emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2021v8i1p81-99

Resolução de problemas e sala de aula invertida: homeomorfismo entre um paraboloide e um plano

Problem solving and blended learning: homeomorphism between a paraboloid and a plane

José Carlos Pinto Leivas[1]

RESUMO

Este artigo trata de uma pesquisa qualitativa participativa, a qual teve por objetivo analisar como estudantes de uma disciplina de Geometria em ação continuada de um programa de ensino utilizam a Metodologia de Resolução de Problemas para desenvolver uma atividade envolvendo homeomorfismos de figuras geométricas. Como metodologia de ensino, foi utilizada a Sala de Aula Invertida, por meio da qual os seis participantes elaboraram uma pesquisa sobre homeomorfismos quinze dias antes da realização da aula presencial, encaminhando-a ao professor-pesquisador em um grupo fechado. Este analisou os textos e, na primeira parte da aula presencial, discutiu-os com os estudantes. Posteriormente, disponibilizou recursos materiais que permitiram elucidar o tema, elaborar construtos visuais e mentais e chegar a um consenso sobre o conceito de homeomorfismo. Em seguida, foi proposto um problema no qual os estudantes deveriam verificar se há homeomorfismo entre um paraboloide e sua projeção ortogonal sobre um plano, explorando a Resolução de Problemas. Os resultados revelam que tanto a Resolução de Problemas quanto a Sala de Aula Invertida permitiram aos participantes construir conhecimentos de temas que, geralmente, não são explorados na formação inicial de estudantes: Topologia e Homeomorfismo geométricos.

Palavras-chave: *Sala de aula invertida; Resolução de problemas; Homeomorfismos; Ensino de Geometria.*

ABSTRACT

This paper discusses a participatory qualitative research, which aimed to analyze how students of a Geometry discipline, in continuous action in a teaching program, use the Problem Solving Methodology to develop an activity involving homeomorphisms of geometric figures. The teaching methodology used was the Blended learning, in which the six participants elaborated a research about homeomorphisms, fifteen days before the classroom, sending it to the teacher-researcher in a closed group. He analyzed the texts and in the first part of the classroom, discussed with the students, provided material resources that allowed elucidating the theme, elaborating visual and mental constructs and reaching a consensus on the concept of homeomorphism. Subsequently, a problem was proposed to check if exist homeomorphism between a paraboloid and its orthogonal projection on a plane, exploring Problem Solving. The results showed that both Problem Solving and the Blended Learning allowed participants to build knowledge of a theme that generally is'not explored in the initial formation of students: Geometric Topology and Homeomorphism.

Keywords: *Blended learning; Problem solving; Homeomorphism; Geometry'teaching.*

[1]. Professor doutor, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana – UFN, Santa Maria- RS. E-mail: leivasjc@ufn.edu.br

Introdução

> A história das ciências matemáticas se transforma ao mesmo tempo em que sua invenção continua, e tão profundamente, às vezes, que parece mudar, mais do que o ritmo, a natureza[2]
>
> (SERRES, 1993, p.15).

Os textos que abordam Geometria, em geral, remetem aos gregos e às medições da terra. Entretanto, cabe buscar algumas considerações a respeito de aspectos mais modernos que despertem novos 'fazeres' no que diz respeito ao ensino dessa área da Matemática, conduzindo às suas origens e à sua evolução, bem como às invenções e às criações que a tornaram tão útil e atraente para a ciência, conforme a epígrafe.

Ao que tudo indica pela experiência do autor, a evolução da Geometria precisa avançar nos bancos escolares no Brasil e, quiçá, na formação dos professores. Em termos de formação de professores, a pesquisa de Leivas (2009a) detectou que, nos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática em uma região específica do país, em geral constam um semestre de geometria plana, outro de espacial e um de analítica, quase sem inovações constatadas na bibliografia dos cursos.

Serres (1993), ao abordar sobre as origens da Geometria, após destacar os espaços vetoriais, chega às estruturas topológicas. Para o autor, "Aqui somos levados de volta às origens lógica ou histórica, mas às condições fundamentais da constituição das formas do espaço. Por essa análise, em troca, a geometria descobre uma nova pureza que não deve nada à medida [...]" (p.21, tradução nossa). Tem perdurado nos currículos, até os dias de hoje, a Geometria de vinte séculos, ou seja, a Euclidiana, e poucas inovações, por exemplo, em termos das não euclidianas.

O autor vai além ao indicar que

> [...] a topologia impõe o esquecimento da tradição e a memória de uma constituição espacial coberta pelo equívoco do milagre grego, suspende a linguagem tradicional como ambígua e pratica a dissociação de pureza e medida não métricas.
> Mais uma vez, toda a história dessa geometria equivale à preservação de uma impureza, ou seja, de um certo tipo de não-matemática (SERRES, 1993, p.21).

Mas por que se evoca a Topologia na introdução deste artigo? A resposta é que, sendo essa área um tanto recente, ainda não tem surtido efeito no ensino, uma vez que, em geral, só é abordada nos currículos do Bacharelado e não na Licenciatura em Matemática, a qual forma professores para atuarem nos diversos níveis de escolaridade. Assim, os conhecimentos relativos ao tema não chegam ao início da escolarização, principalmente, onde se dará a base para o prazer na aprendizagem geométrica. Portanto, o diferencial deste artigo está no fato de abordar uma temática ainda raramente

---

[2] *L'historie des sciences mathématiques se transforme en Même temps que se poursuit leur invention, et si profondément, parfois, qu'elle semble changer, plus que d'allure, de nature*. (SERRES, 1993, p.1)

explorada no ensino de Matemática, especialmente, no que será tratado, a saber, os homeomorfismos. Embora essa disciplina já tenha feito parte de currículos da Licenciatura em Matemática, talvez por ser ministrada de forma eminentemente teórica, sem estabelecer conexões com o ensino para a escola básica, acabou deixando de ser incluída.

Piaget e Inhelder (1993), ao abordarem a representação do espaço nas crianças, já apontavam para o fato de que as relações topológicas são mais intuitivas do que as euclidianas, uma vez que independem das medidas. Dessa forma, as relações topológicas elementares de vizinhança, separação, relação de ordem, relação de envolvimento ou circunscrição, de continuidade, dentre outras, parecem favorecer a aprendizagem inicial de Geometria desde o início da escolarização. Isso poderá fomentar o desenvolvimento da Matemática e de suas respectivas subáreas, com uma habilidade visual acurada.

Com base nessas propriedades elementares, Leivas (2009c) elaborou atividades básicas para desenvolver em uma disciplina de um curso a distância para pedagogos, indicando um bom aproveitamento dos indivíduos participantes nas avaliações regulares. Ainda que a Topologia seja um tema considerado de maior dificuldade, se for desenvolvida na formação de professores, quando adaptada metodologicamente, pode ser replicada em qualquer nível de ensino.

Em uma oficina ministrada em evento internacional, Leivas e Franke (2015) desenvolveram o tema homeomorfismo, partindo da intuição para a visualização em construções geométricas, com a exploração de recursos didáticos bastante simples, como papéis de dupla face coloridos, barbantes, faixas, entre outros. Os autores envolveram conexões importantes de elementos da Geometria com o Cálculo e com a Geometria Analítica, vislumbrando possibilidades de desencadear o tema com os participantes daquele evento, professores e estudantes, os quais mostraram ser viável levar tais atividades para sua prática profissional.

Por tais argumentos, julga-se pertinente utilizar itens como os homeomorfismos em uma disciplina de formação continuada de professores de Matemática destinada a participantes de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, envolvendo mestrandos e doutorandos.

Portanto, justifica-se a pesquisa apresentada no presente artigo, a qual teve o seguinte objetivo: analisar como estudantes de uma disciplina de Geometria em ação continuada de um programa de ensino utilizam a Metodologia de Resolução de Problemas para desenvolver uma atividade envolvendo homeomorfismos de figuras geométricas.

Revisão de literatura

Nesta seção, faz-se uma rápida incursão sobre a Metodologia de Resolução de Problemas, bem como sobre alguns trabalhos envolvendo o tema homeomorfismos. Essa metodologia tem despertado o interesse de pesquisadores e de estudantes, uma vez que desloca a centralidade do professor para o aluno, participante ativo e efetivo na construção do seu conhecimento. O professor atua como organizador do processo, principalmente ao escolher problemas que despertem o interesse dos estudantes na busca de soluções, o que pode vir a desencadear uma aula ou um tópico do currículo. Além disso, o professor é, também, um mediador do trabalho, orientando e auxiliando os alunos ou grupos no desenrolar da aula planejada.

O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) talvez tenha sido um balizador ao sinalizar evidências de que a Resolução de Problemas (RP) se tornaria um elemento primordial para a aprendizagem da Matemática. O documento indica:

> resolver um problema não é apenas uma meta de aprendizagem matemática, mas também um modo importante de fazê-la. A Resolução de Problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, portanto, não deve ser apenas uma parte isolada do programa de matemática. A Resolução de Problemas em Matemática deve envolver todas as cinco áreas de conteúdo descritas nos Padrões do NCTM. Os bons problemas integrarão múltiplos tópicos e envolverão a matemática significativa (*NCTM*, 2000, p. 52, apud WALLE, 2009, p. 57).

A partir dessa consideração, julga-se pertinente, cada vez mais, introduzir tal metodologia na prática formativa dos estudantes, quer em formação inicial, quer em continuada. Desse modo, pretende-se proporcionar aos estudantes formas alternativas de aprendizagem. Nessa direção, Walle (2009) aponta razões para a utilização da RP: (a) concentrar a atenção dos alunos sobre as ideias e dar sentido a elas; (b) desenvolver nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer Matemática e de que essa disciplina faz sentido; (c) fornecer dados contínuos para a avaliação, os quais podem ser usados para tomada de decisões educacionais, assim como para ajudar os alunos a terem bom desempenho e manterem os pais informados; (d) possibilitar um ponto de partida para uma ampla gama de alunos; (e) envolver os estudantes de modo que ocorram menos problemas de disciplina; (f) desenvolver o 'potencial matemático' dos estudantes. Além disso, de acordo com o autor, essa metodologia é muito divertida.

Polya (2006) é um dos precursores da RP e recomenda que "o professor deve auxiliar, nem demais e nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho" (p. 1). Nessa direção, o professor deve acompanhar o trabalho do aluno, indagando "Qual é a incógnita?"; "Do que é que se precisa?"; "O que é que se deve procurar?".

O autor indica quatro fases em sua metodologia, a saber: compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução de um plano; e, finalmente, o retrospecto. Entende-se que essa forma de conduzir uma sala de aula, no caso da presente investigação em Geometria, pode oferecer aos professores em ação continuada oportunidades concretas de refletirem sobre suas práticas profissionais, de forma diferenciada do que usualmente é feito na formação inicial. Em geral, o professor expõe um conteúdo, dá exemplos e, posteriormente, deixa para os alunos aplicarem fórmulas um tanto quanto diretas relativas ao conteúdo.

A RP, seguindo as etapas propostas por Polya (2006), pode indicar caminhos produtivos para a aprendizagem em Geometria, por exemplo, em um tema como homeomorfismos, conectando-o aos aspectos visuais intuitivos, os quais podem possibilitar aos iniciantes uma visão abrangente sobre o tópico.

Várias são as variantes, estudos e autores que abordam a RP, diferenciando-se em pequenos aspectos. Chama a atenção os trabalhos de Onuchic e Allevato (2011), em pesquisas de longo prazo em seu grupo de estudos a respeito da RP, incluindo aspectos de avaliação, com o que se coaduna no presente artigo. No caso deste estudo, pretende-se abordar a metodologia na formação continuada de professores, em que os aspectos avaliativos são importantes. A esse respeito, indicam as autoras:

> [...] atento às novas tendências e demandas mundiais que se apresentavam para o ensino e a aprendizagem de Matemática, o grupo debruçou-se em estudos sobre ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas e, consequentemente, atendendo também à formação de professores. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p.75.)

Destaca-se, aqui, a nomenclatura empregada pelas autoras para a RP, Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a qual delineia o seguinte roteiro:

- Preparação do problema: o professor seleciona um problema que visa a construção de um novo conceito;

- Leitura individual: o professor entrega uma cópia do problema para leitura e interpretação;

- Leitura em conjunto: grupos previamente organizados retomam o problema e analisam as interpretações individuais, buscando a compreensão de termos ainda não conhecidos;

- Resolução do problema: os alunos buscam a solução, colaborativamente, a partir da organização e da interpretação do grupo sobre o problema.

- Registro das soluções na lousa: o representante de cada grupo apresenta na lousa suas resoluções, independentemente de estarem certas, erradas, incompletas ou completas;

- Plenária: todos discutem as soluções apresentadas pelos diversos grupos.

- Busca do consenso: o professor busca analisar e sanar as dúvidas levantadas pelos grupos, chegando à solução correta com os alunos;

- Formalização do conteúdo: o professor formaliza e explicita o tema abordado.

Reforça-se, desse elenco de orientações, que a RP, de fato, pode proporcionar uma aula participativa, interessante e motivadora, em que os alunos se animam para as descobertas, sentindo-se, às vezes, os próprios matemáticos. Nesse sentido, Martins (2019) analisou, em sua pesquisa de mestrado, as contribuições que tal metodologia proporcionou na aprendizagem de Geometria Espacial em sala de aula, com auxílio dos pressupostos do Enfoque Histórico-Cultural de Vygotsky. O grupo focal foi constituído de 35 alunos do 2º ano do Ensino Médio, no estado de São Paulo.

O autor comprovou que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas,

> possibilitou ao professor um conhecimento mais consistente do processo de aprendizagem de seus alunos, podendo melhor ajudá-los. Aos estudantes oportunizou a aprendizagem de conteúdos relativos à Geometria Espacial, de modo que o desenvolvimento da aprendizagem geométrica possibilitou o reconhecimento dos atributos relevantes das figuras planas e espaciais, a percepção e compreensão de relações, apropriação da linguagem e nomenclatura geométricas. (MARTINS, 2019, p. 7).

Por outra parte, algumas vezes, mesmo depois dos estudantes terem lido o enunciado do problema, é possível que não se deêm conta sobre o que a tarefa exige. Além disso, é comum que os alunos não tenham certeza sobre o que foi resolvido, embora possam ter lido duas ou três vezes o problema, segundo afirmam Mason, Burton e Stacey (2010). Para os autores, pessoas demandam tempo e esforço antes de iniciarem a resolução de um problema. Por tal razão, julgou-se importante nesta pesquisa realizar as tarefas em dupla, ou seja, colaborativamente, bem como a leitura conjunta, como recomenda a RP. Nessa direção, revela-se fundamental, também, a plenária, onde as certezas e a formalização da solução correta irá acontecer.

Mason, Burton e Stacey (2010) salientam que, às vezes, pessoas ficam tão ansiosas para dar início à resolução do que fora proposto que acabam pulando etapas. Por isso, não valorizam a retomada da solução, a avaliação e, se necessário, o reinicio do problema, de modo que conjecturas levantadas possam de fato ser comprovadas e, finalmente, a solução correta obtida.

Portanto, tal pesquisa vai ao encontro dos encaminhamentos a respeito da RP e reforça a escolha dessa metodologia para a presente pesquisa, tendo partido dos pressupostos da SAI.

Metodologia

A presente pesquisa partiu da ideia de Sala de Aula Invertida - SAI (*Blended learning or Flipped Classroom*), a qual é indicada como sendo uma forma inovadora para o ensino, (CHRISTENSEN; HORN; JOHNSON, 2009). Para Valente (2014, p.84), essa modalidade é outra forma de realizar ensino a distância "[...] quando parte das atividades são realizadas totalmente à distância e parte é realizada em sala de aula". O autor afirma que tal modalidade "tem sido realizada tanto no Ensino Básico quanto no Ensino Superior, principalmente nos Estados Unidos e Canadá".

Segundo Pavanelo (2017, p. 742), autores como Bishop e Verleger (2013), ao falarem sobre essa metodologia, a definem como "uma técnica educacional que consiste em duas partes: atividades de aprendizagem interativas em grupo em sala de aula e orientação individual baseada em computador fora de sala de aula". Os autores reforçam essa técnica como uma forma de o professor não perder tempo ministrando aulas expositivas.

Em sua dissertação de mestrado, Rodrigues (2019) investigou a SAI para o ensino de Geometria. A autora afirmou que essa metodologia de ensino está inserida nas Metodologias Ativas, sumariamente definidas como estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes. Segundo ela, estudos como o de Lopes (2003, apud RODRIGUES, 2019, p. 33) defendem que tal metodologia “[...] permite criar um ambiente de motivação para engajar os sujeitos nas atividades; possibilita a reflexão como forma de construção dos conhecimentos; estimula a cooperação entre os participantes; desenvolve a autonomia na busca de informação e a capacidade de investigação”.

O autor da presente pesquisa ministra a disciplina de Geometria desde 2011, tendo como alunos os acadêmicos de um mestrado profissional, de um mestrado acadêmico e de um doutorado em ensino de Ciências e Matemática. As aulas funcionam quinzenalmente e o professor tem por norma apresentar, no primeiro encontro, o programa, o cronograma e a metodologia de trabalho. Os estudantes devem postar, 48 horas antes da aula presencial um texto de, no máximo, uma página, em um *template* previamente fornecido. Tal texto seria formado, livremente, a partir de buscas na internet, sem indicativos do professor de forma que pudesse surgir diversidade de ideias e autores que abordam o assunto. A postagem do texto sobre o tema em questão deve ser feita em um grupo do *yahoogroups* criado especificamente para a disciplina daquele semestre. Ao reunir os textos, o professor faz uma leitura prévia das produções dos alunos e, no início da aula, promove uma discussão sobre os encaminhamentos feitos individualmente, de modo que todos possam emitir suas concepções e compreensões a fim de chegarem a um consenso.

Em seguida, a aula se desenvolve de acordo com determinadas metodologias que o professor julgar pertinentes ao tema abordado. Para a presente pesquisa, na busca de tratar de um assunto específico, isto é, “homeomorfismos de dois conjuntos geométricos: o paraboloide e o plano”, foram escolhidas a RP e a SAI. De forma análoga, Duarte e Allevato (2020) também empregaram a RP, porém sem analisar todas as suas fases, centrando as análises na etapa da proposição de problemas. Neste artigo, embora se faça referência às fases indicadas por Polya (2006); Onuchic e Allevato (2011), Mason, Burton e Stacey (2010), neste artigo, não se analisará cada uma delas.

Posteriormente ao debate e às exposições necessárias, no decorrer de dois períodos de 50 minutos, foi lançado um problema envolvendo o tema da aula, destinando-se os dois períodos seguintes para a sua resolução. No caso deste estudo, os seis alunos matriculados se organizaram em duplas (MASON; BURTON; STACEY, 2010), de livre e espontânea vontade, para a resolução da tarefa, a qual foi distribuída por escrito a cada indivíduo, com espaço para registros que, ao final, foram entregues ao professor.

Assim, essa forma de abordagem de um conteúdo, em uma disciplina de um curso de ação continuada em pós-graduação, vai ao encontro do que Severino (2016) encaminha: “Tendo a educação superior seu núcleo energético na construção do conhecimento, impõe-se uma prática pedagógica condizente, apta a superar a pedagogia do ensino universitário tradicional, apoiado na transmissão mecânica de informações" (p. 27). Com isso, os professores em exercício, assim como os futuros, têm uma prática efetiva de como aplicar metodologias explícitas, ou seja, RP e SAI.

Entende-se a presente pesquisa como sendo qualitativa participante, uma vez que, segundo Severino (2016), esse tipo de metodologia indica que, "o pesquisador, para realizar a observação dos fenômenos, compartilha a vivência dos sujeitos pesquisados, participando de forma sistemática e permanente, ao longo do tempo da pesquisa, das suas atividades" (p.126). Neste artigo, reforça-se o caráter qualitativo participante da pesquisa, uma vez que o pesquisador: a) analisa os textos submetidos pelos estudantes; b) discute-os no grupo; c) aponta compreensões e incompreensões; d) faz questionamentos visando orientar os grupos na busca de soluções. Ao final, há a apresentação das resoluções, o debate nos grupos e a formalização do resultado.

Quanto ao procedimento de coleta de dados, como já citado, os indivíduos encaminharam seus textos para a análise prévia do professor via grupo *yahoo*. Durante o debate coletivo na aula presencial, o professor-pesquisador fez anotações em seu diário de bordo, bem como suas observações no transcorrer das resoluções, inclusive colocando, na medida do possível, alguns questionamentos auxiliares no quadro. Os três grupos formados apresentaram um registo escrito de etapas da RP e, finalmente, algumas fotos e gravações em áudio. Esses dados constituem o *corpus* da pesquisa. No transcorrer das análises, os encaminhamentos serão descritos.

Para o procedimento de análise de dados, foi solicitado um nome fictício a cada membro da dupla, para que não houvesse identificação dos participantes. Assim, o nome de cada grupo foi constituído da seguinte forma: grupo 1– ARA+HAN; grupo 2 – INA+LIA; grupo 3 – FLA+TAN.

Resultados e discussões

Levando em consideração o procedimento da SAI – *Blended learning or Flipped Classroom* –, o professor-pesquisador forneceu previamente o tema da aula presencial aos alunos, solicitando uma pesquisa e a elaboração de um texto acerca dele. Essa instrução é ilustrada no plano da disciplina, fornecido no início do segundo semestre letivo de 2019 (Quadro 1).

Quadro 1 – Extrato do plano da disciplina.

Ordem	data	Disciplina
8	25.09	Geometria do táxi- continuação da aula anterior. Obs. Postar no grupo https://br.groups.yahoo.com/neo/groups/geometria_2019_UFN até o dia 11.10, às 23:59, um texto no *template* fornecido sobre Homeomorfismos
9	09.10	Homeomorfismos Obs. Postar no grupo no grupo até o dia 23.10, às 23:59, um texto no *template* fornecido sobre Simetrias

Fonte: plano da disciplina.

Todos os indivíduos postaram sua tarefa até a data limite solicitada no plano. O professor-pesquisador fez a leitura e a análise dos textos, com base nos quais elaborou o Quadro 2, sintetizando o que fora encaminhado.

Quadro 2 – Síntese dos encaminhamentos prévios à aula, via internet.

participantes	Síntese fornecida	Autor consultado
ARA	Apresenta uma ideia superficial do tema relacionando-o à Topologia, exemplificando com a imagem de um toro sendo transformado em uma xícara e apresenta a definição formal.	(VILCHES, 2000) (SILVA, 2018)
HAN	Parte de uma citação do autor desta pesquisa sobre o conceito e a definição formal. Exemplifica, formalmente, com a transformação de S^1 em um Quadrado, no plano.	(LEIVAS e FRANKE, 2015) (VILCHES, 2000)
INA	Inicia com a definição formal, traz uma referência menos formal que dá indícios mais esclarecedores sobre o efeito de homeomorfismos. Indica que há necessidade de conservar propriedades e exemplifica com homeomorfismos em uma brincadeira com letras.	(BORGES, 2005). (NASCIMENTO e SALGADO, 2013).
LIA	Inicia caracterizando como figuras geométricas se mantêm invariáveis. Cita autor que descreve duas superfícies homeomorfas ou topologicamente equivalentes, desde que, durante o processo de passar de uma figura para outra, os atos de esticar, contrair, torcer (sem rasgar ou colar) e fazer cortes, não alterem as propriedades. Isso mostra um aspecto intuitivo mais producente para a compreensão do conceito. Traz a definição formal entre espaços topológicos generalizados e ilustra um exemplo retirado do autor deste artigo entre um intervalo fechado da reta real e um arco de curva.	(NASCIMENTO e SALGADO, 2013) (LEIVAS e FRANKE, 2015)
FLA	Este estudante inicia sua síntese, com base em autor citado, como sendo um ramo atual. Ainda mais, segundo o autor citado, a transformação topológica é que envolve relações topológicas elementares. Apresenta, também, o exemplo de homeomorfismo da circunferência no quadrado. Embora não cite no texto, indica nas referências um dos autores já referenciados por outros participantes.	(BORGES, 2005) (VILCHES, 2011)
TAN	Inicia seu texto chamando o autor do artigo para dizer que o tema Topologia é considerado um dos mais difíceis. Traz a definição de outro autor citado, não rigorosamente, e apresenta o exemplo do homeomorfismo entre duas circunferências, conforme as referências.	(LEIVAS e FRANKE, 2015) (VILCHES, 2011)

Fonte: dados obtidos a partir do yahoogroups da disciplina.

O quadro mostra que, de um total de seis indivíduos, quatro citam uma dissertação de mestrado[3] produzida em um programa de pós-graduação em Matemática, o que parece conduzir ao que foi citado anteriormente sobre o tema em questão ser abordado, primordialmente, na área dura. Metade dos envolvidos citam o autor deste artigo[4], inclusive recorrendo a exemplos que permitem compreender, de forma intuitiva, o conceito de homeomorfismo.

[3] VILCHES, M. A. **Topologia Geral**. Departamento de Análise – IME. Universidade Estadual do Rio de Janeiro. E-book: 2011. Disponível em: https://issuu.com/pdftecapdfteca/docs/topologia.

[4] LEIVAS, J. C. P.; FRANKE, R. F. Homeomorfismos: da intuição à visualização em construções geométricas. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015. Chiapas. **Anais**... México: CIAEM, 2015.

Em dois trabalhos, é citado um autor que aborda a Topologia com aspectos voltados ao ensino[5], e outros dois citam uma dissertação realizada em um mestrado profissional em Matemática[6]. Essa análise conduz a refletir sobre certa escassez de literatura sobre o tema em consideração, especialmente em pesquisas voltadas ao ensino. Essa inferência deve-se ao fato de que, embora os participantes residam, quase na sua totalidade, em cidades distintas da sede do curso, houve repetição dos autores selecionados. Além dessa primeira constatação, concluiu-se que os indivíduos expressaram compreensão superficial e restrita do assunto pesquisado, até mesmo por encontrarem poucas referências na internet a respeito. Os participantes chegaram a mencionar essa dificuldade quando compartilharam os resultados obtidos em sala de aula.

A partir dessa primeira análise, foi feito o encontro presencial, no qual houve unanimidade, por parte dos estudantes, quanto à dificuldade do tema. De fato, o professor-pesquisador constatou essa limitação com o próprio conceito de função bijetora, tão propalado tanto na escola básica quanto no ensino superior. Além deste, o de função continua e de inversa também se mostraram insuficientes para a compreensão do tema. Tais constatações levam a concluir que os conceitos apresentados, meramente de forma expositiva, teórica e formal, não chegam a ser compreendidos em aplicações além do contexto em que são formados (SEVERINO, 2016), a exemplo do que seria uma função contínua em espaços discretos.

A discussão dos textos elaborados, as falas dos indivíduos e o exemplo de dificuldades ao lidarem com o conceito de função e seus correlatos, como exemplificado no parágrafo anterior, reforçam a epígrafe deste artigo, no sentido de que a Geometria descobre uma nova pureza independente da medida, a saber, as noções topológicas. Por sua vez, ainda que continuidade seja um conceito primordial nas disciplinas de Cálculo, as quais estão presentes tanto na licenciatura quanto em cursos de serviço, tal conceito não é explorado nos currículos de Geometria da contemporaneidade (espaços discretos).

A partir dos debates, dos esclarecimentos a respeito do tema e da elucidação das dúvidas decorrentes das pesquisas preliminares, o professor-pesquisador formalizou o conceito de homeomorfismo, inclusive explorando recursos materiais concretos para que noções topológicas elementares fossem intuitivamente construídas, como vizinhança, separação, etc. Para tal, utilizou

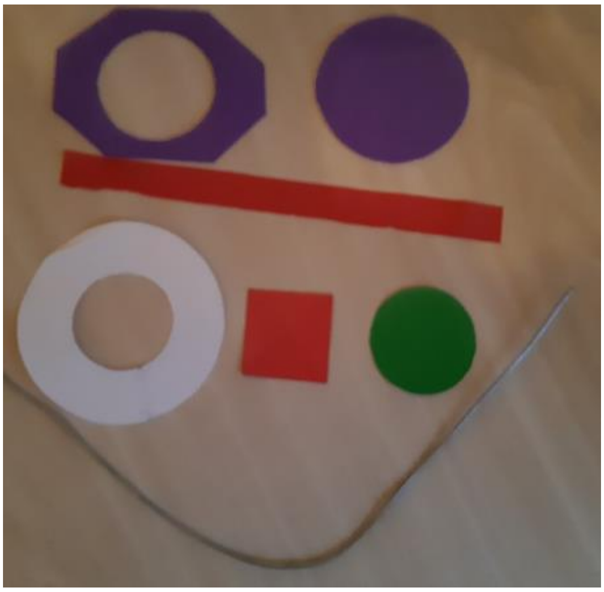
---

[5] BORGES, C. C. A **Topologia**: considerações teóricas e implicações para o ensino da matemática. In: Caderno de Física da UEFS. v. 3, n. 2, p.15-35, 2005. Disponível em: http://dfisweb.uefs.br/caderno/vol3n2/CBorges.pdf.

[6] NASCIMENTO, M. SALGADO, S. A. B. **Uma Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros Convexos via Geometria Esférica**. 2013. 11f. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT), Universidade Federal de São Joao del-Rei – UFSJ, São Joao del-Rei 2013. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?polo=&titulo=&aluno=mateus+do+nascimento.

diversas formas geométricas recortadas em papel ou EVA coloridos, assim como fios de arame, barbante e tiras de elástico, a fim de que tais materiais fossem explorados na sala de aula (Figura 1).

Figura 1 –Alguns materiais disponibilizados



Fonte: acervo do professor-pesquisador.

Na sequência dos trabalhos, as duplas receberam, por escrito, a tarefa para aplicar a RP, seguindo os passos indicados, para que os registros fossem feitos.

Problema

Considere a projeção ortogonal do paraboloide, $x^2+y^2=z$, do R^3, sobre o plano $z=0$. Utilize os passos da resolução de problemas sugeridos por Polya e Dante para verificar se existe um homeomorfismo entre os dois objetos geométricos.

a. Compreender o problema. *Para tal especifique*[7]*:*

a.1) O que se pede no problema? O que se procura no problema? O que o problema está perguntando?

ARA+HAN: *para verificar se há um homeomorfismo entre a projeção ortogonal do paraboloide $x^2+y^2=z$ e o plano $z=0$.*

INA+LIA*: o problema pede se existe o homeomorfismo entre a projeção ortogonal do paraboloide $x^2+y^2=z$ sobre o plano $z=0$.*

FLA+TAN: *verificar se o paraboloide é homeomorfo ao plano $z=0$.*

Percebe-se que não houve maior esclarecimento sobre o enunciado do problema, dando a entender que os estudantes o compreenderam.

a.2) O que está dito no problema e o que podemos usar? Os dados e as condições do problema são:

ARA+HAN: *o paraboloide $x^2+y^2=z$ e o plano $z=0$.*

INA+LIA*: está dito as informações referentes a projeção ortogonal do paraboloide $x^2+y^2=z$ sobre o plano $z=0$, sendo dados do problema os quais poderemos usar.*

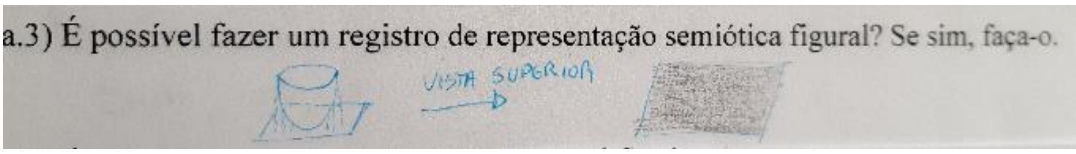
FLA+TAN: *paraboloide: $x^2+y^2=z$; plano: $z=0$.*

[7] As escritas em itálico são transcrições literais dos indivíduos, sem interferências do professor-pesquisador.

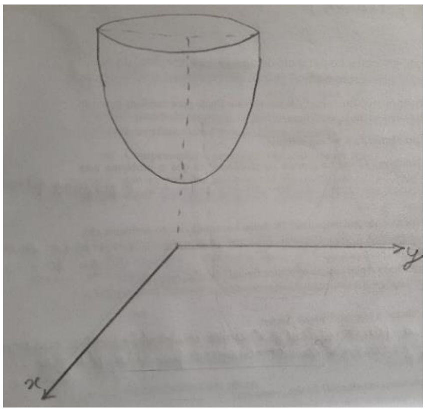
Os registros apresentados não contribuíram, além do que foi interpretado no primeiro item, para melhor compreensão do que continha o problema.

a.3) É possível fazer um registro de representação semiótica figural? Se sim, faça-o.

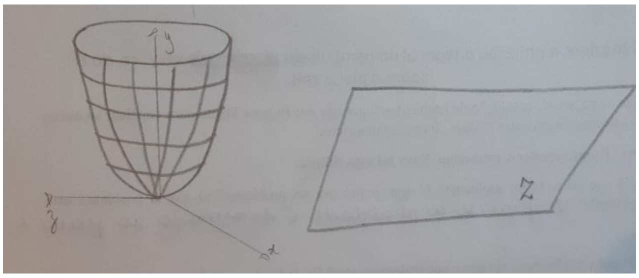
ARA+HAN:



INA+LIA*:* ➔



FLA+TAN:



Percebe-se que os três grupos conseguiram elaborar o registro figural do problema, cada um de uma forma diferente, mas mantendo alguma similaridade entre si. Entretanto, a representação do último grupo parece indicar uma melhor visualização do pretendido, uma vez que apresenta meridianos e paralelos do paraboloide, podendo-se induzir que estes cobrirão todos os pontos do plano ao serem projetados.

No acompanhamento das discussões nos grupos, o professor-pesquisador anotou, em seu diário de bordo, que a dupla ARA+HAN gesticulava, apontando para onde iriam as tais curvas quando projetadas. HAN chamava atenção de ARA para o fato do plano ser ilimitado em todas as direções, a exemplo do que ocorre com o paraboloide que se abria infinitamente para cima, alargando-se. Destacava, ainda, que no livro didático, o plano vem sempre representado como um paralelogramo, passando a falsa concepção de limitação, ao que ARA lembrou do professor fazendo um outro tipo de representação com dois lados paralelos e outros dois ondulados, para dar uma concepção diferenciada disso.

a.4) É possível estimar ou ‘arriscar’ uma resposta? Se sim, faça-o.

ARA+HAN: *não é tão simples estimar a resposta, mas pelo resultado anterior cremos que é homeomorfo.*

INA+LIA*: sim, pois o paraboloide é uma superfície e, assim, ao se expandir, torna-se homeomorfa do plano.*

FLA+TAN: *sim, o paraboloide é homeomorfo ao plano Z.*

Dos registros relativos ao item a.4), observa-se que os indivíduos, ao buscarem uma representação figural, perceberam a relação bijetora que a função projeção ortogonal conectaria o paraboloide com o plano, ou vice-versa. Dessa forma, os dois conjuntos geométricos seriam homeomorfos, preliminarmente.

Sintetiza-se a primeira etapa da RP, partindo-se, inicialmente, da constatação de haver unanimidade dos participantes em afirmarem que não lembravam qual era a superfície. O professor-pesquisador sugeriu que buscassem na internet o conceito e a imagem de um paraboloide, uma vez que todos estavam com seus celulares e a instituição disponibiliza *wifi*. Assim, tais recursos tecnológicos permitiram que houvesse uma compreensão do problema, particularmente com a obtenção das representações figurais.

Nessa direção, reitera-se o indicado no NCTM, de que a metodologia de RP não objetiva somente a aprendizagem matemática, mas envolve as cinco áreas preconizadas nesse documento, integrando e envolvendo uma matemática significativa para os estudantes, o que parece ter ocorrido até a presente etapa de análise.

Na sequência, faz-se o tratamento dos dados relativos à segunda etapa da resolução de problemas.

b) Estabelecer um plano.

b.1) Você já resolveu um problema semelhante? Se sim, como era?

ARA+HAN: *sim, relacionando cubo e esfera e outro em duas dimensões.*

INA+LIA*: sim.*

FLA+TAN: *sim, realizamos algumas atividades nas quais transformamos algumas figuras em outras, quando preservavam suas propriedades topológicas.*

Percebe-se, nos registros do primeiro e do terceiro grupo, aspectos relevantes da SAI, na medida em que os textos elaborados *a priori*, e levados ao debate, em sala de aula, com o auxílio do material concreto disponibilizado, possibilitaram aos estudantes a visão de algum tipo de problema previamente elaborado. Isso ocorreu, inclusive, com a evocação das propriedades topológicas elementares, as quais são necessárias à compreensão do conceito de homeomorfismo (PIAGET e INHELDER, 1993). Nesse sentido, acredita-se que os professores poderão desenvolver tais habilidades visuais na sua prática educativa.

b.2) Você lembra de algum problema semelhante que poderia lhe ajudar na resolução deste? Se sim, como era?

ARA+HAN: *o do cubo e da esfera, era furando de dentro para fora.*

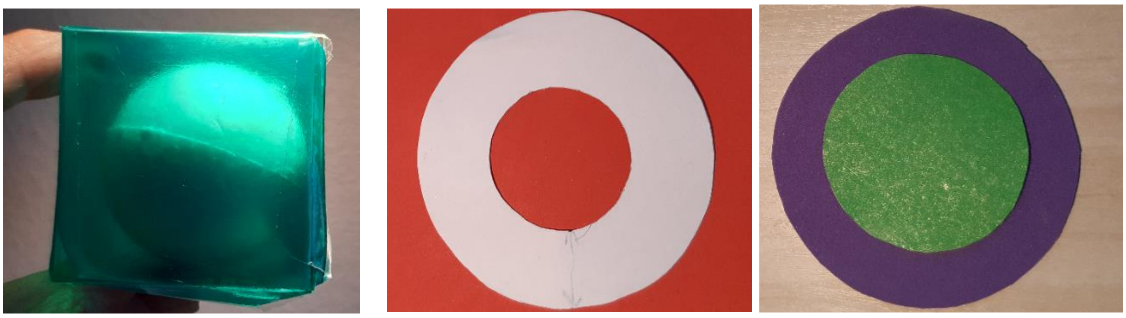
INA+LIA*: sim, consistia em uma superfície esférica inscrita em um cubo e devíamos verificar se existia homeomorfismo entre os dois objetos.*

FLA+TAN: *sim, verificamos que, por meio de uma transformação topológica de expansão, 2 círculos de tamanhos diferentes são homeomorfos.*

Nas respostas a este item, ressalta-se a importância de explorar recursos didáticos para que os aprendizes visualizem concretamente e, posteriormente, elaborem seus construtos visuais mentais de objetos geométricos que estão presentes na Matemática. Leivas (2009a, p. 22) define visualização como: "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos".

Na Figura 2, apresenta-se recursos materiais que o professor-pesquisador havia disponibilizado para os estudantes analisarem e buscarem propriedades que lhes permitiriam, intuitivamente, constatarem a existência de homeomorfismos.

Figura 2 - Material concreto explorado pelos estudantes.



Fonte: acervo próprio.

A imagem da esquerda, na qual foi inserida uma bola de isopor em uma superfície de um cubo transparente, parece ter sido inspiradora para os dois primeiros grupos. Na imagem central, foi recortado um círculo menor, de um maior com o mesmo centro, o que permitiria a identificação da circunferência do menor com a do maior, por uma bijeção. De forma similar, a da direita apresenta dois círculos sobrepostos com raios distintos.

b.3) Consegues esboçar um ou vários caminhos na busca da solução?

ARA+HAN: *projetar a sombra do paraboloide no plano (software); furar o paraboloide chegando ao plano (3D).*

INA+LIA*: primeiramente, consideramos o paraboloide como um sólido, porém, após discussões, tratamos o mesmo como uma superfície. Sendo assim, retomamos o pensamento da solução. Um caminho seria expandir o paraboloide até que tenha pontos coincidentes com o plano.*

FLA+TAN: *Um caminho, considerando que se trata de uma função que relaciona os conjuntos um a um.*

Percebe-se, dos registros apresentados, que os estudantes já apontam solução para o problema ou, pelo menos, esboçam ideia do que está acontecendo. Isso vai ao encontro do que Serres (1993) indicou a respeito de que a Topologia impõe um esquecimento do tradicional e da memória na constituição espacial. Nenhum dos grupos impôs a questão métrica como caminho para a resolução do problema, ou seja, "Mais uma vez, toda a história dessa geometria equivale à preservação de uma impureza, ou seja, de um certo tipo de não-matemática" (SERRES, 1993, p. 21).

Por sua vez, a metodologia utilizada na resolução desse problema (RP) está fortalecendo o aspecto levantado por Walle (2009), quando o autor aponta, como sendo uma das razões para a adoção da RP, o despertar da concentração e da atenção dos alunos sobre as ideias, dando sentido a elas.

c) Executar o plano.

c.1) Elabore uma representação utilizando registro figural.

ARA+HAN: - *construir o paraboloide (parábola e rotação); construir o plano z=0; reta perpendicular ao plano pelo ponto; verificar que a intersecção é uma só em todos os pontos do plano.*

INA+LIA*: idem a (a.3)*

FLA+TAN:

Percebe-se, nesta etapa da RP, que os indivíduos já teriam em mente o que estaria acontecendo com o problema, assim como a solução que se desenhava em suas mentes. Acredita-se que a SAI é uma técnica educacional que favorece a aprendizagem interativa em grupo, a partir de uma busca de conhecimentos prévios pelo computador (PAVANELO, 2017). Assim, essa investigação antecipa uma boa forma de desenvolver um tema bastante amplo e complexo, em um curto espaço de tempo.

Nota-se que o primeiro grupo partiu para a obtenção do paraboloide por rotação da parábola em torno de seu eixo, e que, na sequência, projeta ponto por ponto da superfície sobre o plano, indicando a bijeção entre os pontos dos dois entes geométricos. O terceiro grupo elabora um esquema gráfico, mostrando como as circunferências (paralelos da superfície de revolução) se projetam no plano, expandindo-se continuamente.

c.2) Elabore uma representação utilizando registro simbólico.

ARA+HAN: - *bijeção do ponto no plano (x,y,0) com o ponto de intersecção* (x,y,x^2+y^2)*:*

$$f : R \rightarrow R$$

$$(x,y,0) \rightarrow z=x^2+y^2$$

INA+LIA: *f:* $x^2+y^2=z \rightarrow z=0$ *e* f^{-1}*:* $z=0 \rightarrow x^2+y^2=z$.

FLA+TAN: *Considerando o paraboloide* $x^2+y^2=z$ *sendo X, e o plano z=0 sendo Y, temos que f: X* $\rightarrow$ *Y, se f é bijetiva, contínua e* f^{-1} *é contínua, então os dois espaços X e Y são topologicamente equivalentes, representando um caso de homeomorfismo.*

Observou-se que os três grupos demonstraram certa dificuldade na formalização matemática. Veja-se, por exemplo, que o primeiro grupo caracteriza os conjuntos de partida e de chegada como **R**. Embora colocando ternas no de partida (plano no espaço), indica levá-las no eixo real OZ, e não na terna (x,y,z), atendendo a lei $z=x^2+y^2$. Além disso, não aborda nada a respeito da inversa.

O segundo grupo ensaia uma definição, mas não explicita domínio e contra domínio e faz confusão de notação/conceito.

O terceiro grupo parece ir mais ao encontro da definição de homeomorfismo, na medida em que especifica os entes geométricos que constituem o domínio e o contra domínio. No entanto, considerou mais o uso de linguagem natural no registro apresentado.

d) Fazer retrospectiva da resolução

Conforme prevê a metodologia de RP, os alunos devem retomar a resolução e fazer uma retrospectiva, discutindo com os colegas e o professor as soluções encontradas. Essa etapa foi feita oralmente, uma vez que eram apenas seis alunos. As discussões ocorreram de forma amena, sempre com a interferência mediadora do professor-pesquisador. Este registrava no quadro as ideias utilizadas pelos grupos, as contestava ou aprovava e, finalmente, buscava o consenso sobre o problema proposto.

Ao finalizar a análise da atividade envolvendo RP, chama-se atenção para o que Onuchic e Allevato (2011) propuseram a respeito da inclusão da avaliação no processo. Quanto ao uso da metodologia, fica evidente que a preparação do problema pelo professor, ao selecionar uma tarefa envolvendo a construção de um novo conceito (homeomorfismo) foi observada.

No presente caso, por meio da primeira etapa para a metodologia de SAI, os alunos deram início à descoberta de um novo tema de Geometria. Nas discussões preliminares, agora presencialmente, os textos encaminhados ao professor pela internet, com antecedência, possibilitaram que os alunos lessem e compreendessem, individualmente, um problema específico, objeto da presente pesquisa: identificar a existência de um homeomorfismo entre dois objetos geométricos. Em seguida, a leitura foi complementada nos três grupos e discutida entre todos. Com a mediação do professor, os conceitos foram resgatados, inclusive com uma busca específica na internet sobre o paraboloide.

Ao elaborar um planejamento para a busca de solução do problema, cada dupla tratou de solucioná-lo, inquirindo, de quando em vez, o professor-pesquisador, que esteve sempre atento ao andamento dos trabalhos, registrando suas observações e fazendo indagações a cada grupo, de modo a elucidar dúvidas ou provocar novos olhares.

Ao término das resoluções, foi promovida uma plenária, na qual todos puderam apresentar e discutir suas soluções com novos aportes indicados, tanto pelo professor-pesquisador quanto pelos participantes, até chegarem ao consenso do que deveria ser a solução mais apropriada para responder ao problema.

Por se tratar de uma aula envolvendo professores em formação ou em exercício, regularmente matriculados em um programa de pós-graduação, uma análise avaliativa da atividade foi solicitada a cada grupo. Na sequência, apresenta-se uma síntese avaliativa das dificuldades encontradas pelos grupos.

ARA+HAN: *nossa dificuldade maior esteve na visualização do problema inicialmente, na aula presencial, pois na busca na internet ela foi bem acentuada, uma vez que poucos trabalhos foram localizados, especialmente, abordando ensino e não matemática pura. Sempre que se buscava por palavra-chave se localizava o artigo do professor constante dos anais de um congresso internacional.*

ARA*: eu imaginava no plano se formando apenas o círculo pelas projeções e não todo ele.*

HAN: *pensa-se no plano como um paralelogramo (limitação do plano por quatro segmentos de reta), especialmente como aparece tal representação nos livros.*

INA+LIA*: sim, pois o paraboloide é uma superfície e, assim, ao se expandir, torna-se homeomorfa do plano. Quanto à busca na internet foi, a exemplo do grupo anterior, bem limitada e de pouca compreensão.*

INA: *O paraboloide foi pensado como um sólido e não como uma superfície, inicialmente.*

LIA: *quanto ao registro simbólico do problema, enfrentei dificuldade na associação com as funções.*

FLA+TAN: *as dificuldades estiveram, inicialmente, nos textos que foram encontrados na internet para produzir o template que o professor pede para antes da aula. Compreender e interpretar o texto foi outro ponto de dificuldade. Pulamos um pouco o plano elaborado.*

FLA: *maior dificuldade foi visualizar o paraboloide. Com a busca no celular foi possível ter uma percepção para resolver o problema.*

TAN: *como ocorreu com a colega de dupla, houve dificuldade em lembrar qual a imagem do paraboloide. Nesse sentido, a internet favoreceu nossa tarefa.*

Entre os aspectos observados nas respostas, destaca-se a ausência de referências bibliográficas sobre o tema deste artigo, ratificando o que foi observado em etapas anteriores. Na sequência, são apresentadas as considerações finais.

Considerações

Este artigo levou em consideração uma pesquisa qualitativa participativa, a qual envolveu seis estudantes de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. O estudo foi realizado durante uma disciplina de Geometria ministrada no segundo semestre de 2019. O programa da disciplina atentou para o que Serres (1993) indicou sobre a evolução da Geometria ao longo dos séculos, quando disse que rupturas necessitam ser feitas nos currículos, especialmente do ensino superior, quanto aos aspectos oriundos desde Euclides. O autor aponta, então, que uma dessas rupturas deva envolver a Topologia, atualmente um dos ramos mais modernos nessa área do conhecimento matemático.

Tal assunto já foi, também, abordado por Piaget e Inhelder (1993), ao dizerem que propriedades topológicas são mais intuitivas e adequadas para a criança do que as euclidianas, uma vez que elas independem de medidas. Tais propriedades topológicas foram explicitadas em atividades dirigidas pelo autor do artigo para cursos de Pedagogia a distância, com boas avaliações por parte dos participantes envolvidos.

Tendo por objetivo analisar como estudantes de uma disciplina de Geometria em ação continuada de um programa de ensino utilizam a metodologia de RP para desenvolver uma atividade envolvendo homeomorfismos de figuras geométricas, foi explorada, inicialmente, a metodologia de ensino denominada SAI.

Os participantes fizeram um estudo prévio, fora da universidade, antecipando em 15 dias o assunto da aula presencial, tendo encaminhado, 48 horas antes desta, um texto de uma página para o professor-pesquisador analisar e levar para o debate na primeira parte da aula presencial.

No primeiro momento da aula, os textos foram discutidos, assim como materiais concretos experimentados e o conceito de homeomorfismo aprimorado e compreendido. No segundo momento, os participantes foram desafiados a resolver um problema a respeito do tema, tendo explorado aspectos visuais adquiridos com o tal material. Ao final, como previsto na RP, concepções topológicas que, inicialmente, haviam sido consideradas muito difíceis pelos estudantes, foram adquiridas.

Como resultado da investigação, conclui-se que o desenvolvimento de conceitos na prática pedagógica é possível, por mais avançados e difíceis que possam parecer. Ao se utilizar de metodologias adequadas, tais como a SAI e a RP, o professor-pesquisador constatou a apreensão dos conteúdos desejados. Em outras palavras, os alunos conseguiram desenvolver habilidades imaginativas para compreender o homeomorfismo existente entre um paraboloide e um plano ao utilizar a função projeção ortogonal do primeiro sobre o segundo ente geométrico. Isso aconteceu apesar de não ter sido exigido um formalismo matemático para demonstrar a continuidade e a bijeção dessa função.

Dessa forma, acredita-se que a pesquisa realizada possa contribuir com o escasso referencial a respeito do assunto, especialmente no tocante ao ensino, que foi a principal limitação para a pesquisa bibliográfica inicial dos estudantes.

Recebido em: 20/07/2020
Aprovado em: 06/03/2021

Referências

CHRISTENSEN, C.; HORN, M.; JOHNSON, C. **Inovação na sala de aula**: como a inovação disruptiva muda a forma de aprender. Porto Alegre: Artmed, 2009.

DUARTE, E. M. D.; ALLEVATO, N. S. G. Formulação de Problemas no desenvolvimento de um Jogo Educacional Digital de Matemática. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, SP, v. 17, 2020, p. 01-25 – e020028

LEIVAS, J.C.P. Organizando o espaço pelos caminhos topológicos. In: **Organização dos tempos e dos espaços na infância**- ULBRA, Curitiba: IBPEX, 2009c, pp.15-38.

LEIVAS, J.C.P. **Imaginação, Intuição E Visualização**: A riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de Cursos de Licenciatura de Matemática. Tese (Doutorado em Educação, Universidade Federal do Paraná), Curitiba, PR, 2009a, 294p.

LEIVAS, J.C.P.; FRANKE, R. F. Homeomorfismos: da intuição à visualização em construções geométricas. **Anais...** XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

MARTINS, W.S. **A Resolução de Problemas de Geometria Espacial sob a perspectiva dos conceitos Vygotskyanos**. 2019. 176f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2019.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. **Thinking Mathematically**. New York: Pearson, 2. ed, 2010.

ONUCHIC, L.de la R.; ALLEVATO, N.S.G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

PAVANELLO, R. et al. Sala de Aula Invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. **Boletim de Educação Matemática**, vol. 31, núm. 58, agosto, 2017, pp.739-759. UNESP, Rio Claro.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

POLYA, G. **A arte de resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SERRES, Michel. **Les origenes de la géométrie**: tiers libre des fondations. France: Flammarion, 1993.

RODRIGUES, R.U. Sala de aula invertida e geometria: Uma proposta para a formação do professor do ensino fundamental. **Educação no Século XXI**, v. 32. Matemática/Organização: Editora Poison Belo Horizonte p MG: Poisson, 2019. pp. 32-40.

SEVERINO, A.J. **Metodologia do trabalho científico**. 24ª ed. rev.e atual. São Paulo: Cortez, 2016.

VALENTE, J.A. *Blended learning* e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, Edição Especial n. 4/2014. Editora UFPR. pp. 79-97.

WALLE, J. A. Van de. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. Ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 2009