

O ENSINO DE FIGURAS TRIDIMENSIONAIS NO 6º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL: contribuições do modelo de Van Hiele
*THE TEACHING OF THREE-DIMENSIONAL FIGURES IN THE 6TH YEAR OF ELEMENTARY
SCHOOL: contributions from the Van Hiele model*

Sidnei Huebert dos Santos¹

Roselene Alves Amâncio²

RESUMO

O presente artigo é parte do trabalho de conclusão de um curso de especialização que visou analisar as contribuições de uma sequência de atividades, fundamentada no modelo de Van Hiele, para o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes do sexto ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal de Belo Horizonte. As atividades foram desenvolvidas de forma que os estudantes fizessem explorações de objetos e desenhos que representavam figuras geométricas tridimensionais e comunicassem suas ideias, por escrito e oralmente, com e para seus colegas e também para o professor. Os estudantes tiveram liberdade de se expressarem usando suas palavras de modo que os conceitos e termos geométricos foram sendo construídos e refinados ao longo da aplicação da sequência de atividades. Os dados da pesquisa foram coletados por meio de anotações realizadas em diário de campo contendo as descrições e as impressões sobre o desenvolvimento das tarefas, registros dos estudantes, fotografias e filmagens das aulas. As análises nos permitem afirmar que os estudantes avançaram na aprendizagem da Geometria, sendo que vários nos deram indícios de terem avançado do nível de visualização para o nível de análise.

Palavras-chave: Figuras tridimensionais; Geometria; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This paper is a part of the work to finish a specialization course that aimed to analyze the contributions of a sequence of activities, of Van Hiele model's based, for the development of the geometric thinking of sixth grade students at an Belo Horizonte city public school. These activities were developed in such a way that students have explored objects and drawings that represented three-dimensional geometric figures and communicated their ideas, writing and orally, with and to their colleagues and also to the teacher. Students were free to express themselves using their words so that geometric concepts and terms were being constructed and refined throughout the application of the sequence of activities. The research data have been collected through notes made in a field's diary containing descriptions and impressions about the development of the tasks, student records, photographs and video footage of the classes. The analyzes allow us to assume that the students have advanced in Geometry's learning, and several of them have given us evidence that they have advanced from the visualization level to the analysis level.

Keywords: Three-dimensional figures; Geometry; Elementary school.

¹. Professor da Rede Municipal de Ensino de Belo Horizonte. E-mail: sidnei.santos@edu.pbh.gov.br

². Professora de Matemática do Centro Pedagógico da UFMG. E-mail: roseleneamancio@ufmg.br

Introdução

Este trabalho parte do princípio de que a Geometria é parte intrínseca do ser humano. Basta observar as primeiras ações humanas visando o atendimento de suas necessidades de abrigo, alimentação, segurança, localização, comunicação e arte. Considera-se, aqui, que a Geometria é está presente na humanidade desde os primórdios da civilização, conforme afirma Eves (1992):

A história da Geometria, como a de muitas outras matérias em desenvolvimento e mudança, compõe-se de dois fios entrelaçados. Um deles narra o desenvolvimento de seu conteúdo e o outro sua natureza imutável. Ninguém ignora que a Geometria deve ter se iniciado provavelmente em tempos muito remotos na antiguidade, a partir de origens modestas, depois cresceu gradualmente até alcançar a dimensão enorme que tem hoje. (EVES, 1992, p. 1).

Como elemento fundamental para o desenvolvimento da humanidade nas mais diversas áreas, a Geometria é um campo de estudo essencial para o currículo escolar. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) considera a Geometria como uma das unidades temáticas e destaca que:

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes (BRASIL, 2017, p. 269)

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) enfatizam a importância da Geometria, por considerarem que sua aprendizagem proporciona meios de perceber, interpretar, modificar e antecipar transformações relativas aos objetos.

Assim, considerando a importância de proporcionar um ensino de Geometria que contribua para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, bem como a participação dos autores em um curso de formação de professores, no qual uma dentre as diversas atividades previstas era o desenvolvimento de um plano de ação pedagógica na escola em que um dos autores lecionava, foi realizada uma pesquisa acerca do ensino e da aprendizagem da Geometria. Tal pesquisa ambicionou identificar as contribuições de uma sequência de atividades para o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de Belo Horizonte/MG.

Para a realização desta investigação, foram elaboradas sete atividades ancoradas no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele (1959), descrito por Van de Walle (2009), que visaram contribuir para a aprendizagem das figuras tridimensionais, notadamente prismas e pirâmides. As tarefas foram desenvolvidas em uma turma composta por vinte e oito estudantes de uma escola da prefeitura de Belo Horizonte/MG, no horário regular de aulas, preferencialmente às quartas-feiras, quando havia dois módulos de 60 minutos em sequência.

Para a coleta de dados foram adotados os seguintes instrumentos: diário de campo com as observações realizadas pelo docente/pesquisador, registros dos alunos, gravações em áudio e vídeo das aulas. Os nomes utilizados no decorrer da pesquisa são fictícios, a fim de garantir a preservação da identidade dos participantes.

Pudemos constatar, como será mostrado ao longo do texto, que inicialmente os estudantes se encontravam no Nível 0 (Zero) de pensamento geométrico e, ao final da realização da sequência de atividades, a maioria deles mostrou que havia avançado para o Nível 1, conforme o modelo de Van Hiele.

O desenvolvimento do pensamento geométrico

Como a pesquisa realizada teve a intenção de investigar as contribuições de uma sequência de atividades para a aprendizagem de figuras tridimensionais de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, interessou-se compreender como se desenvolve o pensamento geométrico daqueles alunos. Para tanto, valeu-se das contribuições do modelo de Van Hiele apontadas por Crowley (1994), Jaime e Gutierrez (1990) e Van de Walle (2009).

De acordo com os autores citados, a teoria proposta por Van Hiele tem, como seu aspecto principal, uma hierarquia de cinco níveis de compreensão geométrica.

O Nível 0 (Zero) é chamado de visualização. Nesse nível, os objetos de pensamento são as formas e o que elas parecem. Os alunos pertencentes ao Nível 0 (Zero) reconhecem as figuras visualmente e nomeiam as formas, baseando-se nas características globais, ou seja, pela sua aparência física e não por suas propriedades. Os alunos que estão nesse estágio geralmente são enganados pela orientação da figura. Se eles veem um quadrado com lados em um ângulo de 45° com a vertical, por exemplo, o consideram como losango. De acordo com Van de Walle (2009), as propriedades das formas estão incluídas nesse nível, mas apenas de uma maneira informal e observacional. Os estudantes deste nível não usam as propriedades para classificar figuras, mas sim a aparência.

Os estudantes que estão no nível de visualização devem ser incentivados a criar classes de formas e a explorar os aspectos em que as formas são parecidas e diferentes. Dessa maneira, eles podem classificar os poliedros separando-os em grupos de prismas e pirâmides.

O Nível 1 é chamado de análise. Os alunos desse nível são capazes de considerar todas as formas de uma classe em vez de pensar em apenas figuras específicas, como ocorre no Nível 0 (Zero). Dessa forma, eles podem pensar, por exemplo, nas características gerais de todas as pirâmides.

Portanto, são capazes de descobrir propriedades das formas através da observação e experimentação. Eles podem medir ângulos de vários paralelogramos e generalizar que os

paralelogramos possuem ângulos opostos congruentes. No entanto, ainda não compreendem as inclusões de classe e nem pensam nas relações entre as propriedades de uma figura.

De acordo com Van de Walle (2009), os alunos que estão no nível de análise devem continuar a usar modelos e desenhos de formas, mas agora começam a vê-los como representantes de uma classe de figuras. Também é importante que eles façam listas de propriedades de uma determinada forma geométrica.

É esperado, portanto, que eles citem todas as propriedades que eles conhecem, pois ainda não pensam sobre as propriedades mínimas que definem uma figura. Assim, eles podem descrever os prismas retos considerando todas as propriedades que eles conhecem, como: todas as faces são polígonos, possuem duas bases iguais, as faces laterais são retângulos.

O Nível 2, por sua vez, é denominado de dedução informal. Segundo Van de Walle (2009), os alunos do Nível 2 são capazes de desenvolver relações entre as propriedades de um ente geométrico. Por exemplo: se os quatro ângulos são retos, o quadrilátero é um retângulo. Já possuem raciocínio do tipo “se – então”. As observações vão além das próprias propriedades e passam a focar os argumentos lógicos sobre as propriedades, como: “o quadrado é um losango porque tem todas as propriedades de um losango”.

Os estudantes do Nível 2 conseguem classificar formas usando apenas uma quantidade mínima de características. As provas podem ser mais intuitivas do que rigorosamente dedutivas. São capazes de acompanhar demonstrações formais, mas não veem como construir uma prova diferente.

Já os estudantes que estão no Nível 3 (dedução) começam a apreciar a necessidade de um sistema lógico fundamentado sobre um conjunto mínimo de suposições e do qual outras verdades podem ser derivadas. Nesse nível, o aluno é capaz de construir deduções formais, compreender que há possibilidade de desenvolver uma demonstração de mais de uma maneira.

Os estudantes do Nível 4 (rigor) são capazes de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, podem estudar Geometrias não euclidianas. Sobre este nível, Crowley (1994, p. 4) observa que: “este último nível é o menos desenvolvido nos trabalhos originais e tem recebido pouca atenção dos pesquisadores. Segundo a autora, P. M. Van Hiele reconheceu que se interessava particularmente pelos três primeiros níveis”.

Uma vez que foram apresentados os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, é importante dar atenção também, às quatro propriedades do modelo de Van Hiele que são explicadas por Crowley (1994), sendo estas:

Sequencial: um estudante não pode atingir um nível sem antes ter superado o nível anterior. A mudança de um nível para o outro está relacionada aos conteúdos estudados e aos métodos de ensino e aprendizagem, não tendo relação com a idade.

Ao atingir um nível em determinado conteúdo geométrico, não se assegura que diante de outro conteúdo geométrico os alunos estejam todos no mesmo nível. Um estudante deverá passar pelos níveis de pensamento geométrico seguindo uma ordem de complexidade crescente em cada novo conteúdo.

Adjacência: em cada nível de pensamento, o que era intrínseco no nível anterior torna-se extrínseco no nível atual, conforme mostrado no Quadro 1. Pode-se notar, por exemplo, que no Nível 1 as figuras são analisadas e as suas propriedades são descobertas, mas somente no Nível 2 os alunos são capazes de desenvolverem relações entre as propriedades dos objetos geométricos.

Quadro 1 - Estrutura recursiva dos níveis de Van Hiele

Nível	Elementos explícitos	Elementos implícitos
0	Figuras	Partes e propriedades das figuras
1	Partes e propriedades das figuras	Relações entre propriedades das figuras
2	Relações entre propriedades das figuras	Dedução formal de teoremas
3	Dedução formal de teoremas	Sistemas dedutivos axiomáticos
4	Sistemas dedutivos axiomáticos	Diferentes sistemas axiomáticos da Geometria

Fonte: Adaptado de Jaime e Gutierrez (1990, p. 312)

Jaime e Gutierrez (1990) colocam que deverão ser propostas atividades que requeiram a utilização das habilidades implícitas em cada nível, para que o estudante desenvolva o raciocínio geométrico e, por consequência, atinja o nível superior ao que ele se encontra.

Distinção: cada nível possui seus próprios símbolos linguísticos e sua rede de relações que conecta tais símbolos. Uma relação que é correta em um nível pode não ser correta em outro. Por exemplo, para estudantes dos níveis 0 e 1 é correto afirmar que o quadrado é uma forma distinta de um retângulo. Mas para alunos do Nível 2, o quadrado é um retângulo de lados iguais.

Separação: duas pessoas que raciocinam em diferentes níveis podem não compreender uma à outra. Se um aluno está em um nível, mas o professor promove um curso em um nível superior, esse aluno não conseguirá acompanhar os raciocínios empregados.

Se um professor utiliza a relação que os retângulos são paralelogramos para resolver um problema, estudantes do Nível 2 irão compreendê-lo, mas alunos do Nível 1 não entenderão essa ideia.

De acordo com o exposto acima, o modelo de Van Hiele se apresenta como suporte teórico substancial para a elaboração de tarefas e condução de aulas, que podem proporcionar aos estudantes o desenvolvimento do pensamento geométrico. Portanto, a sequência de atividades que foi elaborada e que este trabalho apresenta levou em consideração esse modelo teórico.

A sequência de atividades

Para a realização das tarefas, os vinte oito estudantes da turma foram distribuídos em sete equipes com quatro estudantes em cada. Não houve critério de seleção, ou seja, os agrupamentos se deram por afinidade entre os alunos e as equipes foram nomeadas pelos próprios integrantes.

No entanto em algumas atividades, em função de suas características e, especialmente nos jogos, os alunos trabalharam em duplas ou em trios.

O quadro a seguir exibe as atividades que compõem a sequência que foi planejada pelos autores e desenvolvida pelos estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental, bem como os seus respectivos objetivos.

Quadro 2 – Atividades e objetivos propostos

Atividades	Objetivos
01 - As figuras geométricas tridimensionais no cotidiano.	<ul style="list-style-type: none"> - Analisar imagens de objetos do cotidiano - Agrupar imagens de objetos do cotidiano de acordo com características semelhantes definidas pelas equipes de alunos.
02 - Construindo figuras tridimensionais	<ul style="list-style-type: none"> - Identificar os polígonos que compõem as faces de prismas e pirâmides. - Desenhar moldes (planificações) para construir prismas e pirâmides a partir de modelos em acrílico. - Construir objetos que têm a forma de prismas e pirâmides.
03 – Identificando prismas e pirâmides	<ul style="list-style-type: none"> - Formar agrupamentos separando modelos que representam prismas e pirâmides. - Identificar características de prismas e pirâmides. - Nomear diferentes prismas e pirâmides, considerando o polígono da base.
04 - Identificando faces, vértices e arestas	Identificar faces, vértices e arestas em objetos que representam prismas e pirâmides.
05 – Dominó	Relacionar formas tridimensionais às suas respectivas planificações.
06 – Consolidando conhecimentos	Retomar e registrar, através da construção de um livro, as aprendizagens sobre os conteúdos que foram trabalhados nas atividades anteriores.
07 - Jogo “Quem sou eu?”	Identificar prismas e pirâmides por meio de pistas sobre suas características.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A seguir, serão descritos o desenvolvimento e a análise das atividades que foram aplicadas junto aos alunos, bem como as possíveis relações entre o vivenciado na prática com o modelo proposto por Van Hiele.

Atividade 01 – As figuras geométricas tridimensionais no cotidiano

Cada equipe recebeu o mesmo conjunto de imagens de objetos do cotidiano que possuem a forma de diferentes figuras geométricas tridimensionais. Em seguida os aprendizes foram convidados a observarem se as mesmas eram parecidas ou diferentes.

Logo após, cada equipe criou um cartaz no qual foram agrupadas as imagens dos objetos de acordo com critérios que foram definidos pelas próprias equipes de aprendizes, sem a intervenção do professor, que cumpriu a função de mediar os processos e de instigar os estudantes a analisarem as figuras na busca de possíveis semelhanças ou diferenças entre elas.

A figura 1 exibe o cartaz produzido pela equipe “Azul”, a partir de suas próprias experiências e, conforme dito anteriormente, sem a intervenção direta do professor.

Figura 1 - Cartaz da Equipe “Azul”



Fonte: Dados da pesquisa.

Nota-se que os estudantes da Equipe “Azul”, conseguiram, na maioria dos agrupamentos, identificar e nomear as figuras corretamente, demonstrando possuírem conhecimentos prévios a respeito do assunto. Porém, pode-se observar que esses alunos nomearam os prismas como retângulos. Interessante notar que uma embalagem de chocolate, que tem a forma de um prisma de base triangular foi incluída no grupo das pirâmides, pois o que ficou mais evidente para os estudantes foram os triângulos que compõem tais figuras.

Desse modo, podemos constatar que os integrantes dessa equipe estavam – assim como os demais alunos da turma – no Nível 0 (Zero), o da visualização, pois, como Van de Walle (2009) observa, os alunos pertencentes ao Nível 0 (Zero) reconhecem as figuras visualmente e nomeiam as formas baseando-se em suas características globais, ou seja, pela aparência física e não por suas propriedades.

Vejamos agora o cartaz da Equipe “Malucas”:

Figura 2 - Cartaz da Equipe “Malucas” – Atividade 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Verifica-se que os agrupamentos da equipe “Malucas” não receberam nomes relacionados às figuras geométricas considerados na matemática escolar. Ou seja, a linguagem geométrica ainda não estava presente na maneira de pensar desses estudantes. Ainda, pode-se notar, ao analisar o cartaz acima, que figuras bem distintas entre si encontram-se reunidas.

Por exemplo, no agrupamento G.C. tem-se quatro corpos redondos (esferas) e um prisma octogonal. Também é possível encontrar cilindros distribuídos em dois agrupamentos, em contrapartida, tanto os cubos (G.F) quanto os cones (G.D) encontram-se agrupados por semelhança.

Vale ressaltar, que no registro escrito, os alunos da Equipe “Malucas” apontaram que os critérios para escolha foram os seguintes: “G.C: *Porque são redondos e parecidos.* G.D: *Porque todos têm a ponta fina e se parecem com o triângulo. [...] G.F: Porque eles são cubos de tamanhos diferentes, mas não deixa de ser cubo”.*

A forma de pensar trazida pela equipe demonstra que seus integrantes estão no Nível 0 (Zero), pois conforme as explicações dos estudantes, os mesmos agruparam as figuras de acordo com sua aparência, sem fazer menção às propriedades das formas, o que é típico nesse nível.

Já a equipe “Fortnite” agrupou as figuras considerando as classificações da matemática escolar, conforme podemos ver no registro mostrado a seguir.

Figura 3 - Registro escrito da Equipe “Fortnite” sobre a atividade 1

ESCREVA O QUE VOCÊS FIZERAM, COMO E PORQUÊ? QUAIS FORAM SUAS DESCOBERTAS?

fizemos o grupo dos cones, pois eles tem formatos semelhantes. O grupo das esferas, pois elas são iguais. Fizemos o grupo dos cilindros, pois eles são iguais em diferentes aspectos. Fizemos os quadriláteros por causa de suas características. Octôgonos só tivemos um. Triângulos tivemos 4 diferente mas com o mesmo formato.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação à equipe “Fortnite”, observa-se, pelo registro escrito, que os estudantes nomearam algumas formas tridimensionais corretamente, como por exemplo, os cones. Porém, se referiram à algumas figuras tridimensionais como bidimensionais, como aconteceu com as pirâmides que foram chamadas de triângulos. Desse modo, podemos concluir que os estudantes dessa equipe, também estavam no Nível 0 (Zero) - visualização.

As demais equipes agruparam as figuras de maneira semelhante aos agrupamentos mostrados anteriormente neste texto. Pode-se concluir a partir da análise da maneira como os estudantes agruparam as formas e como eles explicaram os critérios utilizados para fazer os agrupamentos que eles demonstraram estar no Nível 0 (Zero) - visualização. Conforme Crowley (1999, p. 2) destaca, em tal nível “as figuras geométricas [...] são reconhecidas por sua forma como um todo, isto é, por sua aparência física, não por suas partes ou propriedades”.

Ainda é importante esclarecer que as classificações apresentadas pelas equipes não foram e nem poderiam ser determinadas como corretas ou erradas, porém percebidas como oportunidades de reflexão e discussão. Verifica-se, então, que a atividade cumpriu seu papel, ao proporcionar aos estudantes iniciarem o processo de compreensão de como são classificadas as figuras tridimensionais. Assim, constata-se que as demais atividades deveriam ser planejadas considerando que os alunos estavam no Nível 0 (Zero) de pensamento geométrico denominado “Visualização”.

Atividade 2 – “Construindo prismas e pirâmides a partir de modelos concretos”

A atividade 2 foi planejada para dar aos estudantes oportunidade de manipular e de construir figuras geométricas tridimensionais, pois, estando o aluno no chamado Nível 0 (Zero) - visualização, é fundamental que o professor possibilite a ele “observar, tocar, construir, separar, decompor, compor ou trabalhar alguma maneira”. (VAN DE WALLE, 2009, p. 440).

Foram, então, disponibilizados diversos objetos tridimensionais em acrílico que tinham a forma de diferentes figuras geométricas tridimensionais, conforme se pode observar na fotografia a seguir:

Figura 4 - Coleção de objetos tridimensionais colocados à disposição dos alunos



Fonte: Dados da pesquisa.

No desenvolvimento dessa atividade, foram considerados objetos que remetem tanto aos corpos redondos, quanto aos poliedros. Porém, ao longo da sequência de atividades, foram trabalhados, com mais profundidade, os prismas e as pirâmides.

Em equipe e também de forma individual, os alunos manipularam e observaram os objetos que tinham a forma de prismas e pirâmides. Depois, cada um utilizou diferentes objetos como modelo para construir prismas e pirâmides com papel cartão. Van de Walle (2009, p. 444) afirma que é fundamental que o aluno disponha de “uma variedade de exemplos das formas [...] de amplas oportunidades para desenhar, construir, fazer, compor e decompor formas em ambos os espaços bi e tridimensionais”.

Figura 5 - Alunos no processo de construção de figuras



Fonte: Dados da pesquisa.

A atividade também auxiliou no processo de aquisição da linguagem geométrica, pois durante a construção dos objetos tridimensionais, os estudantes foram incentivados, de maneira livre, a dar nomes às formas e ao que as compunha. Os estudantes da Equipe “Malucas” sempre usavam a expressão “*ponta fina*”, por exemplo. Outra equipe utilizou termos como “*tem mais pontas ao final, mas todos lembram uma pirâmide*”. Assim, por meio dos diálogos entre os estudantes e também com o professor, pode-se perceber que muitos alunos não distinguiam figuras planas das tridimensionais.

Os objetos construídos foram utilizados pelos estudantes ao longo das demais atividades da sequência, já nessa tarefa, puderam identificar os vértices, as faces e as arestas, sem que tais nomenclaturas fossem mencionadas.

Por fim, o momento de socialização foi propício para se discutir sobre as diferenças entre corpos redondos e poliedros. Todas as equipes demonstraram saber diferenciá-las. Como disseram os membros da Equipe “Azul”: “*A diferença entre eles é que um corpo redondo tem pelo menos uma parte redonda e os poliedros são só retos*”.

Atividade 3 – Identificando prismas e pirâmides

Os estudantes, em equipes, manipularam diferentes prismas e pirâmides, que foram construídos por eles na atividade anterior. Eles foram incentivados a observar as características dos prismas e das pirâmides, para, como recomenda Van de Walle (2009, p. 441), “que os alunos comecem a ver o que são semelhanças e diferenças nas formas”.

Figura 7 - Objetos tridimensionais construídos pelos estudantes

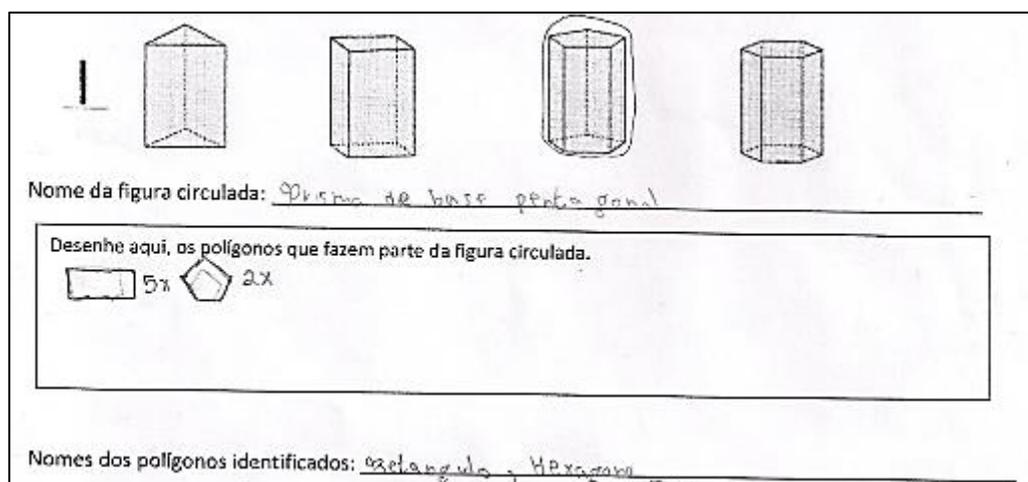


Fonte: Dados da pesquisa.

O modelo de Van Hiele é sequencial, ou seja, o aluno vai desenvolvendo o pensamento geométrico de forma gradativa. Portanto, após as duas primeiras atividades, houve a intenção de que a linguagem utilizada pelo estudante estivesse mais apurada, e que o mesmo fosse capaz de começar a compreender as propriedades das formas. Então, o professor pesquisador incentivou os alunos a nomearem diferentes prismas e pirâmides a partir da identificação do polígono da base.

A atividade 3 também foi importante para que os alunos pudessem recordar os nomes dos polígonos que haviam estudado no primeiro semestre e a identificar os polígonos que compõem diferentes prismas e pirâmides. A figura 8 mostra uma das descobertas dos membros da equipe “Geométricos”, quando analisaram um prisma de base pentagonal:

Figura 8- Registro da atividade “Descubra os polígonos e os nomes das figuras”



Fonte: Dados da pesquisa.

Pode-se verificar que os estudantes nomearam corretamente a figura tridimensional que eles estavam analisando (a que foi circutada). Também identificaram os polígonos que a compunham, inclusive indicaram a quantidade deles presente na composição da figura analisada. Portanto, a manipulação se mostrou, mais uma vez, como recurso importante para os estudantes desenvolverem o pensamento geométrico. Foi possível perceber que eles adquiriram a capacidade de nomear e identificar prismas e pirâmides sem a necessidade de dar ênfase na nomenclatura, que foi sendo adquirida ao longo da sequência de atividades. Como Van de Walle (2009, p. 441), afirma que “os alunos podem começar a perceber propriedades mais sofisticadas e o professor pode ter a oportunidade de introduzir os nomes apropriados às mesmas conforme os alunos descrevem as formas”.

Atividade 4 – Identificando faces, vértices e arestas em prismas e pirâmides

Nesta atividade, foram abordados aspectos relacionados à terminologia geométrica, mas, principalmente, à compreensão dos elementos que compõem os poliedros. Numa primeira análise pode parecer uma atividade trivial, porém, muitas vezes, os alunos não identificam corretamente estes elementos por terem acesso somente às figuras por meio de desenhos. Logo, procurou-se desenvolver a atividade em uma perspectiva na qual os alunos pudessem manipular os objetos tridimensionais, valendo-se da sua experiência sensorial, para identificar os elementos a eles solicitados.

Buscou-se, também, a descoberta e compreensão dos elementos dos poliedros, por meio do toque e do manuseio dos objetos. Nas palavras da Equipe “Malucas”, “*vértices, faces e arestas são partes de uma figura geométrica*”. O que eram “*pontas finas*” ou “*agulhadas*” representam, agora, os vértices. As partes pelas quais “*pode se passar a mão, de maneira “grande”*”, significam as faces. E o que é percorrido pelas “*pontas dos dedos*” são as arestas.

Figura 9- Aluno identificando elementos de uma pirâmide pelo manuseio



Fonte: Dados da pesquisa.

A atividade demonstra a necessidade de o professor ter em mãos um vasto repertório de recursos que são importantes para a aprendizagem da Geometria. Ater-se somente às figuras desenhadas nos livros didáticos e às figuras planas nele contidas, não colabora para que os alunos desenvolvam a habilidade de visualização. De acordo com Van de Walle (2009), a visualização pode ser considerada a capacidade de criar imagens mentais das formas e de imaginá-las em diferentes posições.

Ressalta-se, novamente, a importância da linguagem nesse processo de ensino e aprendizagem. A nomenclatura geométrica é algo a ser construído pelo estudante ao longo dos processos. Não é um simples ato de decorar nomes. Por isso, o que a equipe “Azul” traz, como resposta, é importante:

Figura 10 - Resposta da Equipe “Azul” – Atividade 4

2. Troque ideia com a sua equipe sobre o que são faces, vértices e arestas.

faces são as formas que compõem. vértices são as pontas da forma e arestas as linhas e bordas!

Fonte: Dados da pesquisa.

Como visto na figura, para aquele grupo de alunos, os vértices “*são as pontas da forma*”. Para outra equipe, no caso a “Geométricos”, as faces representam “*as partes planas de uma figura geométrica*”. E os mesmos alunos entendem as arestas como uma “*linha de cada lado de uma figura*”.

Trata-se de uma linguagem não elaborada, mas que expressa a ideia que se quer captar. O mesmo é possível perceber ao analisarmos o registro da Equipe “Fortnite”:

Figura 11 - Resposta da Equipe “Fortnite” – Atividade 4

2. Troque ideia com a sua equipe sobre o que são faces, vértices e arestas.
 Facês são os lados da figura. Aresta são as linhas.
 Vértice são os pontos

Fonte: Dados da pesquisa.

Finalmente, observemos o que disseram os membros da Equipe “Malucas”:

Figura 12 - Resposta da Equipe Malucas – Atividade 4

FACES
 2. São partes planas que formam uma figura
 VERTICES
 São os pontos que juntam a figura
 Arestas
 São retos, que juntam os pontos da figura

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir disso, pode-se fazer uma comparação entre o ponto de vista dos estudantes e o que diz o livro didático adotado para a turma com a qual o plano de ação foi desenvolvido: “[...] figuras planas representam as [...] **faces** do poliedro. No objeto é possível observar uma linha comum entre duas faces. Essa linha recebe o nome de **aresta**. O ponto de encontro de três ou mais arestas chama-se **vértice**”. (BIANCHINI, 2015, p. 82).

Nota-se, portanto, que a forma de pensar os conceitos relacionados aos elementos de um poliedro trazidos pelos alunos se aproxima do que está contido no livro didático. Convém ressaltar que o livro foi utilizado após a realização da atividade, ou seja, não houve qualquer interferência nas respostas que possam ter advindo da publicação.

A atividade, então, aponta para um caminho já percorrido, para um avanço, se levarmos em consideração as etapas anteriores. Por isso, destaca-se que o uso de termos e expressões geométricas sem que o aluno tenha tido a oportunidade de descobri-los por meios diversos, nos quais destacam-se a manipulação e a construção de figuras geométricas, é inapropriado e pode causar efeitos contraproducentes ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Atividade 5 – Jogo Dominó

Agora, passa-se à análise da “atividade 5 – Dominó”. Pensando em uma maneira lúdica para facilitar o processo de visualização, lançou-se mão de um jogo, no caso, baseado no clássico dominó. Porém, neste caso específico, contendo a planificação de uma dada figura geométrica tridimensional de um lado da peça e, do outro, o desenho de uma figura tridimensional. No jogo, além de prismas e pirâmides, utilizou-se, também, outras figuras, como cones e cilindros.

A ideia básica do jogo era combinar planificações às respectivas figuras tridimensionais. Seu fundamento é o de que o aluno será capaz de visualizar mentalmente objetos e de estabelecer estas relações. Porém, inicialmente, houve algumas dificuldades de comportamento, pois o jogo não era uma prática comum.

Soma-se a isso, a dificuldade posta pelos pré-adolescentes na escolha das duplas, o não querer perder, as brincadeiras em excesso. Então, vencidas as primeiras barreiras que estavam relacionadas à organização da sala de aula, o jogo começou a fluir. Daí, foi possível captar, através da análise cuidadosa dos diálogos dos alunos, suas dúvidas e descobertas.

Quando questionado sobre como conseguia identificar as peças, o aluno Ronaldo afirmou que ele lançava mão do seu conhecimento sobre a composição das figuras geométricas, ou seja, sobre os polígonos: *“Os prismas sempre terão formas quadradas ou retangulares, e as pirâmides sempre terão triângulos. Então eu juntei pensando nessas formas”*.

A importância dos polígonos também foi ressaltada pela aluna Maria, que disse que *“Era achar as formas das figuras planas e juntar. Eu identifico as bases das figuras e também conto as faces e arestas”*. Já de acordo com Fernando, o encaixe foi feito *“observando a base e o que mais predomina, se são quadrados ou triângulos”*.

Tal pensamento também esteve presente na argumentação de Felipe: *“Eu fiz observando a base da figura”*. Por sua vez, Cecília afirmou que *“dá para ver na planificação que nos prismas são quadrados e nas pirâmides são triângulos, é só contar para montar a peça”*.

Figura 13 - Alunos jogando “Dominó de Figuras”



Fonte: Dados da pesquisa.

A convivência constante dos alunos com o material manipulativo, ou seja, com os objetos tridimensionais, foi considerado como um facilitador para a aluna Joana, que disse: “*De tanto mexer com as figuras, só de olhar a peça eu já ia sabendo, nem precisa contar, nem nada*”.

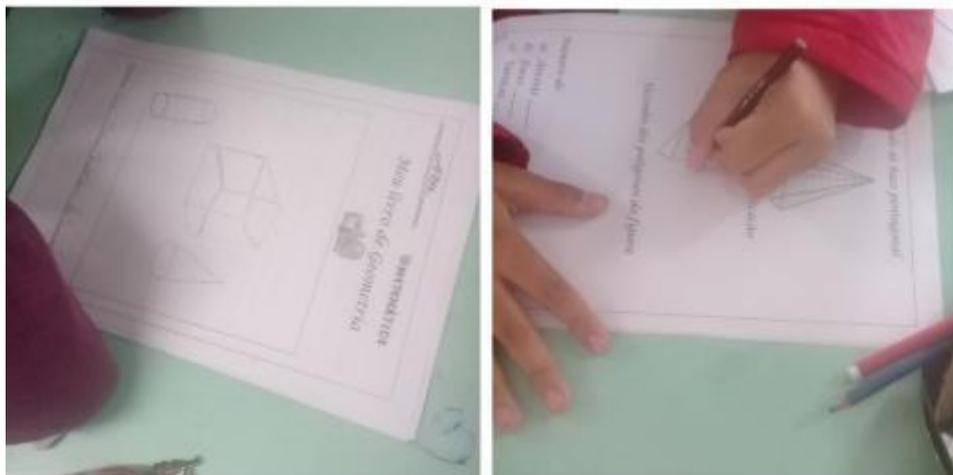
O caráter sequencial do modelo de Van Hiele permitiu, na quinta atividade, perceber o quanto os estudantes avançaram no desenvolvimento do pensamento geométrico. Nota-se, por meio da análise dos registros dos alunos e de suas falas, que o vocabulário geométrico estava sendo apropriado por eles. Também pode-se verificar que vários alunos não necessitaram manipular a coleção de objetos com a forma de prismas e de pirâmides para dirimir dúvidas, pois o hábito de manipular as figuras e explorar suas propriedades contribuiu para que eles desenvolvessem a capacidade de visualização, ou seja, conseguiam “montar” a figura em suas mentes.

Atividade 6 – Consolidando conhecimentos

Os alunos criaram um livrinho de Geometria, contendo o conteúdo básico trabalhado ao longo da sequência de atividades. No que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento geométrico, a confecção desse material proporcionou que os estudantes tivessem nova oportunidade de pensar sobre os conceitos abordados até aquele momento. Como instrumento de avaliação, permitiu verificar que muitos estudantes demonstraram ter se apropriado de vários termos geométricos e também constatar que a maioria dos alunos utilizou as propriedades para analisar as formas, demonstrando indícios de avanço para o Nível 1. Convém lembrar que, segundo Van de Walle (2009, p.441), “Os estudantes no nível de análise são capazes de considerar todas as formas dentro de uma classe, bem mais do que

analisar apenas uma forma única. [...]. Nesse nível, os alunos começam a apreciar que uma coleção de formas é composta devido às suas propriedades”.

Figura 14 - Estudante elaborando seu livro de Geometria



Fonte: Dados da pesquisa.

No decorrer da atividade, foi procurado observar se os alunos teriam necessidade de manipular os objetos ou consultar as atividades que eles fizeram anteriormente para realizar as atividades que compunham o livrinho. No decorrer deste processo, houve grande troca de informações entre os estudantes, e a maior parte deles não necessitou consultar qualquer outra fonte para elaborar seus livrinhos, porém em alguns momentos a presença do professor foi solicitada para orientar alguns alunos que não recordavam a classificação dos polígonos quanto ao número de lados.

Verificou-se que a maioria dos alunos foi capaz de identificar e classificar poliedros e não poliedros; identificar os elementos dos poliedros: vértices, arestas e faces e reconhecer a planificação de figuras tridimensionais.

Atividade 07 – Jogo “Quem sou eu?”

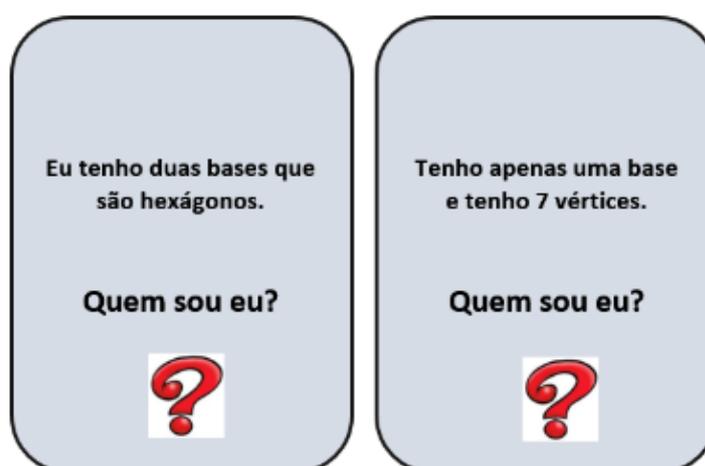
A atividade 07 foi pensada com a finalidade de avaliar o avanço dos estudantes do Nível 0 (Zero) para o Nível 1. Nas etapas anteriores, os estudantes foram expostos às figuras, as manipularam, as construíram e fizeram suas análises e descobertas. O jogo “Quem sou eu?” foi um instrumento importante para a validação do progresso dos estudantes, rumo ao Nível 1, que, como posto por Crowley (1994), o aluno em tal nível,

[...] começa uma análise de conceitos geométricos. Por exemplo, através da observação e da experimentação, os alunos começam a discernir as características das figuras. Surgem então propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Assim, reconhece-se que as figuras têm partes, e as figuras são reconhecidas por suas partes. (CROWLEY, 1994, p. 3).

Tal como ocorrera na aplicação do jogo de Dominó, houve dificuldades do ponto de vista da organização da sala de aula, pois novamente os estudantes apresentaram comportamentos que dificultaram o início do jogo. Vencida essa complicação, o jogo transcorreu normalmente, sendo que foram formados trios, onde havia dois jogadores e um juiz.

O jogo era composto por cartas contendo informações sobre uma determinada figura geométrica tridimensional, como quantidade de vértices, arestas, faces; e polígonos que faziam parte da figura em questão. Cabia ao jogador, por meio da análise dessas informações, identificar a figura correspondente. O juiz tinha por finalidade, conferir a identificação utilizando uma tabela de referência para consulta.

Figura 15 - Cartas do Jogo “Quem sou eu?”



Fonte: Elaborado pelos autores.

Nessa atividade o aluno não teve contato com os objetos tridimensionais, pois a ideia era verificar se a habilidade de “identificar [...] uma figura, dada uma descrição oral ou escrita de suas propriedades”, estava sendo adquirida. (CROWLEY, 1994, p. 11).

Figura 16 - Alunos jogando “Quem sou eu?”



Fonte: Dados da pesquisa.

Durante o desenvolvimento da atividade, os alunos foram questionados sobre o processo e como eles estavam pensando para reconhecer a figura. De acordo com o estudante Ronaldo, para descobrir a figura, *“você analisa qual é a figura correspondente vindo na mente”*.

Por sua vez, Cecília afirmou que *“dá para montar a figura fisicamente ou mentalmente”*. A ideia de que era possível visualizar a figura mentalmente a partir das características descritas nas cartas é corroborada por Fernando, que disse que as descobria *“montando as figuras mentalmente”*. Por sua vez, Rogério apontou que o uso dos elementos ou partes das figuras também era necessário para reconhecê-las, pois ele o fazia *“contando as faces, as arestas e o vértices e olhando também a sua base”*.

Entretanto, alguns estudantes consideraram difícil identificar as figuras a partir das características citadas nas cartas do jogo, como indicou Rosa: *“eu achei só um pouco difícil no começo porque não estava conseguindo pensar nas formas das figuras”*. A esse respeito, Ana Paula afirmou que: *“a minha dificuldade era só em identificar algumas figuras”*. Por sua vez, Bruna disse *“eu cometi vários erros, pois achei difícil em pensar nos vértices, nas faces e nas arestas, é uma dificuldade minha remontar as figuras”*.

Diante das dificuldades acima listadas, o professor procurou mediar as situações, levando os estudantes a se lembrarem dos conceitos que foram abordados nas atividades anteriores.

Após o jogo, o docente convidou alguns alunos para explicarem aos colegas como fizeram para reconhecerem as figuras, e assim eles puderam compartilhar suas dúvidas e explicar como pensaram para identificar as figuras.

Evidentemente, numa turma de 28 estudantes, espera-se que nem todos avançassem de nível num mesmo momento. Porém de modo geral, foi possível constatar que a maior parte dos alunos não mais dependeram dos objetos que representam as figuras tridimensionais para realizarem suas análises e conseguirem identificar as figuras por suas propriedades, demonstrando terem avançado para o Nível 1.

Considerações finais

Este artigo, recorte de um trabalho de conclusão de curso de especialização, teve como objetivo analisar as contribuições de uma sequência de atividades sobre figuras tridimensionais, baseada no modelo de Van Hiele, junto a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Conforme as premissas teóricas do modelo de Van Hiele, a cada atividade os estudantes foram avançando na elaboração de seus conhecimentos, saindo do Nível 0 (Zero), em direção ao Nível 1. As primeiras cinco atividades foram pensadas para contribuir para que os alunos pudessem, por meio da exploração de desenhos e objetos, desenvolver o pensamento geométrico. Estas experiências foram

importantes para a realização das atividades, nas quais os alunos, em sua maioria, já demonstravam terem adquirido conhecimentos das propriedades básicas dos prismas e das pirâmides. No entanto, é necessário salientar que houve uma grande demanda em relação ao reconhecimento das figuras planas, principalmente sobre a classificação dos polígonos, notadamente no momento em que os alunos estavam jogando Dominó – atividade 5.

Por seu turno, a atividade 6 – “Consolidando conhecimentos” – propiciou aos aprendizes um retrospecto de todo o caminho trilhado, desde o início da sequência de atividades, permitindo a eles, verificarem o quanto avançaram no decorrer das aulas e o refinamento dos conceitos abordados. Além disso, foi possível observar, por meio do jogo “Quem sou eu?”, que a maioria dos estudantes já conseguia identificar prismas e pirâmides, a partir de suas propriedades e a classificar os polígonos de acordo com o número de lados. Pode-se, então observar um alto índice de acertos e de envolvimento dos aprendizes.

Considera-se, portanto, que a partir da construção, manipulação e análise das características dos objetos tridimensionais que representavam prismas e pirâmides, foi possível aos aprendizes avançarem na aprendizagem da Geometria sem a necessidade de aulas meramente expositivas. Neste contexto os alunos assumiram uma postura ativa, e o do professor passou a atuar como um mediador, um questionador, um organizador de ideias.

Outro ponto que merece atenção diz respeito à falta de hábito dos estudantes em registrar, por escrito, suas ideias, suas opiniões, seus achados, posto que esta prática foi introduzida pelo professor somente quando do início da aplicação deste projeto. Assim, foi perceptível a mudança de atitude dos alunos no decorrer do processo, ampliando essa habilidade nos envolvidos.

Concluindo, é possível considerar, diante de todo o exposto, que os estudantes avançaram no aprendizado da Geometria, pois quase todos demonstraram ter aprendido a diferenciar poliedros de corpos redondos, a identificar diferentes tipos de prismas e pirâmides, a identificar vértices, arestas e faces, a relacionar figuras tridimensionais às respectivas planificações. Nota-se ainda que a maioria também conseguiu identificar figuras tridimensionais a partir de suas propriedades. Assim, constatase que a aplicação da sequência de atividades contribuiu para que os estudantes desenvolvessem o pensamento geométrico, conforme os pressupostos do modelo de Van Hiele.

Recebido em: 01/12/2020

Aprovado em: 20/03/2021

Referências

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A Matemática na Educação Básica**. Lisboa: Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação, 1999. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Lurdes_Serrazina/publication/2638. Acesso em: 5 abr. 2020.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica; Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão; Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>>. Acesso em: 06 mar. 2020.

CROWLEY, M. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; S., Alberto P. (Org.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994. p. 1-20. Tradução de Hygino H. Domingues.

EVES, H. **Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria**. São Paulo: Atual, 1992.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A. **Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometria**: El modelo de van Hiele. [S.l.]: S. Llinares and M. V. Sánchez, 1990.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.