emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2021v8i1p139-160

Um estudo sobre múltiplos e divisores por meio de problemas com alunos do 6.º ano do Ensino Fundamental

A study on multiples and divisors through problems with 6th grade students

Larissa Nori Vieira[1]

Andresa Maria Justulin[2]

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar o desempenho de 23 alunos, de uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública do interior do Paraná, diante da resolução de problemas envolvendo o conteúdo de múltiplos e divisores. Para isso. foi investigado se os participantes compreendem os conceitos de números primos, de máximo divisor comum e de mínimo múltiplo comum, sabendo aplicá-los na resolução de problemas. A pesquisa teve uma abordagem qualitativa, sendo os dados produzidos através da aplicação de uma atividade diagnóstica. Por meio da análise dos dados foi possível perceber a dificuldade que os alunos possuem quanto à resolução de problemas, tanto na interpretação, quanto na execução de operações básicas.

Palavras-chave: *Resolução de Problemas; Múltiplos; Divisores; Ensino de Matemática.*

ABSTRACT

This work aims to analyze the performance of 23 students, from a class of 6 ° year of elementary school, from a public school of Paraná, in the face of problem solving involving the content of multiples and divisors. For this, it was investigated if the participants understand the concepts of prime numbers, of greatest common divisor and of least common multiple, knowing how to apply them in the problem solving. The research had a qualitative approach, being the data produced through the application of a diagnostic activity. Through the analysis of data it was possible to perceive the difficulty that students have regarding the resolution of problems, both in the interpretation and in the execution of basic operations.

Keywords: *Problem Solving; Multiple; Divisors; Mathematics Teaching.*

[1]. Aluna do Curso de Licenciatura em Matemática de Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Cornélio Procópio, e-mail: larissanori@hotmail.com.

[2]. Docente do Departamento Acadêmico da Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Cornélio Procópio e do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT), câmpus Cornélio Procópio/Londrina, e-mail: ajustulin@utfpr.edu.br.

Introdução

O desempenho dos estudantes em Matemática tem se revelado por meio de índices incipientes em diversas avaliações, como é o caso do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), da Prova Brasil e das avaliações externas estaduais. Os alunos não dominam grande parte dos conteúdos matemáticos, o que faz com que a Matemática tenha a pior nota dentre os componentes curriculares avaliados.

Segundo Onuchic e Allevato (2005, p. 215) as "discussões no campo da Educação Matemática no Brasil e no mundo mostram a necessidade de se adequar o trabalho às novas tendências que podem levar a melhores formas de se ensinar e aprender matemática". Neste contexto tem-se a Resolução de Problemas[3] como uma forma de melhorar o ensino, na qual o aluno se tornará construtor do próprio conhecimento, tornando-se ativo no processo de ensino-aprendizagem. Apesar deste destaque à Resolução de Problemas enquanto metodologia de ensino, a presente pesquisa teve como foco as produções escritas realizadas pelos alunos no momento em que resolvem problemas.

A temática Números que abarca o estudo dos múltiplos e divisores "(...) favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro" (BRASIL, 2018, p. 267). Desse modo, é uma temática bastante relevante e relacionada ao dia a dia do aluno.

Em um projeto de iniciação científica, no qual esta pesquisa foi desenvolvida, buscou-se uma análise diagnóstica de uma turma de 6.º ano do Ensino Fundamental, de uma escola estadual do norte do Paraná, em que a pesquisadora não era professora da turma. Assim, os objetivos da presente pesquisa são: (1) Analisar o desempenho dos alunos diante da resolução de problemas envolvendo o conteúdo de múltiplos e divisores; (2) Identificar se o aluno entende o conceito de números primos e sabe aplicá-lo na decomposição de números naturais e (3) Identificar se o aluno compreende os conceitos de máximo divisor comum e de mínimo múltiplo comum, sabendo diferenciá-los e aplicá-los na resolução de problemas.

A Resolução de Problemas e a temática Números nos documentos oficiais brasileiros

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, 1998) relatam que os problemas papel. Sendo assim, os alunos aprendem por reprodução/imitação. "Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações" (BRASIL, 1998, p. 40).

Ainda segundo esse documento,

---

[3] Será utilizado RP, em letras maiúsculas, para indicar a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e rp, em letras minúsculas, ao se referir ao processo de resolução de problemas pelo aluno.

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 1998, p. 40).

Outro documento que também retrata duas concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática são as Orientações Curriculares Nacionais – OCNs (BRASIL, 2006). O documento apresenta como sendo uma dessas concepções, a mais comum em nossas salas de aulas, que dá origem ao padrão de ensino "definição→exemplos→exercícios", em que se utilizam os conhecidos "exercícios de fixação". E a outra, a concepção em que o aluno passa a ser, em grande parte, o responsável pela sua própria aprendizagem, tornando-se o construtor de seu próprio conhecimento matemático. Neste caso, a aprendizagem não é realizada por repetição/reprodução, mas ocorre quando o aluno confronta suas concepções e constrói os conceitos desejados pelo professor. Desta forma,

> [...] a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento (BRASIL, 2006, p. 81).

Pode-se citar como uma das razões desse processo do trecho supracitado a própria história da formação do conhecimento matemático. É interessante ressaltar aqui, conforme apresentam as OCNs, a importância, para o exercício da cidadania, da capacidade de analisar um problema e tomar decisões necessárias para sua resolução.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) considera que o processo de resolução de problemas, assim como alguns outros, está relacionado ao desenvolvimento de habilidades. Sendo uma dessas, reconhecer que os conhecimentos matemáticos são essenciais para a compreensão e a atuação no mundo. A resolução de problemas seria, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem. Além disso,

> Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018, p. 264).

Tem-se, então, que esse processo favorece a construção do raciocínio lógico e crítico e estimula a investigação, mas que não deve deixar de ser prazeroso para os alunos.

Sobre *Números*, a BNCC revela que essa primeira das cinco temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística):

> [...] tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados

> em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações (BRASIL, 2018, p. 266).

A BNCC (2018) propõe a resolução de problemas envolvendo números naturais, inteiros, racionais e reais, em diferentes contextos: do cotidiano, da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento e aponta que, para os alunos aprofundarem a noção de números, nos anos iniciais do ensino fundamental é importante colocá-los diante de tarefas nas quais os Números Naturais não sejam suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos Números Racionais. Já nos anos finais é importante colocá-los diante de problemas que os faça reconhecer a necessidade dos Números Irracionais.

O documento ainda destaca que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa apenas com objetos de estudos descritos nessa unidade em questão, mas é ampliado e aprofundado em situações que envolvem conteúdo das demais unidades temáticas.

Resolver problemas: definição e estratégias

Para Onuchic (1999) problema é "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver". A autora ainda esclarece que "o problema não é um exercício no qual o aluno aplica de forma quase mecânica uma fórmula ou uma determinada técnica operatória" (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Para Dante (1991),

> A resolução de problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo (DANTE, 1991, p. 59).

A resolução de problemas deve estar integrada às aulas regulares, "Não se aprende a resolver problemas de repente. É um processo vagaroso e contínuo que exige planejamento" (DANTE, 1991, p. 59). Porém, é frequente professores aplicarem listas de problemas que na realidade são meramente listas de exercícios.

As estratégias utilizadas para resolver problemas podem ser descritas como "métodos identificáveis de abordar uma tarefa que é completamente independente do tópico específico ou assunto temático" (VAN DE WALLE, 2009, p. 77). Segundo o autor, os objetivos de se trabalhar e explorar as estratégias na resolução de problemas são: (1) Desenvolver habilidades de análises de problema – em analisar/compreender um problema desconhecido, encontrar informações necessárias, descartar as dispensáveis e mostrar com clareza o objetivo ou meta do problema ou tarefa; (2)

Desenvolver e selecionar estratégias – com o propósito de auxiliar os estudantes a desenvolver sua própria estratégia de resolução de problemas, servindo como ferramenta para uma variedade de contextos de resolução de problemas; (3) Justificar as soluções – para auxiliar os alunos em avaliar a validade de suas respostas; (4) Estender ou generalizar problemas - incitar nos alunos o desejo de ir além da solução para os problemas, testar os resultados encontrados em outras situações ou utilizá-los para formar regras ou procedimentos gerais.

Dante (1991) identifica as principais estratégias utilizadas durante a resolução de um problema: Tentativa e erro organizados; procurar padrões ou generalizações; resolver primeiro um problema mais simples e fazer o caminho inverso (resolver o problema de trás para frente).

Essa classificação, entretanto, não é única, Santos (1997) destaca as estratégias gerais: Procurar um padrão ou regularidade; generalizar; usar dedução (ou indução); trabalhar de trás pra frente; adivinhar (dar palpites) e testar; resolver um problema semelhante mais simples; escrever uma equação (fórmula) e as estratégias de apoio: Reler o problema; procurar palavras e frases-chave; escrever informações relevantes; fazer uma lista, tabela ou quadro organizado; experimentar dados ou dramatizar a situação; usar números simples.

Para Van de Walle (2009, p. 77) algumas estratégias prováveis de serem utilizadas na resolução de problemas matemáticos são: desenhar uma figura, simular algo, usar um modelo; procurar um padrão; construir uma tabela ou um quadro; encontrar uma forma mais simples do problema; experimentar e verificar; e organizar uma lista.

Múltiplos e divisores

Os múltiplos e divisores de um número estão relacionados entre si da seguinte maneira: Se b é divisível por a, então a é divisor de b, e assim, b é múltiplo de a.

Seguindo o exposto por Fiorelli (2017) o conceito de múltiplos de um número pode ser definido da seguinte forma: Dado um número natural a, os múltiplos de a são determinados por meio da multiplicação dos elementos do conjunto $\mathbb{N}$ por a. Além disso o conjunto dos múltiplos de um número natural é sempre um subconjunto de $\mathbb{N}$ e também é infinito. Logo:

$$
\begin{gathered}
0 \,.\, a = 0, \\
1 \,.\, a = 1a, \\
2 \,.\, a = a + a = 2a, \\
3 \,.\, a = a + a + a = 3a, \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Outra forma de representar os múltiplos de a é: M(a) = {0, 1a, 2a, 3a, ...}.

Do conceito de múltiplos de um número, obtém-se o conceito de múltiplo comum entre dois números naturais *a* e *b*, que por definição é um número natural *m* que é múltiplo tanto de *a* quanto de *b*. Por exemplo, $a \,.\, b$ é um múltiplo comum de *a* e *b*. Sejam então *a*, *b* números naturais, se diz que o número natural *m* é o menor múltiplo comum de *a* e *b*, e escreve-se m = mmc (*a, b*) se:

(i) $m \neq 0$ e *m* é um múltiplo comum de *a* e *b*;

(ii) *m* é o menor dos múltiplos comuns não nulos, no sentido que se *m'*, um número natural não nulo, é um múltiplo de *a* e de *b*, então $m' \geq m$.

Diz-se que um número natural *d* é divisor de outro natural *a*, se *a* for múltiplo de *d*, ou seja:

$a = d \,.\, b$, sendo *b* um número também natural.

Quando um número natural *a* é múltiplo de outro natural *d*, diz-se que *a* é divisível por *d*, ou ainda que *d* divide *a*. O conjunto de todos os divisores de um número natural *a* é um conjunto finito e é definido por:

$$D(a) = \{d \in \mathbb{N} : d / a\}.$$

Dados dois números naturais *a* e *b*, dizemos que *d*, um número natural, é o máximo divisor comum entre *a* e *b*, e escrevemos d = mdc(*a*, *b*), se:

(i) *d* é um divisor comum de *a* e *b*, isto é, *d* é divisor tanto de *a* quanto de *b*;

(ii) *d* é o maior dos divisores comuns, no sentido de que se *d'* é um divisor de *a* e *b* então $d' \leq d$.

O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de dois números inteiros podem ser calculados através da decomposição de cada um deles em fatores primos. Conforme Domingues e Iezzi (2003):

Seja $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ (m$\geq$ 1) fatores primos distintos e que aparecem respectivamente $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ vezes ($\alpha_i \geq 1, i = 1,2, \dots, m$), a decomposição poderá ser escrita da seguinte forma: a $= p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \cdots\, p_m^{\alpha_m}$.

Considerando então *a* e *b* naturais dados da seguinte maneira:

$$a = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \cdots\, p_r^{\alpha_r} \quad \text{e} \quad b = p_1^{\beta_1}\, p_2^{\beta_2} \cdots\, p_r^{\beta_r} \quad (\alpha_i, \beta_i \geq 0)$$

tem-se que o elemento

$$p = p_1^{\gamma_1}\, p_2^{\gamma_2} \cdots\, p_r^{\gamma_r}$$

em que $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, é o máximo divisor comum de *a* e *b*.

Obs.: se um fator primo aparece na primeira decomposição com expoente não nulo e não aparece explicitamente na segunda, ele é inserido nesta com expoente igual a 0.

Participantes, instrumentos e procedimentos de pesquisa

A metodologia de pesquisa adotada foi a qualitativa, visto que foram considerados os dados coletados com a finalidade de diagnosticar, bem como analisar o desempenho e o conhecimento dos participantes sobre Múltiplos e divisores. Segundo Lüdke e André (1986, p. 11), uma pesquisa qualitativa tem “o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento”, sempre atento ao “maior número possível de elementos presentes na situação estudada, pois um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para a melhor compreensão do problema que está sendo estudado”.

Do ponto de vista de seus objetivos, a pesquisa pretendeu familiarizar-se com um fenômeno ou situação, obter uma nova percepção dele e descobrir novas ideias e de acordo com Cervo, Bervian e Da Silva (2006), essas são as características de uma pesquisa exploratória. Assim, a pesquisa aqui apresentada também pode ser classificada como exploratória.

Foram participantes da pesquisa 23 alunos de uma turma de 6° ano do Ensino Fundamental, com a qual já haviam sido trabalhados os conceitos de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum pela professora da turma. A metodologia de ensino utilizada e os resultados obtidos não foram investigados por não se tratar de um dos objetivos da pesquisa aqui apresentada.

O instrumento de pesquisa compôs-se por uma atividade diagnóstica envolvendo sete problemas matemáticos sobre o conteúdo. O quadro 1 apresenta os objetivos de cada um dos problemas propostos.

Quadro 1 - Objetivos dos problemas propostos

Problema	Objetivo
Problema 1	Identificar/ conhecer um número primo.
Problema 2 e Problema 3	Determinar o resultado de um problema utilizando o processo de decomposição de um número natural em fatores primos.
Problema 4	Determinar o resultado de um problema utilizando mínimo múltiplo comum de três números naturais.
Problema 5	Determinar o resultado de um problema utilizando mínimo múltiplo comum de dois números naturais.
Problema 6	Determinar o resultado de um problema utilizando máximo divisor comum de dois números naturais.
Problema 7	Determinar o resultado de um problema utilizando máximo divisor comum de quatro números naturais.

Fonte: O autor

Antecipadamente decidiu-se qual seria a turma e a instituição a serem trabalhadas. Feito isso, foi necessário comparecer à escola escolhida e expor, para a diretora e à professora de Matemática da turma escolhida, o desejo da realização da pesquisa. Após obter o consentimento de ambas e encontrar uma melhor data para a realização da atividade, foi entregue aos alunos participantes um termo de consentimento, que deveria ser assinado pelos pais e entregue no dia da aplicação da prova. Na data combinada após o recolhimento dos termos foi aplicada a prova para turma, sendo os alunos orientados que deveriam fazê-la individualmente, não podendo ser utilizados qualquer método de consulta; os alunos deveriam responder às questões e, ao final de cada uma, descrever como haviam pensado para resolvê-la. A prova teve duração de duas aulas, de cinquenta minutos cada, totalizando uma hora e quarenta minutos.

Análise de dados

As respostas dadas pelos alunos que aqui serão expostas preservam a escrita original dos mesmos, ainda que apresentem erros gramaticais e ortográficos. Além disso, os sujeitos foram identificados por A1, A2..., A23 respeitando-se os gêneros para a análise.

Problema 1: Você se lembra do que é número primo? Dê um exemplo.

Fonte: o autor

Ao escolher este problema esperava-se averiguar se os alunos saberiam definir um número primo, um número divisível somente por 1 (um) e por ele mesmo, e dar um exemplo. Ao analisar as respostas dos participantes, notou-se que a maioria não soube responder corretamente, como mostra a tabela 1.

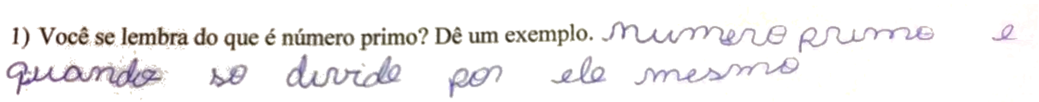
Tabela 1 - Respostas apresentadas no problema 1

Respostas	Número de alunos
Soube definir o que é um número primo, mas não apresentou um exemplo	5
Deixou em branco	4
Soube definir o que é um numero primo e apresentou um exemplo correto	3
Não soube definir e não apresentou exemplos	9
Apresentou exemplos incorretos de números primos	2

Fonte: Dados da pesquisa

As respostas dadas pelos alunos A5 e A15 foram selecionadas para serem analisadas já que apresentam erros comuns cometidos pelos alunos, de modo geral. Alguns alunos apresentaram dificuldades quanto à divisão, por exemplo, ao efetuar a divisão por zero. No caso da aluna A15, a mesma respondeu que número primo é aquele que só divide por ele mesmo, o que está incorreto. Todos os números, exceto o zero, são divisíveis por ele próprio.

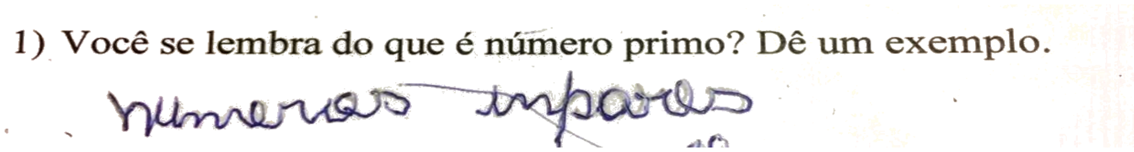
Figura 1 - Resposta apresentada pela aluna A15


1) Você se lembra do que é número primo? Dê um exemplo. Numero primo e quando so divide por ele mesmo

Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno A5 respondeu que números primos são os números ímpares, o que é um erro comum, já que os números primos, em sua maioria, são ímpares. Este deve ser um ponto que requer certa atenção por parte dos professores ao trabalharem tal conteúdo.

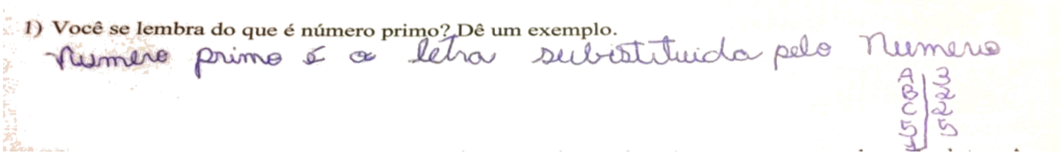
Figura 2 - Resposta apresentada pelo aluno A5



Fonte: Dados da pesquisa

No caso da A19, a aluna apresentou a seguinte resposta:

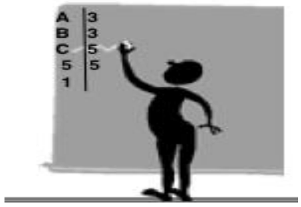
Figura 3 - Resposta apresentada pela aluna A19



Fonte: Dados da pesquisa.

A aluna A19 pode ter baseado sua resposta a partir do enunciado do problema 2, que será analisado na sequência, mas que apresentava a figura de um indivíduo fazendo uma fatoração.

Problema 2: Observe a seguinte decomposição em fatores primos do número representado pela letra A, proposta pelo professor de matemática. Quais números correspondem ao valor atribuído às letras A, B e C para que a fatoração esteja correta? (Registre como você pensou)



Fonte: Adaptado de Atividade Provão – Colégio Equipe (p. 2).

Considerando a definição de problema adotada neste trabalho, pretendia-se verificar como os alunos encontrariam a resposta do problema, e se saberiam realizar o processo de decomposição de um número natural em fatores primos. Os números atribuídos às letras A, B e C seriam, respectivamente, 225, 75 e 25. De modo geral, as respostas estão exibidas na tabela 2.

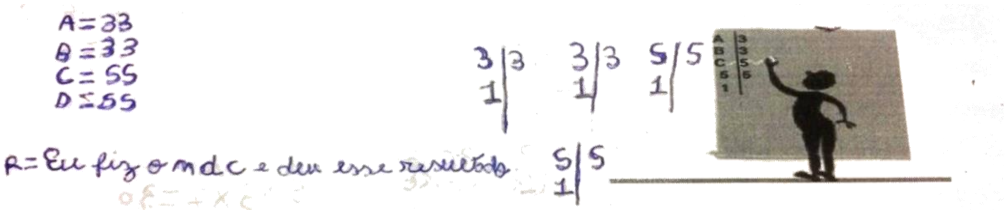
Tabela 2 - Respostas apresentadas no problema 2

Respostas	Números de alunos
Realizou corretamente a fatoração indicando os valores de cada letra	3
Realizou corretamente a fatoração, mas não indicou o valor de cada letra	6
Não estabeleceu corretamente a relação entre as letras e os fatores primos	9
Deixou em branco	5

Fonte: Dados da pesquisa

Notou-se certa dificuldade por partes de alguns alunos em relacionarem a fatoração com as operações de divisão e multiplicação. Além disso, perceberam-se diversas tentativas por parte dos alunos para apresentar uma resposta ao problema. A aluna A16 chamou a atenção, ao dar a seguinte resposta:

Figura 4 - Resposta apresentada pela aluna A16

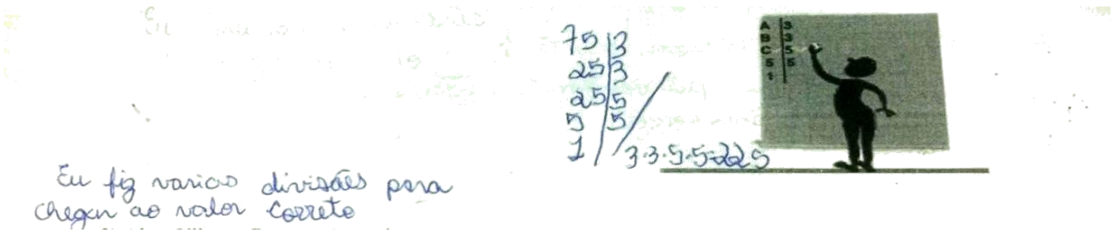


Fonte: Dados da pesquisa

Ao analisar as respostas dadas pela aluna A16, não apenas nesse problema, mas em todos os outros, percebe-se que a mesma possui grandes dificuldades quanto aos conceitos de MMC, MDC e fatoração. Na questão acima, a qual se refere à decomposição em fatores primos a aluna justificou sua resposta dizendo que havia realizado o MDC, já em outras questões em que deveriam ser utilizados o MMC e MDC a aluna apenas realizou a fatoração, não sabendo diferenciá-los. Apesar de haver o modelo da fatoração na ilustração do problema, alguns alunos não o seguiram ou não se lembraram das operações a serem realizadas, como foi o caso da aluna A16.

A estudante A19 não conseguiu executar a resolução corretamente. A mesma já havia encontrado o valor de A ao multiplicar os fatores primos representados na ilustração, porém, ao montar a decomposição com os valores de A, B e C acabou executando-a de forma errônea, não obtendo os valores corretos das letras.

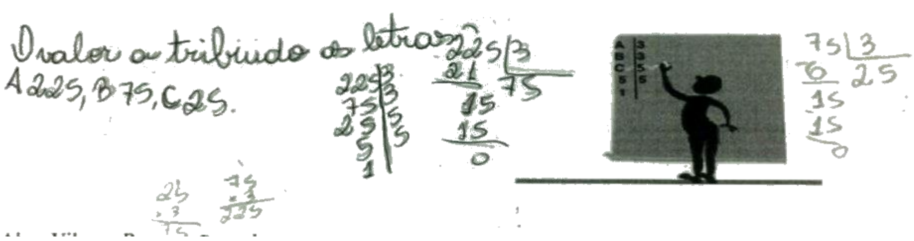
Figura 5 - Resposta apresentada pela aluna A19



Fonte: Dados da pesquisa

Outra forma de resolver este problema foi apresentada pela aluna A13, que realizou o caminho inverso do processo utilizado para decompor um número. Assim A13 trabalhou o problema de trás para frente (ou no sentido inverso). Essa estratégia é elencada por Dante (1991).

Figura 6 - Resposta apresentada pela aluna A13



Fonte: Dados da pesquisa

Problema 3: Alex, Vilma e Rosana são amigos e moram na mesma rua.

- Multiplicando o número das casas de Alex, Vilma e Rosana, obtemos 308.
- As casas de Alex e de Rosana são identificadas por números primos, e o número da casa de Alex é maior que o da casa de Rosana.
- O número da casa de Vilma é o menor de todos.

Quais são os números das casas de Alex, Vilma e Rosana? (Registre como você pensou)

Fonte: Leonardo (2010a, p.138)

Tem-se este problema, por objetivo identificar se os alunos sabem interpretar um problema envolvendo fatoração e se sabem realizar o processo de decomposição de um número natural em fatores primos.

Para resolver tal problema o aluno deveria decompor o número 308 em fatores primos, obtendo que os números das casas de Alex, Vilma e Rosana, considerando as informações expostas no enunciado do problema, seriam respectivamente 11, 4 (quatro) e 7 (sete). Porém nenhum aluno conseguiu encontrar a reposta correta.

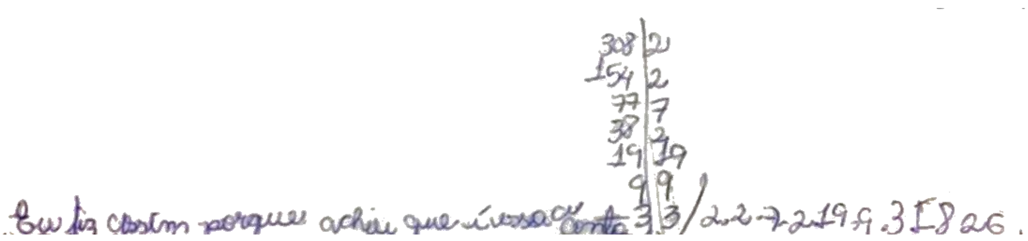
Tabela 3 - Respostas apresentadas no problema 3

Resposta	Número de alunos
Realizou incorretamente a decomposição do número 308 em fatores primos	1
Realizou a divisão: 308 ÷ 3, para chegar ao número de cada casa	2
Deixou em branco	11
Não utilizou a fatoração e nem as informações dadas no enunciado para indicar o número correto de cada casa	9

Fonte: Dados da pesquisa

A aluna A4 foi a única a realizar a fatoração para tentar resolver o problema. Apesar de seu raciocínio estar correto, ela não conseguiu efetuar corretamente a decomposição, o que ocasionou em uma resposta incorreta para o problema, como mostra a figura 7.

Figura 7 - Resposta apresentada pela aluna A4

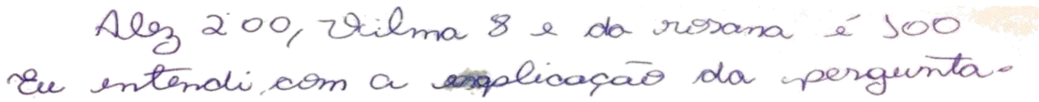


Fonte: Dados da pesquisa

Como se pode notar a aluna efetuou incorretamente a operação de divisão. Ao fazer 77 dividido por 7, obteve 38. A aluna A4, apesar de indicar a divisão por 7, provavelmente, fez uma divisão por 2 e desconsiderou o resto. Além disso, não identificou os números das casas, como pedia o problema.

Os demais alunos realizaram uma divisão ou não efetuaram nenhuma operação, tentando resolvê-lo através da lógica, porém o fizeram de maneira equivocada, não considerando as informações dadas no enunciado do problema, que eram relevantes para se chegar à solução. Têm-se como exemplos dessas situações as respostas dos alunos A19, A20 e A7.

Figura 8 - Resposta apresentada pela aluna A20



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 9 - Resposta apresentada pelo aluno A19

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 10 - Resposta apresentada pelo aluno A7

Fonte: Dados da pesquisa

As resoluções apresentadas pelos participantes sugerem que os alunos não compreendem o proposto no problema ou não dominam os conceitos envolvidos.

Problema 4: Gabriela tem entre 150 e 200 CDs. Se Ela fizer pilhas de 12, de 15 ou de 20 CDs, sempre sobrarão 3. Quantos CDs ela tem? (Registre como você pensou)

Fonte: Leonardo (2010a, p. 130)

Buscava-se através deste problema, identificar se os alunos sabem resolver corretamente um problema envolvendo o MMC de três números. Para isso os mesmos deveriam realizar o cálculo do MMC dos números 12,15 e 20, obtendo então o número 60, ou seja, o menor múltiplo que compartilham. Feito isso, deveriam encontrar o múltiplo deste número que está entre os números 150 e 200, o número 180. Por fim, como sempre se excedem 3 CDs seria só somar 3 ao número 180. Portanto esperava-se que chegassem ao resultado de 183 CDs.

A maioria dos alunos apresentaram tentativas para solucioná-lo, porém apenas um conseguiu chegar à resposta correta, apesar de não realizar o processo descrito acima para fazê-lo.

Tabela 4 - Respostas apresentadas no problema 4

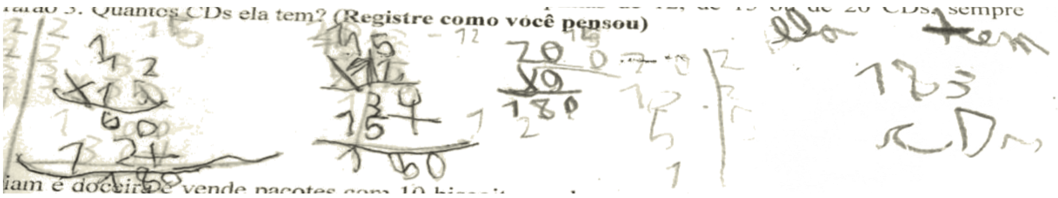
Resposta	Números de alunos

Realizou corretamente o cálculo do MMC dos números 12, 15 e 20, porém não executou o restante das operações para obter o resultado final	4
Efetuou a soma ou a subtração entre os números apresentados no enunciado	7
Deixou em branco	6
Conseguiu encontrar a resposta correta	1
Utilizou a multiplicação, divisão ou até mesmo a fatoração para tentar solucionar o problema	5

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno A1 mesmo não utilizando o MMC foi o único a encontrar a resposta correta para o problema. Conforme figura 11, este encontrou a quantidade máxima de pilhas que poderiam ser feitas contendo 12, 15 e 20 CDs, respeitando que o total de CDs está entre 150 e 200, sendo esta quantia de respectivamente 15, 12 e 9 pilhas. Multiplicando tais valores e somando o valor que sempre se excede, atingiu o número 183, resolvendo assim o problema proposto.

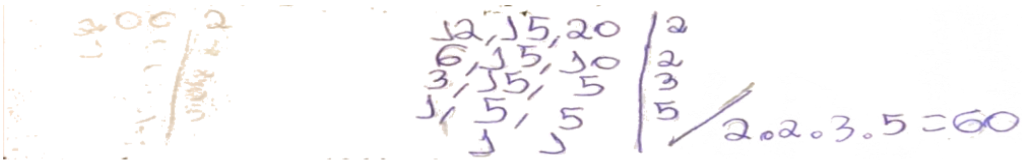
Figura 11 - Resposta apresentada pelo aluno A1



Fonte: Dados da pesquisa

A aluna A20 realizou corretamente o cálculo do MMC, mas a mesma deveria realizar, ainda, duas etapas para encontrar a solução correta, como já exposto. Porém, não o fez, deixando então sua resposta incompleta e incorreta. O mesmo caso se repetiu com outros alunos.

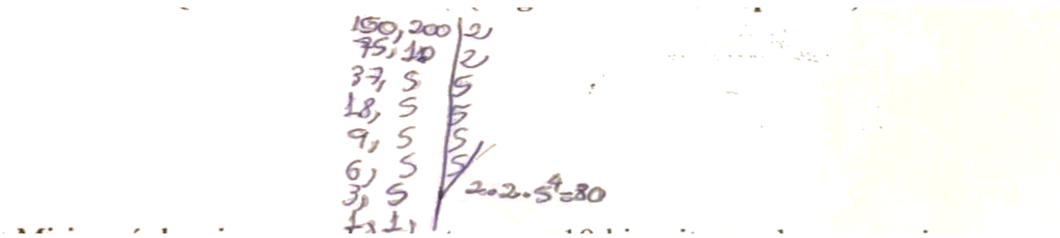
Figura 12 - Resposta apresentada pela aluna A20



Fonte: Dados da pesquisa

A aluna A4 também tentou realizar o cálculo do MMC para solucionar o problema, porém a mesma encontrou dificuldades ao efetuar operações de divisão, realizando-as de forma errônea.

Figura 13 - Resposta apresentada pela aluna A4



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos não encontraram dificuldades apenas em executar o cálculo do MMC, alguns não conseguiram executar corretamente operações básicas envolvendo a adição e a subtração. Tem-se como exemplo a estudante A12 que, até o momento, havia deixado todas as questões em branco, mas tentou solucionar este problema efetuando uma soma.

Figura 14 - Resposta apresentada pela aluna A12

Fonte: Dados da pesquisa

É possível perceber que além de não saber montar corretamente a conta, a aluna cometeu erros ao tentar resolvê-la.

Problema 5: Miriam é doceira e vende pacotes com 10 biscoitos cada um e caixas com 6 bombons cada uma. Um cliente pretende comprar a mesma quantidade de biscoitos e de bombons. Quantos pacotes de biscoitos e quantas caixas de bombos ele deve comprar, no mínimo, para conseguir o que quer? (Registre como você pensou)

Fonte: Dante (2012, p. 142)

Esperava-se que os participantes da pesquisa resolvessem o problema fazendo o MMC entre 10 e 6, obtendo, assim, o número 30. Além disso, deveriam dividir este número pela quantidade de biscoitos e bombons que contém cada caixa, ou seja, dividir 30 por 6 e 30 por 10, o que resultaria respectivamente em 5 e 3. Chegando, então, que o cliente deve comprar três caixas de biscoitos e cinco de bombons. Mas ao analisar as respostas notou-se que alguns não sabiam ou não se recordavam de como realizar o cálculo do MMC.

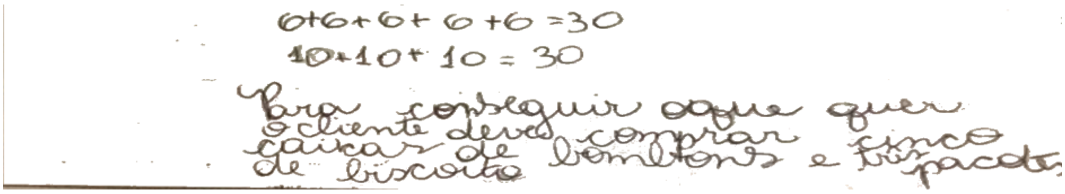
Tabela 5 - Respostas apresentadas no problema 5

Respostas	**Número de alunos**
Apenas realizou o cálculo do MMC, corretamente ou incorretamente, não apresentando as demais etapas para a conclusão da solução	8
Apresentou a resposta correta, mas não expôs como chegou à solução do problema	1
Deu uma resposta incorreta e não apresentou a maneira que utilizou para chegar a tal solução	2
Deixou em branco	3
Apenas realizou a fatoração dos números	2
Utilizou uma das operações de: soma subtração ou multiplicação para tentar encontrar a solução	5
Encontrou a resposta correta, mas não utilizou o MMC	2

Fonte: Dados da pesquisa

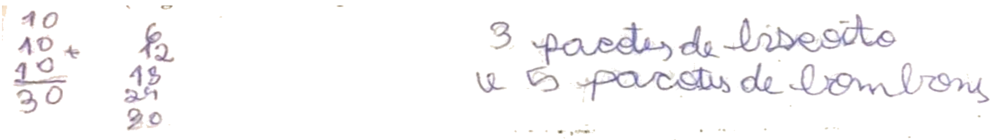
A aluna A13 e A 22 encontraram a resposta correta. Enquanto a A13 obteve o menor múltiplo entre eles por meio da soma (figura 15), a participante A22 apresentou os múltiplos de 6 ao invés de apenas utilizar a soma (figura 16).

Figura 15 - Resposta apresentada pela aluna A13



Fonte: Dados da pesquisa

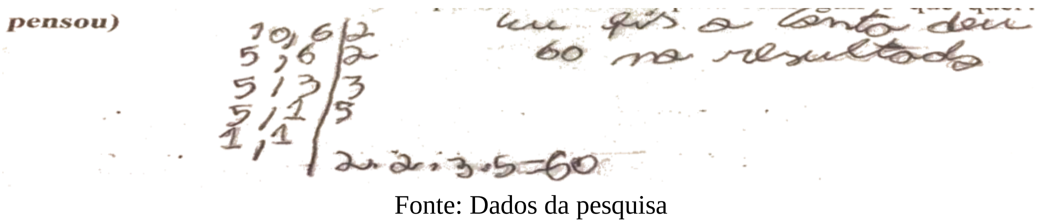
Figura 16 – Resposta apresentada pela aluna A22



Fonte: Dados da pesquisa

Ao analisar as respostas dos alunos é possível notar diversos erros, tanto aqueles cometidos pelos alunos que tentaram utilizar o MMC, como é o caso do aluno A21 que demonstrou dificuldades ao executar tal cálculo (figura 17), como os que tentaram resolver de outra forma, como é o caso da aluna A12, que utilizou a subtração (figura 18).

Figura 17 – Resposta apresentada pelo aluno A21



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 18 - Resposta apresentada pela aluna A12

Fonte: Dados da pesquisa

Problema 6: Voltando do intervalo reservado para recreação, os alunos do 6° ano devem subir um lance de escada de 30 degraus para que alcancem o andar onde esta situada a sala de aula correspondente a essa turma. Dois alunos, Rubinho e Daniel, começaram a subir a escada do primeiro degrau. Rubinho resolve então subir essa escada de 3 em 3 degraus e Daniel de 2 em 2 degraus.

Marque a afirmativa **correta** relativa à situação apresentada e justifique sua resposta.

a) Rubinho e Daniel pisarão em cinco degraus em comum, mas não chegarão no 30° degrau juntos.

b) Rubinho e Daniel pisarão no 30° degrau, logo irão gastar o mesmo tempo para subir a escada.

c) Rubinho pisará no 23° degrau, mas Daniel não pisará nesse degrau porque 23 não é divisível por 2.

d) Somente Daniel pisará no 18° degrau, porque 18 é um numero par sendo, portanto divisível por 2.

Justificativa. (Por que você pensou assim?)

Fonte: Adaptado de Atividade Provão - Colégio Equipe (p. 9).

Procurava-se com este problema diagnosticar se os alunos conseguem resolver corretamente um problema envolvendo o cálculo do MDC. Entre os problemas apresentados este foi o que obteve o maior número de acertos, chegando a 13 respostas corretas.

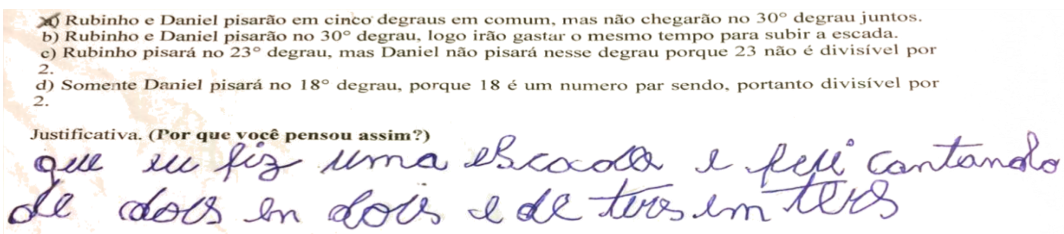
Tabela 6 - Respostas apresentadas no problema 6

Resposta	Números de alunos
Assinalou a alternativa incorreta e não justificou	2
Marcou a alternativa incorreta e justificou	5
Assinalou a alternativa correta e justificou	13
Deixou em branco	3

Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos A22 e A8 são alguns dos que assinalaram a alternativa correta, e utilizaram diferentes estratégias para solucionar o problema. O estudante A8 justificou-se dizendo que havia desenhado uma escada e contado os passos dados pelos personagens do problema. Tal estratégia também foi utilizada por outros alunos.

Figura 19 - Resposta apresentada pelo aluno A8



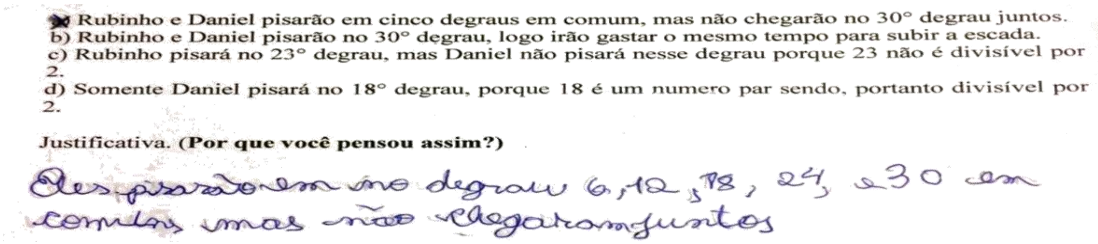
~~a)~~ Rubinho e Daniel pisarão em cinco degraus em comum, mas não chegarão no 30° degrau juntos.
b) Rubinho e Daniel pisarão no 30° degrau, logo irão gastar o mesmo tempo para subir a escada.
c) Rubinho pisará no 23° degrau, mas Daniel não pisará nesse degrau porque 23 não é divisível por 2.
d) Somente Daniel pisará no 18° degrau, porque 18 é um numero par sendo, portanto divisível por 2.

Justificativa. (**Por que você pensou assim?**)
que eu fiz uma escada e fui contando de dois em dois e de tres em tres

Fonte: Dados da pesquisa

A aluna A22 encontrou e listou quais seriam os degraus que ambos os personagens pisariam, obtendo um total de 5 degraus e concluiu que não chegariam juntos.

Figura 20 - Resposta apresentada pela aluna A22


a) Rubinho e Daniel pisarão em cinco degraus em comum, mas não chegarão no 30° degrau juntos.
b) Rubinho e Daniel pisarão no 30° degrau, logo irão gastar o mesmo tempo para subir a escada.
c) Rubinho pisará no 23° degrau, mas Daniel não pisará nesse degrau porque 23 não é divisível por 2.
d) Somente Daniel pisará no 18° degrau, porque 18 é um numero par sendo, portanto divisível por 2.

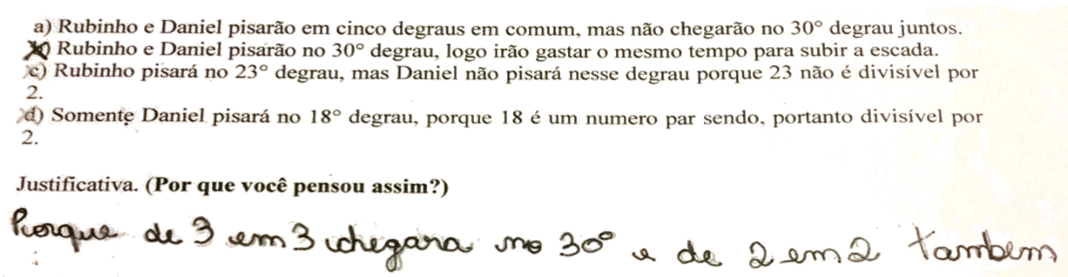
Justificativa. **(Por que você pensou assim?)**

Eles pisarão em no degrau 6, 12, 18, 24, e 30 em comum, mas não chegaram juntos

Fonte: Dados da pesquisa

A estudante A2 assinalou a “alternativa b”, na qual a primeira metade da afirmação está correta “Rubinho e Daniel pisarão no 30° degrau”, mas já seu restante “logo irão gastar o mesmo tempo para subir a escada” trata-se de uma informação incorreta. A aluna, aparentemente, considerou apenas a primeira metade da alternativa, ignorando sua conclusão, o que a levou a apresentar uma resposta incorreta para o problema.

Figura 21: Resposta apresentada pelo aluno A2


a) Rubinho e Daniel pisarão em cinco degraus em comum, mas não chegarão no 30° degrau juntos.
b) Rubinho e Daniel pisarão no 30° degrau, logo irão gastar o mesmo tempo para subir a escada.
c) Rubinho pisará no 23° degrau, mas Daniel não pisará nesse degrau porque 23 não é divisível por 2.
d) Somente Daniel pisará no 18° degrau, porque 18 é um numero par sendo, portanto divisível por 2.

Justificativa. **(Por que você pensou assim?)**

Porque de 3 em 3 chegara no 30° e de 2 em 2 tambem

Fonte: Dados da pesquisa

Problema 7: Para a gincana de uma escola serão formadas equipes de alunos de cada curso, com a mesma quantidade e o maior número possível de alunos. Para facilitar a montagem das equipes os professores fizeram um quadro com a quantidade de alunos matriculados em cada curso.

Curso	Quantidade de alunos
A	148
B	160
C	184
D	196

a) quantos alunos terá cada equipe?
b) quantas equipes serão formadas?

Fonte: Leonardo (2010a, p. 144)

Buscava-se através deste problema, identificar se os alunos sabem resolver corretamente um problema envolvendo o MDC de quatro números. Esperava-se que no “item a” os alunos realizassem o cálculo do MDC dos números 148, 160, 184 e 196, ou seja, aqueles expostos na tabela como sendo a quantidade de alunos, obtendo a resposta correta de 4 alunos por equipe. Já no "item b" deveriam dividir a quantidade de alunos em cada curso, pela quantia de alunos em cada equipe, obtendo 37, 40, 46 e 49 sendo este o número de equipes formadas pelos cursos A, B, C e D, respectivamente. Por fim, seria necessário somar as equipes de cada curso para obter o total de equipes formadas, isto é, 172 equipes.

Apenas dois alunos conseguiram responder o "item a" corretamente, e todos erraram o "item b", conforme tabelas 7 e 8.

Tabela 7 - Respostas apresentadas no "item a" do problema 7

Respostas	Números de alunos
Deixou em branco	5
Apenas copiou a quantidade de alunos de cada curso	3
Realizou corretamente o cálculo do MDC	2
Realizou incorretamente o cálculo do MDC	3
Somou a quantidade de aluno de cada curso e dividiu o resultado por 2,4 ou 8	8
Apenas apresentou uma resposta incorreta	3
Apenas somou a quantidade de alunos de cada curso	2

Fonte: Dados da pesquisa

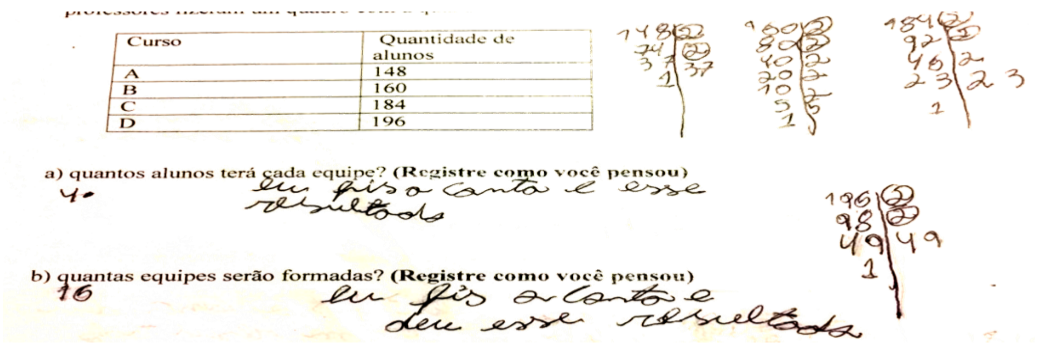
Tabela 8 - Respostas apresentadas no "item b" do problema 7

Respostas	Números de alunos
Deixou em branco	5
Respondeu que a cada equipe corresponde a um curso, ou seja, seriam formadas 4 equipes	10
Respondeu que seriam formadas 8 equipes	3
Apenas apresentou uma resposta incorreta	3
Utilizou-se das contas realizadas na questão anterior, porém não chegou a uma resposta correta	2

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno A21 executou corretamente o cálculo do MDC, respondendo corretamente o "item a", porém, na sequência, somou os fatores comuns que havia encontrado para resolver o MDC, apresentando uma resposta incorreta para o "item b".

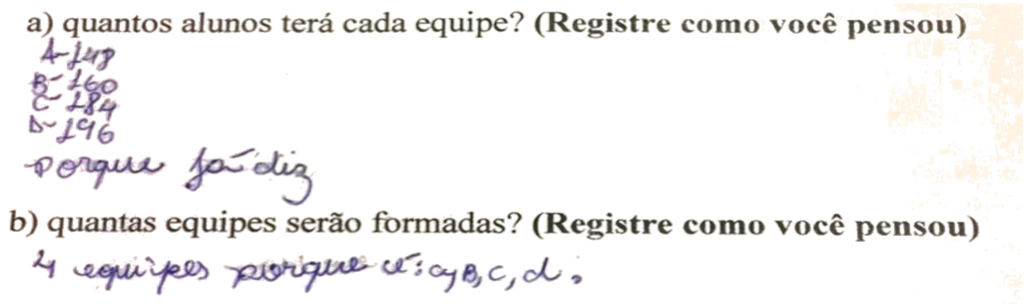
Figura 22 - Resposta apresentada pelo aluno A21



Fonte: Dados da pesquisa

Já a aluna A4 não realizou nenhum cálculo, apenas copiou os números expostos no problema.

Figura 23 - Resposta apresentada pela aluna A4

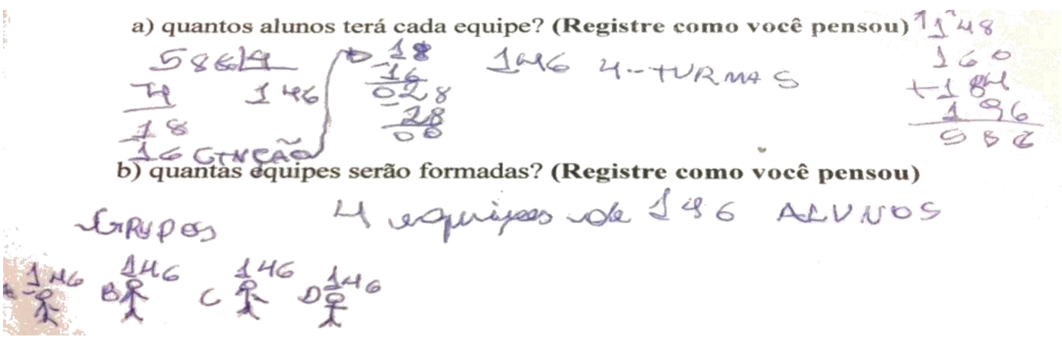


Fonte: Dados da pesquisa

Nota-se que a mesma não conseguiu interpretar o problema, considerando que cada equipe seria composta por todos os alunos de seus respectivos cursos.

Já aluna A3 determinou o total de alunos dos quatro cursos e, em seguida, calculou a média, 146 por equipe.

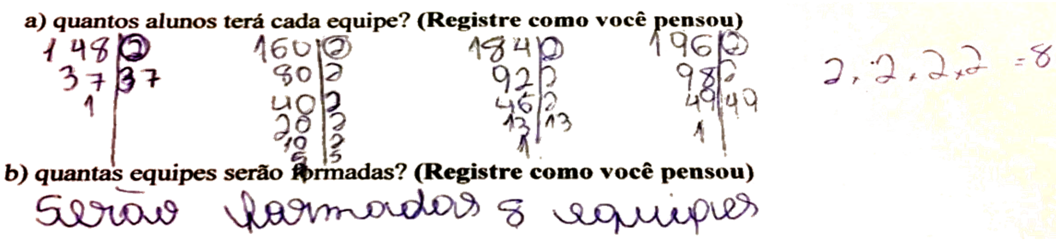
Figura 24 - Resposta apresentada pela aluna A3



Fonte: Dados da pesquisa

A estudante A11 utilizou o MDC para tentar solucionar o problema, porém cometeu erros ao executar o cálculo do mesmo.

Figura 25 - Resposta apresentada pela aluna A11


a) quantos alunos terá cada equipe? (Registre como você pensou)

148 | 2
37 | 37
1

160 | 2
80 | 2
40 | 2
20 | 2
10 | 2
5 | 5

184 | 2
92 | 2
46 | 2
13 | 13
1

196 | 2
98 | 2
49 | 49
1

2 . 2 . 2 . 2 = 8

b) quantas equipes serão formadas? (Registre como você pensou)

Serão formadas 8 equipes

Fonte: Dados da pesquisa

Considerações finais

Após analisar as respostas apresentadas pelos alunos é notável a dificuldade que os mesmos possuem quanto à resolução de problemas, mas também em realizar operações básicas, não conseguindo executar os algoritmos corretamente. Os estudantes ainda apresentaram dificuldades quanto à interpretação, o que pode ter acarretado incompreensões e equívocos ao tentarem resolver os problemas. Menos da metade da turma soube definir o que é um número primo e aplicá-lo na hora de realizar a fatoração. Nos problemas que envolviam os conceitos de MMC e MDC, grande parte dos alunos não soube diferenciá-los e executá-los no contexto dos problemas.

Considerando as ideias Polya (2006), tem-se que a resolução de problemas é uma habilidade prática, na qual se aprende a resolver problemas, resolvendo-os. Segundo ele, a inteligência é basicamente a habilidade para resolver problemas, e o aluno a desenvolve usando-a. Ainda, não se consegue desfrutar da Matemática e nem a aprender sem uma participação ativa, ou seja, como meros espectadores. Assim, esses resultados dão indícios de que os participantes não vivenciam a resolução de problemas ou desenvolvem suas habilidades de resolver problemas. Muitas vezes, o problema é utilizado como aplicação de uma teoria previamente explanada pelo professor, em que o aluno apenas acompanhou as estratégias indicadas ou desenvolvidas por ele. Onuchic et al (2014) recomendam o uso da Resolução de Problemas como metodologia de ensino. Nessa perspectiva, o problema deve ser o ponto de partida para a construção do conhecimento matemático e, assim, de acordo com as autoras, o aluno aprende matemática enquanto resolve o problema.

Visando melhorar o aprendizado e minimizar as dificuldades ao trabalhar com problemas sugere-se que o professor busque implantar novas metodologias, tais como a Resolução de Problemas, já que ao longo de todo o trabalho é notória a importância dessa metodologia ativa nas aulas de Matemática. Por meio dela, não seria possível, por exemplo, aprender procedimentos matemáticos – como o de decomposição de fatores primos – sem relação com um contexto de problemas. Suas contribuições têm se mostrado, principalmente, no desenvolvimento do raciocínio, na autonomia e na motivação do aluno em relação ao estudo da Matemática. Uma vez que resolver problemas os desafia, tirando-os de suas zonas de conforto, e os faz construtores de seu conhecimento, revela-se algumas das potencialidades desta metodologia de ensino.

Recebido em: 29/10/2020
Aprovado em: 10/04/2021

Referências

ATIVIDADE **Provão** – Colégio Equipe. Disponível em: <http://www.colegioequipe.com.br/muriae/wp-content/uploads/sites/5/PROVAO-MAT-09-07-6-ANO.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2020.

______. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. v.2 Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília - DF, 2006. Formato PDF. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2020.

______. Ministério da Educação. Governo Federal. **Base Nacional Curricular Comum:** Educação é a base. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2020.

CERVO, A.; BERVIAN, P. A.; DA SILVA, R. **Metodologia Científica.** 6ª ed. São Paulo: Pearson, 2006.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 3. ed. São Paulo: Ática, 1991.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris:** Matemática. 6.º ano. 1 ed. São Paulo: Ática, 2012.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna** : volume único. 4 ed. São Paulo: Atual, 2003.

FIORELLI, J. O. **Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum generalizados aplicados no ensino básico**. 2017. 72 p. Dissertação (Mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2017. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/325524>. Acesso em: 01 dez. 2020.

LEONARDO, F. M. (Ed). **Projeto Araribá:** Matemática. 6.º ano. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2010a.

LEONARDO, F. M. (Ed). **Projeto Araribá:** Matemática – manual do professor. 6 ano. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2010b.

ONUCHIC, L. R. **Ensino Aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas.** In: BICUDO, M. A. V. (Org). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectiva. São Paulo: UNESP, 1999. (seminários e debates). p. 199-218.

ONUCHIC, L R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino aprendizagem de matemática através da resolução de problema**s. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (orgs). Educação Matemática - pesquisa em movimento. 2.ed. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. J. **Resolução de problemas:** teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SANTOS, V. M. P. dos. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática:** métodos alternativos**.** Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**. Artmed Editora, 2009, p. 58-78.