e possibilita ao estudante desenvolver um olhar crítico que lhe permita redefinir e ressignificar o conceito de função.

Recebido em: 01/06/2020
Aprovado em: 25/08/2020

Referências

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** sala de aula e internet em movimento. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015, p.45-73.

CARLSON, M. P. et al. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 33, n. 5, 352-378, 2002.

CONNALLY, E. A. et al. **Funções para modelar variações:** uma preparação para o Cálculo. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

COUTO, A. F.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 4, p. 50-61, 2017.

FRANK, K. M. **Examining the Development of Students' Covariational Reasoning in the Context of Graphing.** Dissertation (Doctor of Philosophy). Arizona State University, 2017.

GOLDENBERG, P.; LEWIS, P.; O'KEEFE, J. Dynamic representation and the development of a process understanding of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). **The concept of function:** aspects of epistemology and pedagogy, 1992, v.25, p. 235-260.

GRUESO; R. A.; GONZÁLEZ, G. **El concepto de función como covariación en la escuela.** Informe final de investigación presentado como requisito para optar al título de Magíster en Educación, énfasis en Educación Matemática. Santiago de Cali: Universidade Del Valle, 2016.

MEJIA, P.E.A. **Razonamento covariacional a travès de software dinâmico:** el caso de la variación lineal y cuadrática. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Medellín: Universidad Nacional de Colombia, 2011.

MESTRE, C. M. M. V. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino.** 2014. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa. Lisboa, 2014.

PALIS, G. R. Atividades que podem propiciar o desenvolvimento do raciocínio funcional no alunado do Ensino Médio e Universitário Inicial. **Professor de Matemática Online**, v. 1, p. 1-11, 2013.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P. Discussões Coletivas no Ensino-Aprendizagem de Matemática. In: GTI (Ed.). **A Prática dos Professores:** planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: APM, p. 33-56, 2017.

PONTE, J. P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, v. 25, n. 2, p. 77-98, 2016.

ROLFES, T.; ROTH, J.; SCHNOTZ, W. Improving the Covariational Thinking Ability of Secondary School Students. In: UBUZ, B.; HASER, Ç.; MARIOTTI, M. A. (Eds.): **Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Ankara, Turkey: Middle East Technical University, 2013, pp. 572–573.

THOMPSON, P. W.; CARLSON, M. P. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In: CAI, J. (Ed.), **Compendium for research in mathematics education.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2017. p. 421-456.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautados em episódios de resolução de tarefas: uma proposta de caracterização. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 11, n. 1, p. 209-277, 2018.