

GeoGebra em Dispositivos Móveis: o ensino de geometria na perspectiva da educação matemática crítica

GeoGebra on Mobile Devices: teaching geometry from the perspective of critical mathematical education

Caciano Cancian Baggiotto ¹

Lucí dos Santos Bernardi²

Vildes Mulinari Gregolin ³

RESUMO

Este artigo apresenta uma pesquisa desenvolvida com o objetivo de investigar e descrever possibilidades de aplicação do GeoGebra para dispositivos móveis, no ensino de geometria, na perspectiva da Educação Matemática Crítica. Trata-se de um tema sobre processos educativos amparados em tecnologia digital fortemente utilizada pelos estudantes: os smartphones. A abordagem realizada acerca da Educação Matemática Crítica, Dispositivos Móveis e GeoGebra foram os pontos fundamentais para a compreensão de como poderiam operar em conjunto e como é possível inferir que dessa integração emergem inúmeras possibilidades, das quais se destacam a construção do triângulo, a investigação de um círculo com exemplos em 3D. O estudo permite concluir que cenário para investigação se apresenta como um ambiente de aprendizagem inovador que contempla a autonomia do estudante diante da construção do seu

1. Graduado em Matemática pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI/FW. E-mail: caciano.info@gmail.com

2. Doutora em Educação Científica e Tecnológica e Mestre em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC. Graduada em Matemática pela Universidade de Passo Fundo – UPF. Docente pesquisadora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI/FW, Brasil. E-mail: lucisantosbernardi@gmail.com

3. Mestre em Educação nas Ciências – Unijuí e graduada em Matemática – URI/FW. Professora do Departamento de Ciências Exatas e da Terra na Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI/FW, Brasil. E-mail: vildes@uri.edu.br

conhecimento matemático, mobilizando o seu protagonista nesse processo. No entanto, exige a quebra de paradigmas, tarefa árdua, pois exige posturas, que professor e estudante estão habituados.

Palavras-chave: *Educação matemática crítica; Dispositivos móveis; GeoGebra; Matemática.*

ABSTRACT

This article presents a research developed with the objective of investigating and describing possibilities of application of GeoGebra for mobile devices, in the teaching of geometry, from the perspective of Critical Mathematical Education. It is a theme that puts on screen educational processes supported by digital technology heavily used by students: smartphones. The approach taken regarding Critical Mathematical Education, Mobile Devices and GeoGebra were the fundamental points for understanding how they could operate together and we can infer that from this integration numerous possibilities emerge, from which we highlight the construction of the triangle, the investigation of a circle and the 3D example. The study allows us to conclude that Scenario for Investigation presents itself as an innovative learning environment that contemplates the student's autonomy in face of the construction of their mathematical knowledge, mobilizing its protagonist in the process. However, it requires breaking paradigms, an arduous task, as it requires attitudes, which the teacher and student are used to.

Keywords: *Critical Mathematics Education. Mobile devices. GeoGebra. Mathematics.*

Introdução

O presente estudo está ancorado teoricamente nos princípios da Educação Matemática Crítica, para pensar processos educativos que contemplem a autonomia do estudante diante da construção do seu conhecimento matemático e o olhar para o contexto social dos estudantes.

Como ponto de partida, assentimos que nossa sociedade se encontra permeada pelo uso de dispositivos tecnológicos e voltada para as mídias digitais e é esse o fator que mobiliza nossa investigação. Dados da Agência Nacional de Telecomunicações - Anatel - indicam que o Brasil terminou o mês de abril de 2020 com 225,6 milhões de celulares e densidade de 106,54 cel/100hab⁴. Tal acesso se constitui, ao nosso olhar, em uma oportunidade para desenvolvermos novas propostas para ensino de

4. Disponível em <https://www.teleco.com.br/ncel.asp>. Acesso em 02 jul 2020.

matemática, entrelaçando o uso de tecnologias com a adoção de uma postura crítica diante do conhecimento.

Assim, nosso trabalho relata os resultados de uma pesquisa, de cunho bibliográfico, que teve por objetivo investigar e descrever possibilidades de aplicação do *GeoGebra* para dispositivos móveis, no ensino de tópicos de geometria, na perspectiva da Educação Matemática Crítica⁵. Apresentamos proposições educacionais no intuito de contribuir na construção do saber matemático de estudantes da educação básica, no campo da geometria.

O texto ora apresentado está organizado nas seguintes seções: apresentamos alguns pressupostos da Educação Matemática Crítica, o aparte teórico que ampara nossa investigação; discorremos sobre Ambientes de Aprendizagem, enfatizando Cenários para Investigação; trazemos elementos sobre o Aplicativo *GeoGebra*, tratando de suas Funcionalidades nos Dispositivos Móveis; por fim, apresentamos três proposições desenvolvidas para o *GeoGebra* em dispositivos móveis: a construção de um triângulo, investigação do círculo e exemplo 3D.

A Educação Matemática Crítica

No contexto dos processos educativos escolares, colocamos em pauta a seguinte questão: qual o sentido em ensinar Matemática?

De acordo com Skovsmose (2008), não se pode identificar a Matemática apenas como um assunto a ser aprendido ou ensinado, mas como elemento que compõe estruturas tecnológicas, econômicas e políticas. Isso implica afirmar que a composição dessa ciência está amparada em princípios como raciocínio lógico, representação simbólica de resultados e sua aplicabilidade social e cotidiana. Há uma estrutura mais complexa que pensar em conceitos, logo, é necessário dar sentido para seu aprendizado na busca de conectá-la com problemas sociais e com situações vividas diariamente. Para tanto, os problemas não devem ser meros formadores de expressões, mas representações da vida real dos envolvidos, desde que escritas e modeladas em linguagem Matemática.

Esse debate se coloca no campo da Educação Matemática Crítica

5. Relatório intitulado “Dispositivos móveis: uma ferramenta para o ensino de geometria na perspectiva da educação matemática crítica”. (BAGGIOTTO, 2019).

(EMC), que possui como principais objetivos a democracia e a construção de uma educação política com vistas para a igualdade de direitos e solidariedade coletiva. Dessa forma, pretende proporcionar ao estudante um ambiente escolar propício para concatenação dos pilares econômicos e sociais, em contraste com as atividades Matemáticas que devem ser trabalhadas de acordo com a base curricular.

O movimento da EMC teve início na década de 70 e foi proposto pelo professor emérito na Universidade de Aalborg (Dinamarca) Ole Skovsmose⁶. A essência de tal movimento está no olhar diferenciado sobre o ambiente escolar, ou seja, situa-se na dimensão de que o estudante precisa ter maior autonomia. Uma maneira de praticar o diferencial é evitar as atividades restritas, como resoluções matematicamente mecânicas.

Tal proposta visa a localizar o estudante como indivíduo ativo no meio em que vive, tendo o cenário sociocultural e político como pauta para o aprendizado. Toda inovação gera desafios e ao analisar a realidade escolar e os princípios da EMC, Skovsmose destaca, em entrevista, à Ceolim e Hermann (2012, p. 14) os seguintes aspectos:

- Mostrar que a Matemática representa uma racionalidade que poderia servir a muitos interesses diferentes. Isso se aplica a quaisquer formas de Matemática: Matemática acadêmica, Matemática não acadêmica, Matemática aplicada, Matemática pura, Matemática escolar etc.
- Reconhecer que a Educação Matemática pode servir a funções muito diferentes em diferentes contextos socioeconômicos, inclusive a uma disciplina.
- Explorar em que medida é possível, por meio da Educação Matemática, fazer a diferença para alguns estudantes em algumas situações, e dessa forma tentar realizar uma Educação Matemática para a justiça social.

A Educação Matemática Crítica é oriunda da educação crítica impulsionada pelos movimentos estudantis de 1968, que por sua vez teve maior impacto no ensino superior, pois tinha o intuito de questionar as ideias de neutralidade e objetividade da ciência. Além disso, durante o movimento, questionou-se também o formato conhecido como currículo

6. Atualmente ele também é pesquisador no curso de pós-graduação em Educação Matemática da UNESP, campus de Rio Claro.

conduzido pelo professor e buscou-se criar a possibilidade de os estudantes contribuírem ativamente na decisão dos conteúdos do currículo, justamente com o intuito de criar uma educação voltada para resolução de problemas e elaboração de projetos. Em pouco tempo, a educação crítica se espargiu para a Educação Básica alavancando projetos, trabalhos em grupos e abordagens temáticas. A educação baseada em problemas teve maior enfoque com as ciências humanas e sociais, mas com a abordagem interdisciplinar ela se expandiu até as exatas (SKOVSMOSE, 2008).

De acordo com Skovsmose (2008), a inspiração teórica da EMC situa-se em alguns trabalhos que não foram desenvolvidos especificamente para o estudo da Matemática. O primeiro deles é a noção de diálogo de Paulo Freire que visa uma educação emancipatória e celebra o contato não hierárquico entre estudante e professor, ou seja, Freire (2005) defende que por meio do diálogo entre estudante e professor pode ser feita a definição dos temas a serem trabalhados. Nesse sentido, o estudante é parte integrante do processo e o aprendizado ocorre a partir dos conhecimentos que ele possui, os quais são resultantes do seu convívio social e servem de alicerce para a construção de seu conhecimento científico.

Outro trabalho apontado por Skovsmose (2008) foi a Teoria Crítica da Escola de Frankfurt, que propunha que as ciências sociais oferecessem contribuição ativa na emancipação do estudante. O desenvolvimento da Teoria Crítica e as preocupações com as relações entre matemática e desenvolvimento propiciaram a efervescência de novas ideias no campo da Educação Matemática, e o debate foi fonte inspiradora para o surgimento de novas perspectivas na Educação Matemática, como o lançamento pelo professor Ubiratan D'Ambrósio do Programa de Etnomatemática. A comunidade acadêmica o recebe como uma possibilidade de mudança no enfoque dado ao ensino da Matemática até então, um trabalho que também inspirou a EMC

Assim, sob as lentes da EMC, Skovsmose (2008) desenvolve alguns conceitos pertinentes para uma educação matemática, “respostas” às demandas sociais que emergem com o pensamento democrático da educação, entre os quais propõem o conceito de Matemática “[...] vista como uma competência similar à literacia caracterizada por Paulo Freire” (p. 16).

Para compreendê-la se faz necessário definir o termo letramento que, segundo Soares (2018, p. 66), "O letramento cobre uma vasta gama de conhecimentos, habilidades, capacidades, valores, usos e funções sociais; o conceito de letramento envolve, portanto, sutilezas e complexidades difíceis de serem contempladas em uma única definição". Ao fazer uma análise, com vistas ao aspecto de saber ler e saber escrever, percebe-se que se trata de algo muito maior do que uma simples habilidade adquirida por intermédio de estudos, consiste em uma mudança de status. Soares (2018) apresenta o conceito de "[...] estado ou condição de quem não apenas sabe ler e escrever, mas cultiva e exerce as práticas sociais que usam a escrita [...]" (p. 47).

Sabe-se que *literacia* e letramento são sinônimos e oriundos do termo inglês: *literacy*. D'Ambrósio (2004, p. 36) define *literacia* como: "[...] a capacidade de processar informação escrita, o que inclui escrita, leitura e cálculo, na vida cotidiana". Paulo Freire quando propõe uma visão crítica sobre a pedagogia cria um contraponto as ideologias conservadoras e ao conceito de *literacia* embasada em um projeto político e ético. (FREIRE, 2005).

Para Skovsmose (2008) deve-se entender a Matemática como um conjunto de habilidades que compreendem tanto o conhecimento matemático, para trabalhar com os números e suas operações, quanto à capacidade de analisar de forma crítica o contexto político e social. Dessa forma torna-se possível entender como a Matemática representa as mais diversas situações cotidianas do universo. O autor propõe ainda uma educação que não se restrinja a conceitos isolados, mas que diante da perspectiva de microssociedades possa desenvolver no estudante um senso de responsabilidade sócio político para construção de uma sociedade democrática no futuro (SKOVSMOSE, 2008).

O autor destaca que se utiliza o termo Matemática para designar aquilo que é denominado de caráter crítico da Matemática, que não pode ficar restrita ao escopo de uma definição, considerando que sua definição está fortemente vinculada ao contexto ao qual se aplica. Skovsmose (2008) evidencia a possibilidade de vincular a Matemática aos termos confiabilidade e responsabilidade, sendo que a primeira aponta para a parte numérica exata da Matemática, enquanto a segunda se volta para a parte interpretativa, tal como gráficos. Outro enfoque está voltado para a sugestão da utilização de ambientes de estudo, os quais propiciem o

trabalho voltado para confiabilidade e responsabilidade, por meio deste trabalho possibilita-se trilhar o caminho rumo ao *empowerment*.

Ambientes de Aprendizagem: falando em cenários para investigação

A educação tradicional que aos poucos vem sendo transformada para construção do conhecimento, em que o aluno tem espaço ativo nessa tarefa, arremete a uma análise sobre tal, é importante situar-se em relação à Matemática tradicional baseada no paradigma do exercício para melhor entendimento do conceito de situações investigativas na educação. Para a educação Matemática tradicional, o saber matemático está atrelado à capacidade do aluno em escrever números corretamente e trabalhar com estes quando encontrados no interior de problemas. Nessa Matemática o assunto envolvido no problema, o contexto e a forma como ele se apresentar não têm relevância, o que de fato importa é que o aluno possa treinar a resolução de cálculos (LIPPMANN, 2009).

Apesar de pesquisas e debates ainda é realidade em muitas escolas o método tradicional, em que a Matemática é vista como um conjunto de métodos exatos e acabados. Tal ambiente está permeado por exercícios e exemplos distantes da realidade dos alunos. Diante disso, a avaliação gera grandes preocupações entre os estudantes, frequentemente, gera falsas expectativas com relação a sua ascensão social. Esta pode conduzir o estudante ao pensamento que sua vida social será baseada em seu desempenho escolar e grau conquistado.

A Matemática baseada em algoritmos de anexos, transmitidos de forma mecânica e distante da vida cotidiana e do momento social vivido pelos estudantes conduz o estudante ao pensamento de que o fracasso escolar está ligado à individualidade de cada aluno. O formato apresentado acaba por consequência afastando a possibilidade do domínio do conhecimento matemático por muitos estudantes, que criam barreiras por interpretar a Matemática exatamente da maneira que lhes foi apresentada, ou seja, distante e abstrata, tornando-a complexa (HALMENS-CHLAGER, 2001).

Essa realidade está fortemente atrelada ao paradigma do exercício, cenário, em que, normalmente, os alunos são organizados em fileiras

diante da lousa e do professor, de maneira expositiva, apresenta os conceitos utilizando-se de técnicas matemáticas. Além disso, alguns exemplos sobre o tema são resolvidos e, em seguida, os alunos são direcionados a resolução de exercícios, geralmente, oriundos dos livros didáticos que abordam aquele assunto. Não há preocupação com a relevância do assunto desenvolvido em contraste com o momento cronológico e ou localização geográfica do aluno, ao passo que o foco está direcionado à resolução dos exercícios de maneira sistemática, semelhante à execução de um algoritmo.

Este formato está baseado em uma espécie de acordo selado entre alunos e professores, pois o professor, por sua vez, preocupa-se em apresentar no enunciado, todos os dados necessários para a resolução. Em contrapartida, os alunos aceitam utilizar-se destes, sem questionar a importância para seu desenvolvimento, buscam a resposta, pois a resolução algorítmica lhe conduz a uma resposta única tida como verdadeira. (SKOVSMOSE, 2001).

Ao analisar o contexto da educação, Dantas (2017) destaca a importância da evolução do ensino. Destaca, também, a necessidade de contextualizar o objeto de estudo na Matemática sob temas da atualidade. Assim a escola se encaminha para cumprir o seu papel na formação do integral do sujeito, além de possibilitar ao aluno a autonomia e senso crítico para compreender e interpretar os dados apresentados pela sociedade. Além da contextualização que facilita significativamente o entendimento do tema é necessário que o ambiente proposto para a aprendizagem ofereça possibilidades de investigação, pois não basta entender, é necessário que o aluno desenvolva sua ótica crítica para utilizar-se do seu conhecimento em situações distintas.

Um cenário para investigação é um ambiente de aprendizagem que possibilita conduzir o aluno à dúvida, ou seja, criar perguntas para que o estudante, por iniciativa própria, encontre respostas. Nas atividades matemáticas, a formulação de métodos e a compreensão da atividade realizada, proporciona ao professor um ambiente para criar dúvidas, lançar desafios, para fomentar a participação dos alunos, pois o aprendizado está condicionado ao engajamento na realização da atividade, visto que o professor não será o transmissor do conhecimento previamente sistematizado através de material por ele elaborado. O diferencial da utilização de cenário para investigação é: a partir do momento que os alunos desafiados se envolvem na realização das tarefas em busca de respostas,

a construção do conhecimento torna-se transparente e a responsabilidade por esta, é dos alunos. (SKOVSMOSE, 2001).

O movimento proposto exige que o professor saia de sua “zona de conforto” para uma concepção problematizadora de educação, uma “zona de risco”, onde se constroem relações dinâmicas, envolvendo de forma ativa professor e aluno, que é convidado a indagar e/ou investigar. De acordo com Skovsmose (2001), a zona de conforto é um lugar simbólico onde tudo é conhecido e controlável, na qual a situação educativa mostra um alto grau de previsibilidade tanto para alunos quanto para professores. Zona de risco se contrapõe a zona de conforto

É função do professor, enquanto agente ativo, fomentar essa zona de risco, com atenção especial para a forma com que essa é estabelecida, pois de acordo com o formato adotado pelo professor, a interpretação dos alunos e a tentativa de criar desafios podem ser confundidas com comandos a serem executados. De uma forma sucinta pode-se dizer que um ponto de partida para o professor está ancorado no questionamento ‘o que acontece se...?’. Com isso, os alunos serão convidados a sair da zona de conforto, pensar e/ou buscar tal resposta. Quando se trata de Matemática, mais especificamente geometria, muitas propriedades desta podem encantar os alunos. O professor pode ainda se utilizar de outras perguntas para ampliar o ângulo de visão dos estudantes relacionados ao tema principal da pauta. (SKOVSMOSE, 2001).

Conforme destaca Onuchic e Allevato (2011) o professor precisa buscar a postura de incentivador, para que os alunos se utilizem de técnicas operatórias e conhecimento que já possuem para encontrar soluções tornando este aprendizado sólido. O estudante mais autônomo com capacidades para pensar matematicamente e, por intermédio de uma base previamente construída, além de métodos próprios desenvolvidos, amplia sua compreensão relacionada aos conceitos matemáticos mais abstratos.

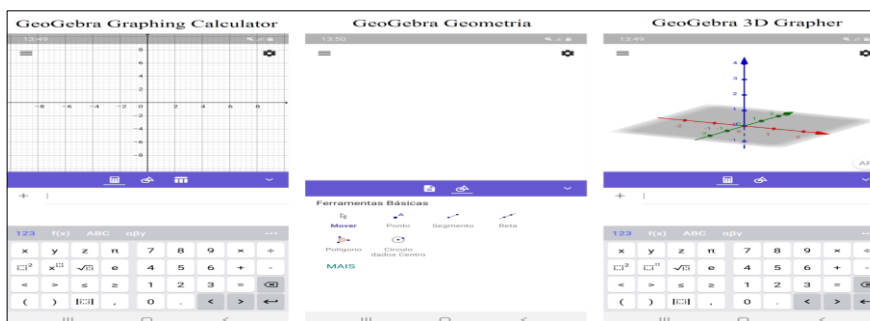
O Aplicativo GeoGebra e suas Funcionalidades nos Dispositivos Móveis

Para a EMC é fundamental que o aluno tenha contato com seu meio social e não se detenha aos paradigmas de ensino que perduram por anos e coloca o professor como ponto central e o exercício como principal

ferramenta para o treinamento matemático (SKOVSMOSE, 2008). O aluno atual nascido em uma era tecnológica avançada, com recursos poderosos na palma da mão, não consegue imaginar uma realidade sem dispositivos eletrônicos. Para ele, computadores, *tablets* e *smartphones* são extensões de seu pensar e o treinamento não faz mais parte de suas rotinas.

Os aplicativos disponibilizados no portal GeoGebra.org, sob o aspecto de ferramenta para abordagem da ementa da educação básica, estão disponíveis e além de funcionalidades contam com a *interface* conforme o padrão de desenvolvimento para dispositivos móveis, ou seja, não possui barra de menus e nem o formato tradicional. Para substituir essa, possui as tradicionais três linhas que indicam os menus dos aplicativos da Plataforma *Android*, em que estão abrigadas as principais operações referentes ao projeto, tais como solicitar um novo ou salvar o atual, entre outras. A tela é dividida ao meio, uma das partes é destinada a zona gráfica e a outra é destinada às ferramentas de construção e zona algébrica que estão divididas em duas abas, na parte inferior da zona algébrica está localizada a entrada de comandos conforme Figura 1.

Figura 1. Tela inicial dos aplicativos.



Fonte: Autoria própria (2019).

Apesar da limitação de espaço, devido ao tamanho reduzido de tela dos dispositivos móveis, o aplicativo apresenta uma boa usabilidade. As ferramentas de construção ganham destaque por sua apresentação em formato expandido, fator que facilita o acesso às mesmas. Outro aspecto relevante e que visa aumentar a autonomia do estudante é a ajuda em tempo real, em português, a qual é apresentada a cada toque que o usuário aplica sobre uma ferramenta, conforme representado na Figura 2.

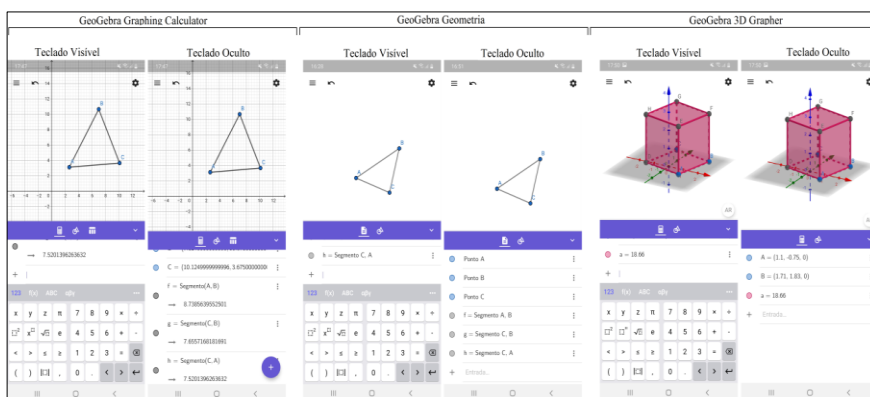
Figura 2. Acesso às ferramentas de construção.



Fonte: Autoria própria (2019).

Em relação à zona algébrica, esta é um tanto prejudicada pelo pouco espaço. Quanto mais construções são aplicadas na área gráfica, a fim de manter o teclado visível, apenas o histórico do último comando pode ser visualizado. Com a inserção de muitas construções ou inúmeros comandos forem executados, a rolagem torna-se extensa e, por vezes, confusa. Porém, considerando a praticidade que a portabilidade dos recursos propicia ao aluno, tal detalhe torna-se irrelevante, conforme pode ser observado na Figura 3, em que foi esboçado um triângulo e um cubo para exemplificar as circunstâncias descritas.

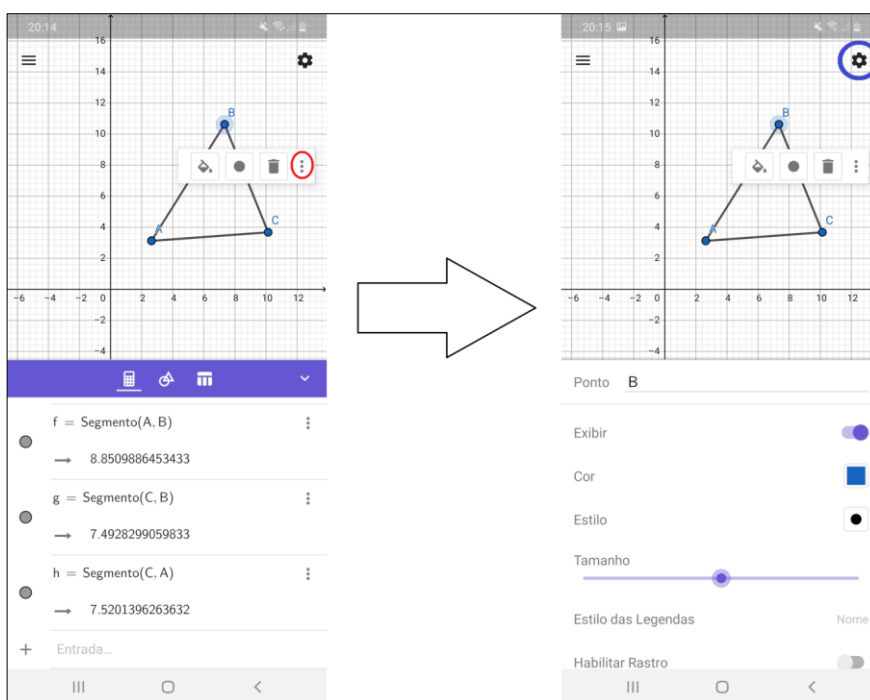
Figura 3. Zona Algébrica dos aplicativos.



Fonte: Autoria própria (2019).

Para manipular os objetos e editar os atributos específicos de cada um basta tocar sobre o mesmo e uma barra flutuante será apresentada contendo atalho para a alteração de dois atributos e a opção de excluir. Ao final da barra estão os três pontos empilhados (detalhe em vermelho na Figura 4), que também é um ícone padrão das *intefaces android*, o qual direciona o usuário às demais opções que são apresentadas sobre a metade da tela destinada as ferramentas de construção e zona algébrica. Outras configurações da área gráfica são acessadas na engrenagem (detalhe azul na Figura 4) apresentada no canto superior da tela.

Figura 4. Manipulação de objetos e propriedades do aplicativo.



Fonte: Autoria própria (2019).

Após a análise das *interfaces* e uma abordagem sucinta sobre os recursos oferecidos pelos aplicativos percebe-se que se trata de ferramentas poderosas para auxiliar o professor na concepção de um ambiente investigativo em sala de aula. Por se tratar de ferramentas portáteis permitem estender o trabalho para além do ambiente escolar e desenvolver

tarefas colaborativas, por meio de ferramentas de compartilhamento via redes sociais, contudo, faz-se necessário identificar maneiras de utilizá-las de forma coerente e produtiva.

As ferramentas de construção e recursos do *software* podem contribuir com a autonomia do estudante na busca e construção do saber, a correta utilização destas potencializará a dinâmica em sala de aula, contanto que a elaboração da aula se dê a partir dos pressupostos de um ambiente investigativo, levando em consideração a realidade vivida pelos alunos e o conceito matemático que será abordado.

Devido à dimensão da área de estudo, considerando que os aplicativos disponibilizados no portal GeoGebra.org oferecem uma ampla gama de ferramentas e recursos e a ementa do estudo da Matemática para a educação básica compreende diversas temáticas e habilidades que devem ser desenvolvidas, esse trabalho se detém a apresentação de algumas possíveis utilizações de ferramentas específicas em sintonia com os princípios investigativos, no intuito de aguçar o interesse docente em relação à utilização destas ferramentas. Destaca-se o papel fundamental do professor na elaboração e contextualização das atividades.

Para conceber o ambiente investigativo a escolha do tema de acordo com a realidade dos alunos é fundamental, e para isso podem ser utilizados objetos e figuras visualizados e manipulados no dia a dia, um assunto que está em foco nas mídias, conversar com professores de outras áreas e utilizar material vinculado ao assunto que está sendo trabalhado para promover a interdisciplinaridade ou ainda criar um contexto, em um exemplo hipotético, visitar algum espaço que contemple a figura ou sólido objeto do estudo.

Proposição 1: construção de um triângulo

O aplicativo *GeoGebra Graphing Calculator* é indicado para realizar atividades em geometria plana, já que ele não oferece suporte ao trabalho com geometria espacial. Para explorar a construção de um triângulo, com ênfase no estudo de suas propriedades, pressupõe-se que os estudantes conheçam o seu conceito e seus elementos. Assim, o professor pode convidar os alunos a utilizar a ferramenta polígono para desenhar um triângulo.

Ao tocar na ferramenta polígono recebe-se, do aplicativo, a instrução: 'Selecione todos os vértices e, então, o vértice inicial novamente'. Essa mensagem é o procedimento para o correto emprego da ferramenta supracitada. Diante disso, percebe-se que basta o estudante conhecer o conceito de vértice para ter condições de esboçar um triângulo de forma autônoma, ou seja, sem intervenção do professor.

No entanto, a utilização de um aplicativo como ferramenta para o ensino não é o fator que diferencia um Cenário para Investigação de um treinamento matemático. A fronteira entre eles é uma linha tênue, geralmente determinada pela quantidade de intervenções do professor na execução das atividades. Nesse contexto, pode-se representar dois possíveis cenários, tal que, o primeiro encontra-se baseado no Paradigma do Exercício e o segundo em um Cenário para Investigação.

Nesse cenário, baseado no Paradigma do Exercício, o professor é o protagonista na execução da atividade. Assim, ele apresenta instruções algorítmicas para a construção e manipulação de um triângulo, tais como: i) Tocar na ferramenta polígonos; ii) Esboçar o primeiro vértice clicando na coordenada 2 em X e 3 em Y; iii) Tocar na coordenada 6 em X e 3 em Y, para marcar o segundo vértice; iv) Tocar na coordenada 4 em X e 6 em Y, para marcar o terceiro vértice; v) Tocar, novamente, sobre o primeiro vértice desenhado, para finalizar o triângulo. Este é o método normalmente empregado nas aulas, em que são utilizados *softwares/aplicativo* como material de apoio, a fim de estudar algum conceito matemático.

É fato que este formato deixa o professor em uma posição bem confortável, pois todos os triângulos estarão nas mesmas coordenadas. Como eles foram esboçados, por meio de uma sequência ordenada de passos, o ponto 'A' estará na mesma coordenada para todos os alunos, e, portanto, não existem vários triângulos em diferentes quadrantes, e sim apenas um. Ao propor uma modificação na figura construída, por exemplo, para transformar esse triângulo em um triângulo retângulo, as instruções seriam as seguintes: i) Tocar sobre a ferramenta mover; ii) Deslocar o ponto C (arrastar com o dedo) para a coordenada 2 em X e 6 em Y.

Com a execução desses passos percebe-se a utilização de um meio tecnológico e o aluno visualizou o triângulo, objeto de estudo proposto, porém, qual a real diferença entre utilizar um *software* ou uma folha quadriculada, se as ações executadas pelo aluno estão todas pré-defini-

das em uma sequência ordenada? Qual o aprendizado? Qual a possibilidade que o aluno tem de visualizar triângulos distintos, com diversas inclinações, nos diferentes quadrantes? Será que este aluno tem a capacidade de abstração para perceber que o triângulo retângulo, por ele construído, ao sofrer uma rotação, continua sendo um triângulo retângulo?

No formato apresentado e muito presente nas salas de aula para responder os questionamentos acima, o professor normalmente utiliza-se de uma explicação expositiva de mais movimentos e ações ordenadas, certamente que o aluno irá compreender o que está ocorrendo, porém implícito a isso estará condicionado a seguir algoritmos de acordo com uma sequência pré-estabelecida por alguém, sem pensamento crítico e sem autonomia para pensar e encontrar suas próprias verdades.

Se o estudo da geometria dispõe de propriedades absolutas não faz sentido estabelecer sequências que limitem o aluno, de modo que ele aprenda somente aquilo que o professor pretende ensinar. Em um cenário investigativo cabe ao professor deter-se a lançar desafios e intervir o mínimo possível. Nesse estudo do triângulo, o primeiro passo é determinar a ferramenta de desenho que será utilizada para esboçar um triângulo. Desse modo, eles podem ler a ajuda exibida pela ferramenta, ao tocar sobre ela e, a partir disso, o olhar investigativo está instaurado, pois com quaisquer três vértices traçados, certamente, haverá diferentes triângulos. Alguns estudantes terão triângulos retângulos, outros isósceles ou escalenos.

Para fomentar a compreensão dos conceitos e aguçar a curiosidade dos alunos acerca do assunto, questiona-se, ‘O que acontece se...?’. Nessa perspectiva, para uma simples pergunta como: ‘o que acontece se um dos vértices for deslocado uma unidade em X e duas em Y?’, poder-se-ia esperar uma quantidade de respostas igual ao número de alunos. A aula estaria mais dinâmica, porém, sem o devido cuidado na elaboração dos desafios, potencializam-se as dificuldades do professor em entender todas as possíveis situações que ocorreriam. Além disso, os alunos estariam realizando sequências de alterações geométricas desordenadas e sem finalidade alguma. Esse excesso de possibilidades sem um propósito tende à perda de foco e, conseqüentemente, à distração, comprometendo o objetivo da investigação.

Para obter o resultado esperado é importante que a elaboração do roteiro, para concepção do cenário, ocorra de forma que os alunos possam explorar os recursos e aprender com eles. Para isso utiliza-se de

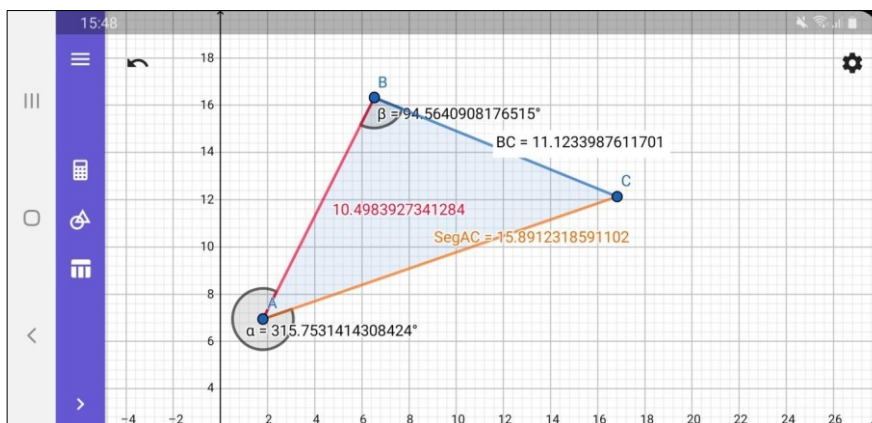
perguntas astutas, com a finalidade de conduzir o aluno ao entendimento do conceito. Por exemplo, de acordo com o pressuposto de que o aluno conhece a classificação dos triângulos, quanto aos seus lados, convida-os a classificar os triângulos por eles criados, e, por intermédio da alteração da posição de um único vértice, produzir as três possíveis derivações.

Durante o desenvolvimento da tarefa, caso os alunos apresentem uma postura conservadora, frente ao aplicativo, cabe salientar a existência de outros métodos para realização da transformação. Além de mencionar que eles podem, inclusive, trabalhar na zona algébrica alterando diretamente as coordenadas. Dúvidas irão surgir, entretanto, deve-se ter em mente os princípios de um ambiente investigativo, a fim de direcionar respostas às possíveis opções oferecidas pela ferramenta, sem determinar como fazer. Em posse dos triângulos apresentam-se os recursos que possibilitam a personalização, tais como: cores e rótulos, os quais podem ser empregados nos vértices e arestas, potencializando a compreensão.

Com objetivo de aumentar o espírito investigativo e ampliar o domínio a respeito da ferramenta, bem como do conceito matemático, cabe o desafio: ‘o que acontece se para realizar esta atividade for utilizada a ferramenta Polígono Regular? Ou ainda, as ferramentas pontos e seguimentos de retas? Ou então, será possível realizar esta tarefa apenas utilizando a ferramenta segmento?’. A partir da classificação de um triângulo, quanto aos seus ângulos, vários questionamentos podem ser realizados. Caso os alunos ainda não tenham compreendido e aplicado as ferramentas de verificação de medidas, essas devem ser apresentadas e lançam-se questionamentos sobre a abertura dos ângulos, bem como o que ocorre com a soma desses quando o aluno movimenta um dos vértices sobre o plano.

Um desafio a ser proposto pelo professor trata-se da determinação de um padrão, por meio do estudo da abertura do ângulo e comprimento de aresta ao passo que o estudante alterar a posição de um dos vértices. Na Figura 5 é possível visualizar de forma sucinta algumas análises que o aluno pode fazer sobre a figura em questão. Outra análise pertinente destina-se ao recurso de fixar o tamanho de arestas e posição de um ou mais vértices. Os alunos têm a possibilidade efetuar testes para identificar o que ocorre ao alterar a posição dos ou do vértice livre e verificar se apenas com um vértice livre pode-se obter todos os tipos de triângulo.

Figura 5. Triângulo esboçado utilizando o GeoGebra Graphing Calculator.



Fonte: Autoria própria (2019).

Quando aplicado lado a lado evidenciam-se algumas contribuições do cenário investigativo para com a autonomia do aluno. Isso fica evidente durante a construção e análise do triângulo, em que no paradigma do exercício o professor é o protagonista e determina como utilizar o aplicativo e as regras de construção, enquanto no cenário investigativo o aluno é livre para desenvolver conhecimentos. Essa relação torna-se clara, por meio na análise comparativa estabelecida no Quadro 1.

Quadro 1. Instrução para construção de um triângulo.

Paradigma do Exercício	Cenários para Investigação
i) Tocar na ferramenta polígonos; ii) Esboçar o primeiro vértice clicando na coordenada 2 em X e 3 em Y; iii) Tocar na coordenada 6 em X e 3 em Y, para marcar o segundo vértice; iv) Tocar na coordenada 4 em X e 6 em Y, para marcar o terceiro vértice; v) Tocar, novamente, sobre o primeiro vértice desenhado, para finalizar o triângulo.	Os estudantes leem a ajuda exibida pela ferramenta, ao tocar sobre ela e a partir dessa esboçar o triângulo.
i) Tocar sobre a ferramenta mover; ii) Deslocar o ponto C (arrastar com o dedo) para a coordenada 2 em X e 6 em Y.	Convidar os alunos para classificar, os triângulos por eles criados, e por intermédio da alteração da posição de um único vértice produzir as três possíveis derivações.

Fonte: Autoria própria (2019).

É possível identificar nesse formato que a função do professor é de mediador dos testes, incentivador dos resultados e ao passo que os alunos começam a encontrar resultados idênticos para triângulos congruentes a troca de informações entre eles começa a ficar mais evidente, pois como pode com triângulos em posições diferentes e com áreas diferentes apresentar os mesmos ângulos? Ainda se percebe que eles são donos das próprias construções, tiram suas dúvidas a respeito do assunto trabalhado e neste sentido o professor, para certificar-se de que o conhecimento foi construído, elabora desafios para os alunos desenvolverem fora de sala de aula.

A entrega destes desafios pode ser feita por e-mail ou compartilhado via *WhatsApp* ou até mesmo em uma pasta pública na nuvem, onde os alunos postam seus materiais. Existe ainda a opção de capturar a imagem gerada e a partir daí encaminhar. Esse trabalho possibilita identificar muitos aspectos positivos para o aluno, não somente relacionado ao conceito matemático abordado, mas aspectos sociais importantes, tais como: o conhecimento específico, quando se trata da formação do cidadão, a pontualidade, a criatividade, a organização, o empenho, o interesse e o espírito de equipe, dentre outros.

Proposição 2: investigação de um círculo

Considere-se um exemplo hipotético, em que o professor pretende despertar a curiosidade dos estudantes em relação ao círculo, além de prover-lhes a possibilidade de visualizar e interagir com a figura geométrica. Em um primeiro contato visual é impossível imaginar a quantidade de ‘segredos’ existentes em torno de um simples círculo. Apesar da fácil contextualização, pois trata-se de um formato de largo emprego, como exemplo na bicicleta, objeto que certamente todos os alunos já interagiram ou conhecem. Sabe-se que uma roda de bicicleta contém raios, outro exemplo é a divisão de uma pizza circular.

O estudo da circunferência é um desafio para os estudantes, por não apresentar vértices e nem arestas. Assim, o cálculo de suas medidas é algo desconhecido. Quando os estudantes se deparam com o exemplo da roda de bicicleta, a qual apresenta vários raios (ou com a divisão de pizza), não é simples, para eles, entender que indiferente da posição que esses raios se apresentam, eles possuem, exatamente a mesma medida.

Além disso, a relação fixa entre o perímetro e o raio nem sempre é de fácil assimilação.

A função do aplicativo é permitir ao estudante efetuar a investigação, manipular o objeto e compreender a relação estabelecida pela fórmula. Ao fim dessa etapa ele terá autonomia para aplicá-la de forma coerente a situações distintas. As construções do Cenário Investigativo devem ser desenvolvidas diretamente pelos alunos em tempo de execução. Caso o professor apresente um exemplo, e, na sequência sugerir aos estudantes a prática de atividades semelhantes àquela que ele acabou de apresentar, esta trata-se de uma variação do paradigma do exercício, a qual é auxiliada por aparatos tecnológicos.

Neste cenário hipotético o professor lança o desafio diretamente aos estudantes. Inicialmente, convida os alunos, em posse de seus dispositivos, para abrir o aplicativo *GeoGebra Geometria*. Em seguida, solicita aos mesmos para esboçar um círculo, essa solicitação determina o início da investigação, pois não houve especificação da ferramenta. Os alunos estão livres para usufruir de várias ferramentas diferentes, de acordo com a disposição dessas, a maior parte, irá optar pela ferramenta 'Círculo dados Centro e Um de seus Pontos', os demais, se utilizarão das outras ferramentas. Todas as ferramentas de desenho do círculo apresentam o mesmo comportamento exceto 'Círculo definido por Três Pontos', a qual não mostra o centro conforme pode-se observar na Figura 6.

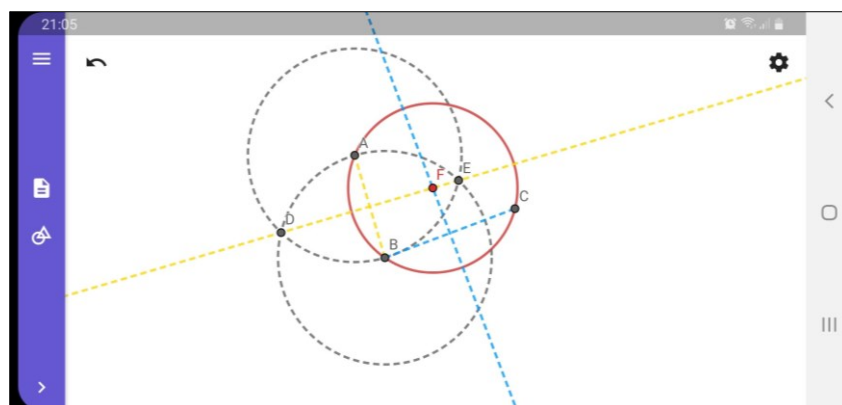
Figura 6. Círculos esboçados no Aplicativo GeoGebra Geometria.



Fonte: Autoria própria (2019).

Com os círculos esboçados na tela de seus dispositivos convida-se para traçar um segmento de reta do centro até a linha externa da circunferência. Neste momento os alunos que optaram por desenhar o círculo a partir de 3 pontos terão um desafio extra, em uma aula no formato tradicional isso seria muito indesejado, pois o professor se depararia com questionamentos aleatórios e métodos distintos para encontrar o ponto central. Como existem várias maneiras de encontrar o ponto desejado cabe buscar entre os alunos experiências já vividas e verificar quais métodos eles dominam. A Figura 7 esboça os procedimentos realizados na busca pelo centro da circunferência.

Figura 7. Círculos esboçados no Aplicativo *GeoGebra Geometria*.



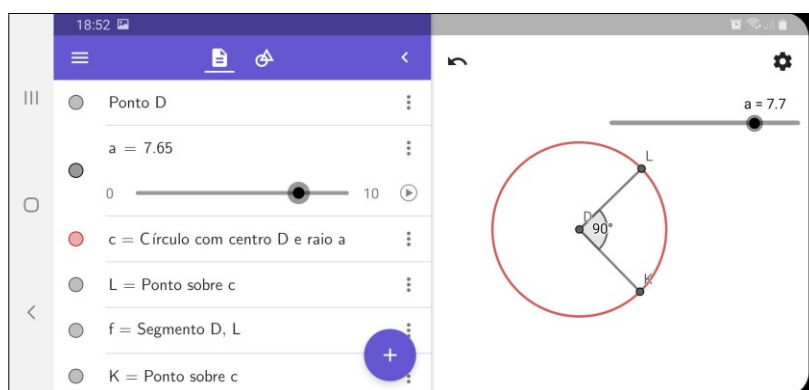
Fonte: A autoria própria (2019).

Uma forma baseada em dois segmentos de reta, traçados em posição aleatória no círculo (segmentos pontilhados, o primeiro em amarelo e o segundo em azul), determina-se uma das mediatrizes (pontilhada na cor amarela) com a ferramenta Círculo Centro e um Ponto (círculos pontilhados em cor cinza) e outra com a ferramenta Mediatriz (pontilhado na cor azul) disponível no aplicativo, e por fim a Ferramenta Intersecção para determinar o ponto F, centro da figura. Concluída esta etapa, pode-se direcionar para uma investigação mais ampla, a qual irá conectar-se com o estudo de ângulos, basta os alunos traçarem um segundo segmento de reta idêntico ao anterior e aplicar uma medida de ângulo para inúmeras simulações.

Outro recurso a ser explorado é o controle deslizante, apresenta-se a ferramenta que fará o controle do comprimento do raio da circunferência. Para efetuar esta conexão é necessário utilizar-se da zona gráfica. A conexão entre o controle deslizante e o raio do círculo, na construção deste, indiferente de como ele foi concebido, exige a edição na seguinte notação: Círculo(<Ponto Central>, <Variável do controle deslizante>), ao finalizar a edição, o controle deslizante se encarrega de determinar o raio da figura.

Com os ajustes realizados esboçou-se uma figura dinâmica que permite realizar simulações e analisar seu comportamento. A cada interação o aplicativo oferece recursos para auxiliar no estudo, além disso, dispõe de ferramentas específicas, as quais retornam o perímetro do círculo, com a variação do perímetro proporcional ao raio determinado pelo controle deslizante, conforme pode ser visualizado na Figura 8.

Figura 8. Círculo dinâmico no Aplicativo *GeoGebra Geometria*.



Fonte: Autoria própria (2019).

O resultado dessa atividade, representada na Figura 8, é um círculo dinâmico que possibilita aos envolvidos no estudo, inúmeras investigações. Estas seriam extremamente trabalhosas caso fossem realizadas por qualquer meio diferente do computacional. Os destaques desse estudo para uma sala de aula são: a relação entre raio e perímetro; a formação do círculo por inúmeros pontos; a mesma quantidade de linhas imaginárias do centro desses pontos que determinam o raio e diâmetro, e; ângulos formados entre essas linhas.

Proposição 3: exemplo com 3D

Dentre os aplicativos disponibilizados pela organização *GeoGebra*, o *GeoGebra 3D Grapher* apresenta a maior gama de recursos a serem explorados. Voltado para o estudo de sólidos tem recebido constantes atualizações recentemente recebeu o recurso *augmented reality* (AR) que proporciona uma experiência única e um grau de interação aluno/objeto de estudo ainda maior. Para demonstrar o potencial desse *software* para concepção de um cenário investigativo pretende-se apresentar algumas ferramentas. Este demonstrativo tem por intuito orientar o primeiro contato do docente com o aplicativo, além de sugerir um cenário inicial, pois o estudo da geometria espacial oferece possibilidades ilimitadas de investigação.

O aplicativo se comporta de forma semelhante, pois oferece muitas funcionalidades, além de apresentar importantes evoluções a cada versão. A proposta de trabalho consiste no estudo de um cubo, a ser realizado com alunos da educação básica. Para tal, supõe-se que os estudantes tenham os conhecimentos elementares acerca da figura geométrica, fator que permite explorar aspectos, tais como: a quantidade de faces, o número de arestas, a quantidade de vértices, a planificação, bem como medidas de área das faces e volume.

O Cenário para Investigação inicia-se com a definição do objeto de estudo, neste caso, o cubo. Os estudantes, em posse de seus dispositivos e situados em relação ao cubo, dispõem dos requisitos para iniciar a investigação. Diante disso, solicita-se aos mesmos que abram o aplicativo e esboquem um cubo. Ao pensar em um ambiente investigativo é impossível não efetuar um comparativo com o paradigma do exercício, o qual centraliza o estudo e direciona o aluno a um pensamento algorítmico específico a respeito do tema concebido de acordo com a percepção do professor. Enquanto em um cenário para investigação o entendimento, bem como a assimilação, do assunto estudado, é proveniente de inúmeras fontes, pois cada envolvido possui diversas experiências.

Nesse cenário, em específico quando os alunos são convidados a esboçar o cubo, o aplicativo irá apresentar a ajuda referente à utilização da ferramenta. Assim o desenvolvimento da atividade ocorre de acordo com os conceitos e preferências dos estudantes. Alguns podem optar por usar a tela em retrato outros em paisagem, alguns mantêm o cubo esbo-

çado *default*, conforme estabelecido pelo aplicativo, outros, porém preferem personalizá-lo por intermédio da alteração de cores e formato do traçado das arestas.

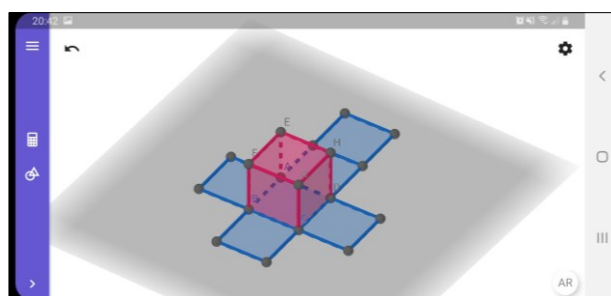
Esta proposta representa um desafio tanto para os docentes quanto para os discentes. Promove a saída da zona de conforto, situação que priva o professor de seguir por caminhos bem conhecidos, de utilizar-se de materiais previamente elaborados e que durante o desenvolvimento do tema em sala de aula, salvo raras exceções, iria induzir os alunos a perguntas previstas. Por outro lado, neste novo cenário, todos são envolvidos na investigação e tem responsabilidades com o resultado final que se almeja, que neste caso trata-se do cubo.

Em tais cenários para construção do conhecimento, o termo investigação é usado pelos autores de maneira muito coerente, pois além de ser um termo bem conhecido, no meio científico, é definida como a análise excessivamente rigorosa de algum assunto. Quando voltada para área criminal refere-se ao estudo de um acontecimento com origens desconhecidas e cabe a uma equipe investigativa encontrar as respostas. Em sala de aula não é diferente, pois todos estão envolvidos em encontrar respostas, em entender o que ocorre nos seguintes casos: ‘Se o cubo foi esboçado com sua base paralela ao plano formado pelas abscissas e as ordenadas’ ou ‘Se por ventura este cubo foi concebido de maneira que apenas uma aresta tenha contato com este plano’.

O aplicativo contribui nesse cenário, pois os movimentos e transformações estão acessíveis a todos e para editar basta deslizar o dedo sobre a tela do dispositivo. Quanto aos questionamentos estes irão surgir naturalmente, devido à diversidade de pensamentos e representações agrupadas em uma única sala. Com o cubo esboçado é possível girá-lo, em todas as direções, observá-lo por diversos ângulos, fatores que auxiliam na compreensão de sua construção. Podem ser identificadas suas faces, arestas e vértices. Com a utilização das ferramentas de medições: ângulo, distância, comprimento ou perímetro, área e volume, é possível estabelecer relações de proporcionalidade, que facilitam a compreensão, pois cada aluno irá encontrar medidas diferentes das encontradas pelo colega e levando em consideração o ‘espaço infinito’ da área gráfica, um mesmo aluno pode esboçar diversos cubos para investigá-los.

Para compreender a planificação do sólido estudado, o aplicativo *GeoGebra 3D Grapher* possui uma ferramenta específica, basta selecionar o cubo e tocar sobre a ferramenta planificação para visualizar o sólido planificado, conforme pode ser observado na Figura 9.

Figura 9. Planificação do Cubo.

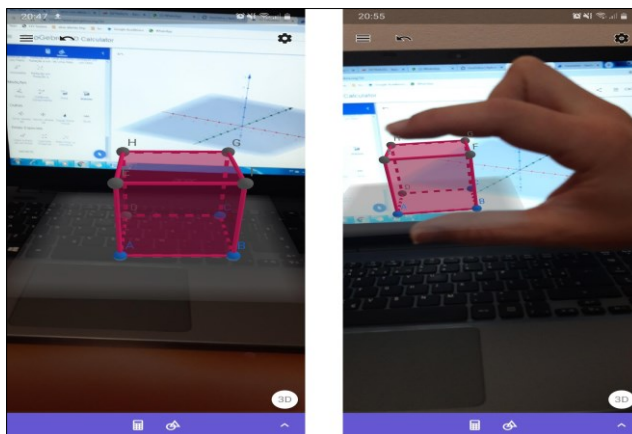


Fonte: A autoria própria (2019).

A planificação pode ser uma ferramenta bastante útil na identificação da quantidade de arestas e faces, principalmente quando a figura geométrica espacial é de alta complexidade. O formato que a planificação é apresentada possibilita aos estudantes a observação e análise crítica da origem de cada face, bem como de cada aresta. Dessa forma, eles podem, inclusive, deduzir e reforçar os conceitos elementares atrelados aos elementos formadores das figuras.

Visualizar o cubo de diversos ângulos, medir suas arestas, a área de suas faces e o volume do todo, permitem ao aluno uma ampla investigação a respeito da figura. O recurso recentemente disponibilizado *augmented reality* (AR) potencializa estas possibilidades investigativas, pois o cubo esboçado pelo aluno deixa de ser um objeto na tela do aplicativo, para ocupar um ‘lugar’ no mundo real. Quando observado pela tela do celular o aluno pode projetá-lo sobre uma mesa, diante de seus pés ou até mesmo entrar no sólido estudado, conforme pode ser observado na Figura 10.

Figura 10. Visualização do cubo utilizando AR.



Fonte: Autoria própria (2019).

Com os recursos oferecidos pelo aplicativo, a investigação de outros temas relacionados ao sólido, bem como o entendimento das fórmulas para o cálculo de atributos do sólido, torna-se muito próximos. Afinal, dificilmente, quando o aluno consegue posicionar o cubo que está estudando no canto da sala de aula certamente o canto da sala de aula deixa de ser um canto ou o cubo deixa de ser um aglomerado de vértices, faces e arestas conforme pode ser observado na Figura 11.

Figura 11. Visualização do canto de um ambiente utilizando AR.



Fonte: Autoria própria (2019).

Considerações finais

A abordagem apresentada pautou-se nos pressupostos da Educação Matemática Crítica estabelecendo conexões com os principais recursos oferecidos pelos aplicativos do *GeoGebra* para dispositivos móveis, por meio da análise de algumas ferramentas do *software* em Ambientes de Aprendizagem caracterizados como Cenários para Investigação.

Pensamos em proposições em um cenário que oportuniza ao estudante construir seus saberes, através de uma postura crítica investigativa, em ambientes de experiências vividas, resultantes da integração entre professor e estudantes, do protagonismo do estudante. Buscamos explorar as qualidades dinâmicas do *software GeoGebra* a fim de oportunizar ao estudante desenvolver um conjunto de habilidades que compreendem tanto o conhecimento em geometria quanto a capacidade de analisar de forma crítica outras questões cotidianas, uma Matéria.

Isto posto, queremos ainda considerar sobre o papel do professor.

Na perspectiva apresentada, o professor desloca-se da posição de transmissão de saberes, em um ambiente baseado no paradigma do exercício, para um novo cenário. Ao invés de oferecer um protocolo pré-estabelecido e de execução de tarefas educacionais, busca por alternativas criativas que permitam ao estudante questionar: o que acontece se...?

Referenciamos um processo cooperativo entre professor e estudantes, entrelaçando a sala de aula com ferramentas tecnológicas disponíveis. A opção de utilizar-se de um aparato tecnológico em que os nativos digitais possuem amplo domínio, sempre trás implícitos riscos relacionados ao objetivo para o qual foram desenvolvidos, para além da produtividade, é fortemente direcionado ao entretenimento.

Contudo, é prudente para a educação não manter-se alheia a utilização de meios tecnológicos, os quais apresentam grande aceitação entre os estudantes, pois implícito a este comportamento está o potencial que o uso de *hardwares* e *softwares* presentes no cotidiano dos alunos representa para construção de um ambiente investigativo, alunos mais autossuficientes e capazes de lidar com a matemática e os avanços tecnológicos atuais.

Através da ótica investigativa para o uso de um aplicativo em sala de aula é possível entender que o “simples” uso de tecnologia com aplicativos permite a mobilização dos estudantes para a investigação, mas

não garante esta. É um fator que comprova a importância do professor em organizar o tema, o ambiente de aprendizagem de maneira a promover investigação e a construção do conhecimento.

Recebido em: 20/07/2020

Aprovado em: 16/12/2020

Referências

- BAGGIOTTO, C. C. **Dispositivos móveis**: uma ferramenta para o ensino de geometria na perspectiva da educação matemática crítica. 2019. 67 f. Monografia. (Curso de Matemática. Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Frederico Westphalen.
- CEOLIM, A. J.; HERMANN, W. Ole Skovsmose e sua educação matemática crítica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, v. 1, n. 1, p. 8-21, 2012.
- DANTAS, T. P. **Educação matemática**. Rio de Janeiro: Abrindo Página, 2017.
- D'AMBRÓSIO, U. A relevância do projeto indicador nacional de alfabetismo funcional – INAF como critério de avaliação da qualidade do ensino de Matemática. In. FONSECA, Maria C. F. (Org.) **Letramento no Brasil**: habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2004.
- FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 4ª ed Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.
- HALMENSCHLAGER, V. L. da S. **Etnomatemática**: uma experiência educacional. São Paulo: Selo Negro, 2001.
- LIPPMANN, L. **Ensino da matemática**. Curitiba: Iesde Brasil SA, 2009.
- ONUCHIC, L. D. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, São Paulo, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.
- SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática crítica**: a questão da democracia. São Paulo: Papirus editora, 2001.
- SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Campinas: Papirus editora, 2008.
- SOARES, M. **Letramento**: um tema em três gêneros. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.