emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2021v8i2p92-116

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NOS ANOS INICIAIS DE ESCOLARIZAÇÃO: uma abordagem com materiais didáticos alternativos

COMBINATORIAL REASONING IN THE EARLY YEARS OF SCHOOLING: an approach with alternative teaching materials

Cristiane Macedo Glória[1]

José Messildo Viana Nunes[2]

Guilherme Motta de Moraes[3]

RESUMO

Nossa pesquisa está voltada para a noção de Raciocínio Combinatório que se fundamenta na ideia que os alunos desde os anos iniciais desenvolvem competência e habilidades em resolver problemas relacionados a noções de análise combinatória e não somente no plano cartesiano como é majoritariamente a prática nas escolas do ensino básico. Nosso objetivo foi descrever as ações e narrativas de professores em formação inicial envolvidos em uma oficina cuja temática foi o desenvolvimento de tarefas referentes a Noções de Raciocínio Combinatório utilizando materiais alternativos. A pesquisa é referente a uma das oficinas desenvolvida no projeto Tarefas com materiais didáticos alternativos com abordagem de noções do Raciocínio Combinatório nos Anos Iniciais de Escolarização, no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Federal do Pará, realizado com uma turma da Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens, da Universidade Federal do Pará, do Instituto de Educação Matemática e Ciências, dos quais 29 alunos participara assiduamente das oficinas. Para a realização da oficina, os alunos da licenciatura integrada, foram desenvolvidas ações iniciais centrada na resolução e discussões de 5 tarefas sobre o tema em questão. A intervenção contribuiu para o entendimento de como abordar a noção de Raciocínio Combinatório nos anos iniciais de escolarização, com uso de materiais alternativos como ábaco, material dourado e outros.

Palavras-chave: *Raciocínio combinatório; Materiais alternativos; Anos iniciais.*

ABSTRACT

Our research is focused on the notion of Combinatorial Reasoning which is based on the idea that students since the early years develop competence and skills in solving problems related to notions of combinatorial analysis and not only at the Cartesian level, as it is mostly the practice in teaching of basic schools. Our objective was to describe the actions and narratives of teachers in initial training involved in a workshop whose theme was the development of tasks related to Notions of Combinatory Reasoning using alternative materials. The research refers to one of the workshops developed in the Tasks project with alternative didactic materials with an approach to Combinatorial Reasoning notions in the Early Years of Schooling, within the Institutional Program of Scientific Initiation Scholarships of the Federal University of Pará, carried out with a class from Integrated Degree in Sciences, Mathematics and Languages, from the Federal University of Pará, from the Institute of Mathematical Education and Sciences, of which 29 students had participated assiduously in the workshops. *The intervention contributed to the understanding of how to approach the*

[1]. Aluna do Curso de Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens, Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/UFPA). E-mail: crysbb88@gmail.com.

[2]. Professor do Instituto de Educação Matemática da Universidade Federal do Pará (IEMCI/UFPA). E-mail: messildo@ufpa.br.

[3] Aluno de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática da Universidade Federal do Pará (PPGECM/IEMCI/UFPA). E-mail: guspefis@yahoo.com.br.

notion of Combinational Reasoning in the early years of schooling, using alternative materials such as abacus, golden material and others.

Keywords*: Combinatorial reasoning; Alternative materials; Initial years.*

Introdução

De acordo com Batanero, Ortiz e Serrano (2007), os estudos de Piaget e Inhelder (1951) são os precursores no estudo das etapas de aquisição das ideias de probabilidade e combinatória. Esses estudos indicam que no estágio pré-operacionais (4-7 anos) as crianças não apresentam estratégias combinatórias. No período de operações concretas (7-11) as crianças começam a ser capazes de listar situações combinatórias simples, embora suas estratégias nem sempre conduzam a enumerações completas ou consistentes. Finalmente, na fase de operações formais (a partir dos 12 anos), as crianças progressivamente alcançam a capacidade de enumeração combinatória. Segundo esses autores, um segundo marco desses estudos é encontrado em Fischbein (1975), que está "Interessado não só na formação de conceitos formais, mas pelo aparecimento de intuições primarias sobre conceitos estocásticos, ele também estava preocupado com o efeito da instrução" (BATANERO; ORTIZ; SERRANO, 2007, p. 2).

Nesse sentido, partimos do princípio que os alunos dos anos iniciais desenvolvem competência e habilidades em resolver problemas relacionados a noções de análise combinatória, a partir de ações que requerem uso de Raciocínio Combinatório de forma intuitiva. Assim, buscaremos indícios dessa possibilidade a partir de reflexões de professores em formação inicial sobre tarefas envolvendo a exploração do Raciocínio Combinatório a partir de materiais alternativos para o ensino de noções matemáticas com ábaco, material dourado, etc.

Nos baseamos em Fischbein, Pampu e Minzat (1970), que defendem a possibilidade de as crianças desenvolverem a Noção de Raciocínio Combinatório através de problemas que permitam desenvolver outros mais complexos. Mesmo cientes que as crianças no estágio pré-operatório não apresentam estratégias combinatórias, como descrito nos trabalhos de Piaget e Inhelder (1951), Fischben, Pampu e Minzat (1970) partem do princípio que as crianças nesse estágio podem desenvolver habilidades de combinar e agrupar objetos por critérios como cores, tamanho, espessura e forma, ou seja, adquirem ações que podem integrar a Noções de Raciocínio Combinatório (MORAES, 2016).

Nessa perspectiva, acreditamos que desde os anos iniciais podemos explorar associações progressivas entre variáveis como cores, forma e tamanho, de forma intuitiva e, mais adiante, construir propostas, inicialmente ao acaso, e progressivamente encaminhá-los para formas de combinação elementares, partindo de estratégias de enumeração, agrupamento e combinação, para se construir um formalismo de multiplicação de fatores, produto retangular e combinações entre mais de um fator.

Em relação ao raciocínio combinatório, constatamos em pesquisas, como em Sabo (2010), que muitos professores se preocupam com o "resultado final", deixando de lado os caminhos que o aluno tomou para chegar a tal resultado. Esse ponto é importante a ser destacado, pois ao se trabalhar o Raciocínio Combinatório o resultado final pode ser alcançado por diferentes formas e/ou diferentes caminhos que podem conduzir a diferentes maneiras de aquisição de conhecimentos. Essa perspectiva de um olhar para o processo de construção acarreta um leque de possibilidades de trabalhos em sala de aula, pesquisas sobre o assunto e a compreensão que tarefas envolvendo o Raciocínio Combinatório potencializa o discente e mesmo o docente a reinvestir o aprendizado para outros assuntos ou mesmo para outras áreas do conhecimento. Para provocar a mobilização de conhecimentos referentes a essas habilidades nos anos iniciais há necessidade do encadeamento de tarefas, pois Inhelder e Piaget (1972) mostram que combinações entre fatores ocorrem, de fato, de modo empírico mediante tateio. É somente em outro patamar que as combinações entre os fatores aparecem como sistemáticas, generalização, em um sistema que atinge equilíbrio com sistematizações ainda mais avançadas.

Ainda neste trabalho, os autores apresentam, em linhas gerais, dois tipos de progressão: forma e tratamento, nitidamente pré-operatórias entre as crianças pequenas: a) Na forma, em que já há identificação de alguns fatores e suas relações parciais, os pequenos utilizam por tateio as operações concretas para este fim; b) O tratamento é uma transformação de representação de um sistema, ou seja, o cálculo de combinações possíveis das letras, como por exemplo, o número possível de anagramas é um jogo de palavras que utiliza a reorganização das letras de uma palavra com o intuito de formar outras palavras com ou sem sentido.

A partir do que foi proposto por Inhelder e Piaget (1972), podemos destacar que a capacidade de combinar é uma componente fundamental do raciocínio formal, pois permite identificar o conhecimento matemático, bem como descrever as variáveis que se articulam na construção deste conhecimento, tais como: a relação com o saber; a história de vida de objeto; modelos de práticas de referências, o raciocínio hipotético-dedutivo etc.

As pesquisas supracitadas reforçam a ideia de se trabalhar de forma diferenciada nos anos iniciais de escolarização com diferentes tipos de tarefas que possam desenvolver outras mais complexas, pois nesse nível de desenvolvimento o pensamento lógico matemático é alcançado graças a um processo de transformação de esquemas de ação em noções e em operações, no nosso caso sobre o Raciocínio Combinatório e Operações Combinatórias.

De acordo com Fischbein (1975), as operações combinatórias representam algo muito mais importante do que um ramo da matemática. Representam um esquema tão geral como os esquemas da proporcionalidade ou da correlação, que emergem simultaneamente depois dos 12-13 anos, devido às relações intrínsecas entre a capacidade combinatória e o pensamento logico-matemático. Sendo assim, Fischbein (1975) defende que a capacidade de resolução de problemas combinatórios não pode ser alcançada sem o ensino formal.

Outros estudos são os de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), que evidenciam que, ao se iniciar o trabalho com o Raciocínio Combinatório no Ensino Fundamental, é necessário fazer uso de construções de diferentes agrupamentos, sem necessariamente sistematizar e/ou formalizar o estudo, o que pode facilitar a abordagem da Análise Combinatória ao chegar no ensino médio.

Nessa linha de pensamento, podemos citar Kapur (1970, p. 114) ao afirmar que

> [...] a Combinatória não depende somente de cálculo, por possuir problemas adequados para diferentes graus, os problemas geralmente mais complexos podem ser discutidas pelo professor com os alunos, para que eles descubram a necessidade do Raciocínio Combinatório [...] os problemas podem ser usados para treinar os alunos na enumeração, sequenciação, ordenação, combinações, fazendo conjecturas, generalização ao pensamento sistemático, podendo ajudar no desenvolvimento de muitos conceitos, como o de equivalência, ordem das relações, valor posicional, amostra etc., muitas aplicações em diferentes campos da ciência podem ser apresentadas.

Os estudos realizados por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, (1997) mostra que as grandes dificuldades que os alunos têm na resolução de problemas de Raciocínio Combinatório na escola básica podem ser solucionadas ao se iniciar o trabalho com esse raciocínio desde os anos iniciais de escolarização.

Aqui está a justificativa de se trabalhar com diferentes formas de tarefas, e nesse viés, a necessidade de os professores dos anos iniciais se apropriarem dessas ideias e as difundirem em âmbito escolar, para assim desencadearem propostas que possam ir ao encontro da necessidade do desenvolvimento de Noções de Raciocínio Combinatório desde os anos iniciais.

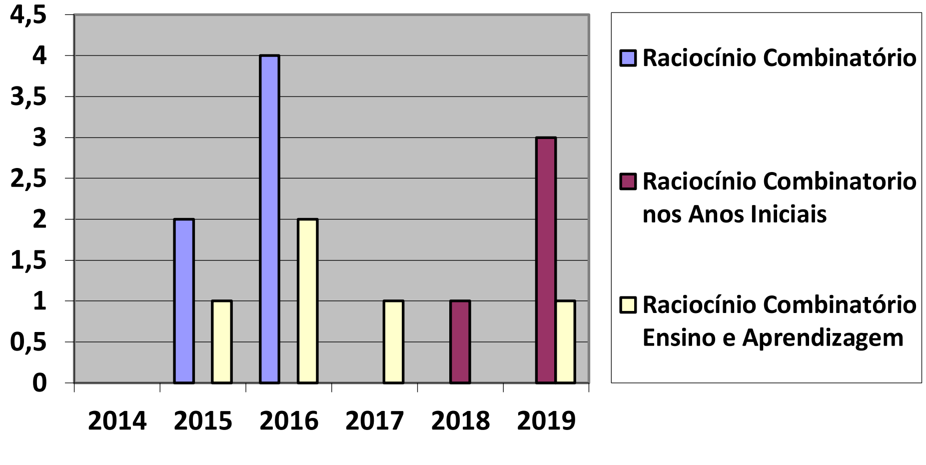
Em consonância com as pesquisas internacionais descritas até o momento, traremos indicações de documentos oficiais do Brasil, como sejam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que ressaltam que os alunos desde muito jovens descobrem espontaneamente procedimentos sistemáticos de enumeração, ordenação, sequência, seriação, classificação, contagem, combinação e algoritmos (BRASIL, 1997; BRASIL, 2017). Nessa perspectiva, o Raciocínio Combinatório desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da compreensão de conceitos matemáticos, por estarem associadas ao princípio fundamental de contagem, as ideias de contagem, a descrições de formação de conjuntos, a descrição de possibilidades, etc.

Nessa perspectiva, nosso objetivo nesse estudo foi descrever as ações e narrativas de professores em formação inicial envolvidos em uma oficina cuja temática foi o desenvolvimento de tarefas referentes a Noções de Raciocínio Combinatório utilizando materiais alternativos e com base nas ideias de autores como Fischbein, Pampu e Minzat (1970), Piaget e Inhelder (1971), Fischbein (1975), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) e Moraes (2016).

Revisão Bibliográfica

Numa busca por pesquisas nacionais de 2014 a 2019 no portal de periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelos termos: *Raciocínio Combinatório, Raciocínio Combinatório nos Anos Iniciais e Raciocínio Combinatório ensino e aprendizagem* encontramos 15 artigos (Figura 1).

Figura 1 - Total de artigos por termo.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Através dos termos Raciocínio Combinatório, Raciocínio Combinatório nos Anos Iniciais e Raciocínio Combinatório ensino e aprendizagem obte-se no total 15 artigos, dos quais 07 apresentam de fato discussões sobre o Raciocínio Combinatório nos anos inicias.

No artigo de Silva e Pessoa (2015), de título *A Combinatória: Estado da Arte em Anais de Eventos Científicos Nacionais e Internacionais ocorridos no Brasil de 2009 a 2013*. Em seu estudo, as autoras perceberam um número considerável de publicações que tratam desta área, em especial o de sondagem (que está relacionado ao conhecimento prévio dos alunos), além do fato de que os alunos desde pequenos são capazes de desenvolver o raciocínio combinatório. As autoras destacam ainda a necessidade de formação continuada dos professores que abordem temas relacionados a combinatória, os cuidados na elaboração de livros didáticos, os quais carecem de mais aprofundamento no que diz respeito aos problemas combinatórios, assim como a orientação ao docente no auxílio de ferramentas tecnológicas e principalmente levar em consideração os métodos desenvolvidos pelos discentes.

No artigo de Borba, Rocha e Azevedo (2015), com o título *Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica*, trata-se uma pesquisa realizada por um grupo de estudos da Universidade Federal de Pernambuco. Nos estudos desenvolvidos pelas autoras, ferramentas são verificadas, recursos didáticos são apresentados e debatidos, os resultados da pesquisa realizada com alunos de diferentes níveis de ensino são analisados e discutidos. Os resultados conjuntos proporcionam observações sobre como o Raciocínio Combinatório se desdobra, quais são as dificuldades a serem superadas e como as práticas podem ser mais decisivas no processo de ensino da Combinatória.

Por sua vez, Nóbrega e Spinillo (2016), no artigo *A Noção de Possível na Probabilidade e na Combinatória em Estudantes do Ensino Fundamental*, analisam a "concepção do possível" no campo do conhecimento matemático a partir de conhecimentos prévios dos alunos em relação à probabilidade e combinatória. O estudo foi desenvolvido com estudantes do último ano da educação infantil ao quinto ano do ensino fundamental. Os alunos foram entrevistados separadamente com o objetivo de responder questões relacionadas a probabilidade, referentes a noção de chance e a combinatória envolvendo exclusivamente problemas de produto cartesiano. Nas resoluções os discentes tinham que explicar as estratégias que utilizaram para resolver os problemas.

Os resultados revelaram que mesmo os alunos mais novos possuíam ideia sobre o "possível", através das noções de probabilidade e combinatória, mesmo que esses alunos ainda não consigam sistematizar a resolução dos problemas. Os autores ressaltam ainda que os alunos até o terceiro ano do ensino fundamental, apresentam uma estabilidade na compreensão de conceitos ligados a noção de probabilidade e combinatória e até o quinto ano do ensino fundamental a constroem habilidades e competências referentes a concepções de "chance".

Já em relação ao raciocínio combinatório, o desenvolvimento foi menos notório, sendo, portanto, constatado que o conceito de "possível" não é uma noção unilateral, mas sim um envolvimento com diferentes especificidades de conhecimento matemático.

Já em Spinillo e Silva (2016), no artigo *Alternativas para Desenvolver Formas Apropriadas de Resolução de Problemas de Produto Cartesiano*, se refere a um estudo que se sucede a partir de uma investigação em relação aos resultados de pesquisas aplicadas com crianças, no qual se discutem caminhos para desenvolver maneiras apropriadas de resolução de problemas que envolvem o Raciocínio Combinatório. Inicialmente foram constatadas as dificuldades dos alunos em resolver problemas, principalmente que envolviam o plano cartesiano. Em seguida são apresentadas as possibilidades do raciocínio infantil, para assim encaminhar para os alunos dos anos iniciais do ensino fundamental, sendo debatidas e demonstradas as estratégias que as crianças desenvolveram ao solucionar problemas de produto cartesiano.

As autoras destacam ainda a importância de mostrar para os discentes conceitos básicos que envolvem o Raciocínio Combinatório, principalmente a relação “um para muitos”, que se refere a um princípio de correspondência multiplicativa onde um elemento se relaciona com vários outros. E, por fim, são apresentadas implicações pedagógicas, ligadas aos ajustes didáticos, em situações de ensino, capazes de propiciar formas de raciocinar, com intuito de promover o Raciocínio Combinatório desde os anos iniciais de escolarização.

No artigo de título, *Os Princípios Invariantes e a Resolução de Problemas de Raciocínio Combinatório,* Melo, Silva, Spinillo (2016) investigaram se existem evidências de que os princípios invariantes, que podem ser entendidos como a forma com que se apresentam enunciados de questões do Raciocínio Combinatório, podem ter um efeito que favoreça ou não a resolução de problemas de produto cartesiano e questões de combinação.

Esse estudo foi realizado com 60 alunos dos anos iniciais do primeiro ciclo de alfabetização, crianças do 3° ano com faixa etária, em média, de oito anos de idade de instituições de ensino particular de Recife. Durante a aplicação das atividades foi solicitado que os alunos resolvessem problemas de produto cartesiano e combinatória presentes em duas situações: na primeira o enunciado não explicava como os alunos deveriam resolver os problemas e na segunda o enunciado da questão explicava como deveria ser resolvido.

Os resultados mostraram que problemas de produto cartesiano são melhor compreendidos pelos alunos do que problemas de combinatória. As autoras perceberam que as explicações dos invariantes nas tarefas de produtos cartesianos contribuíram para a resolução de problemas de produto cartesiano, porém o mesmo não aconteceu nos problemas de combinação.

Pereira e Curi (2016) no artigo *Problemas que Envolvem Relação Entre Dois ou Mais Conjuntos no Âmbito do Raciocínio Combinatório* tiveram como finalidade apresentar propostas de melhorias da aprendizagem de alunos do quinto ano de uma instituição pública estadual, quando perpassam por situações-problema que se referiam a contextualização de uma tarefa, utilizando sequências de atividades que tinham como propósito identificar como as crianças transitam por situações de natureza combinatória, o resultado desta investigação circundam o raciocínio combinatório. Para isso, foram realizadas sequências de atividades que possibilitaram identificar como as crianças desenvolviam os problemas, tendo os autores apresentado propostas de resolução direta, sem o auxílio do professor, de resolução inversa, com o auxílio do professor, resolução direta com três ações distintas ainda não trabalhadas e por fim a resolução de um problema na forma de tabela, também não trabalhado, para promover o progresso na qualidade de suas respostas.

No artigo de Santos e Merlini (2018), com o título *Situações-problema, elaboradas por professores dos anos iniciais*, foram comparadas situações-problema de combinatória desenvolvidas por docentes dos anos iniciais antes e depois de uma formação continuada.Esta pesquisa está embasada no campo conceitual multiplicativo de Vergnaud, que se refere às estratégias de resolução de problemas, de acordo com suas experiências anteriores, dentro ou fora da escola, no qual os alunos recorrem inicialmente a um repertório que já possuem, ou caso não tenham as experiências necessárias são estimulados a refletir sobre como resolver o problema. Este trabalho está em consonância com conjuntamente com as ideias do profissional reflexivo apontadas por Schõn, que podemos entender como as reflexões que temos sobre as nossas ações (antes, durante e depois que agimos, de acordo com o resultado obtido).

Na análise de dados foi possível compreender que mesmo depois da formação continuada verificou-se êxito em um número limitado de situações-problema de combinatória. Entretanto, na segunda elaboração, os docentes contemplaram as duas possíveis situações-problema, sejam problemas envolvendo a noção de parte-parte, ou situações-problema em que são dados dois conjuntos e se espera encontrar o todo e a de parte-todo, que refere-se ao fato de que a situação oferece ao aluno o todo e uma das partes e pede-se para que os mesmos encontrem a outra parte.

As análises dos artigos demonstram que a maioria das pesquisas utilizam os conhecimentos prévios dos alunos e, através de sondagens, procurou-se conhecer a influência desses conhecimentos nas estratégias de resolução das questões. Várias foram as ferramentas utilizadas pelos autores para abordar os diversos temas do Raciocínio Combinatório, entre elas, testes, sondagens, entrevistas, etc. Alguns autores abordam de forma direta o tema raciocínio combinatório, enquanto outros abordam subtemas do raciocínio combinatório, como o princípio aditivo, o princípio multiplicativo, situações-problema, combinatória e probabilidade.

Alguns autores constataram que trabalhar o tema raciocínio combinatório desde dos anos iniciais se torna importante, na medida em que o processo de aprendizagem dos alunos é facilitado durante as resoluções dos problemas. Outros consideram que existem grandes dificuldades dos professores em abordar os temas relacionados ao raciocínio combinatório, sendo que a formação nesses casos é fundamental para que o professor possa aplicar as atividades com segurança e com um conhecimento suficiente para facilitar a compreensão dos alunos. Além disso, foi destacado que o livro didático é uma das ferramentas que auxiliam no processo de ensino e aprendizagem, porém, ainda abordam os temas do raciocínio combinatório de forma indireta, não aprofundando os temas, o que contribui para que o professor tenha dificuldades de aplicar os conceitos.

Assim, dos artigos analisados, evidenciamos que os alunos são capazes de entender, elaborar estratégias, resolver questões de raciocínio combinatório desde muito cedo, mesmo que não consigam sistematizar os conceitos de forma organizada. Os estudos revelam que as dificuldades enfrentadas tanto pelos professores quanto pelos alunos, referentes aos temas do raciocínio combinatório, podem ser superadas desde que seja implementada a formação continuada dos professores, para que os mesmos tenham as competências necessárias para trabalhar os temas e que levem também em consideração as estratégias que os alunos desenvolvem para resolver as questões, e para que esse conhecimento possa auxiliar em novas abordagens do tema.

A partir dessas indicações elaborámos uma oficina para abordar o Raciocínio Combinatório com professores em formação para os anos inicias fazendo uso de materiais alternativos que podem auxiliar no desenvolvimento das próprias estratégias de resolução de problemas, e da manipulação desses materiais que complementam as percepções, estratégias, metodologias.

Metodologia

A pesquisa foi desenvolvida com uma turma da Licenciatura Integrada em Educação em Ciências, Matemática e Linguagens[4] do Instituto de Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (LIEMCI-IEMCI-UFPA), no Laboratório de Ensino, pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática (LABEMAT-IEMCI-UFPA) no decorrer de uma oficina ofertada para 29 alunos do curso. Para o desenvolvimento das ações, os alunos colaboradores desta pesquisa se organizaram em duplas e uma equipe em trio (denominaremos as equipes por letras do alfabeto: A, B, C,...). Os encontros foram gravados com câmera de filmagem perfazendo seis horas de filmagens, feitas em dois períodos, nos dias 17 e 24 de junho 2019. A oficina foi aplicada por três formadores (aluna do LIEMCI bolsista do PIBIC proponente da pesquisa, aluno de doutorado que auxiliou a bolsista desde o planejamento até a execução e o professor orientador da pesquisa), aqui identificados como formadores 1, 2 e 3 respectivamente. Neste relato faremos recortes que nos possibilitem explicitar as estratégias dos professores em formação no enfrentamento das tarefas,

[4] Curso com formação geral que visa promover iniciação acadêmica e científica aos futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental, mediante a abordagem interdisciplinar de questões abrangentes e fundamentais de conhecimento científico e social.

assim como suas reflexões a respeito do desenvolvimento de tarefas desse tipo com alunos dos anos iniciais de escolarização.

As tarefas foram inspiradas nas pesquisas de Fischbein (1975) tendo como tema central “O Raciocínio Combinatório nos Anos Iniciais de Escolarização”, em volta de outras competências e habilidades que estão presentes nas diretrizes curriculares nacionais, nos documentos oficiais e nos livros didáticos (BRASIL, 1997; BRASIL, 2017). Além disso, as tarefas tinham como finalidade evidenciar problemas de raciocínio combinatório que não priorizam o uso de fórmulas ou algoritmos, mas sim as mais variadas estratégias elaboradas pelos alunos colaboradores, dito de outra forma, o foco é o processo de resolução.

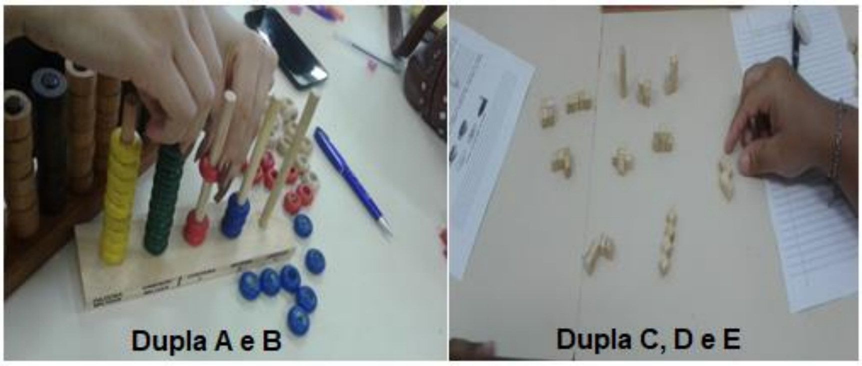
Organizamos uma sequência com cinco tarefas buscando favorecer a mobilização de conhecimentos referentes à análise e interpretação de dados, inferências sobre dados aleatórios e raciocínio combinatório. Destas tarefas, as duas primeiras dependiam do uso de recursos alternativos como ábaco (aberto e/ou fechado), blocos lógicos, material dourado, trieto, tangran, dentre outros recursos disponibilizados no laboratório, que entendemos pertinentes para contribuir para o desenvolvimento da percepção dos professores em formação no desenvolvimento de habilidades de coordenação, de construção de possibilidades, de ordenação, de formalização, de tratamento e também na produção, comunicação e inferência dos resultados obtidos. A terceira e a quarta tarefas, sem uso do material, serviram para tentarmos compreender até que ponto o uso de recursos se faz necessário ou pode favorecer o raciocínio requerido nas referidas tarefas. A quinta tarefa com o propósito de se alcançar um formalismo, para além da simples resolução de tarefas, buscamos que os professores em formação explicitassem reflexões a respeito de como desenvolver esse tipo de ação em sala de aula dos anos iniciais e como os alunos e poderiam se apropriar de saberes a partir desse tipo de ação.

Resultados

Descrição da tarefa 1: A primeira tarefa teve como objetivo explorar a composição de um número inteiro positivo como uma estratégia para ensinar elementos básicos de raciocínio combinatório, nesse caso agrupamentos, ordenação, sequência e composição.

Tarefa 1: Escolha um número inteiro positivo, o qual pode ser considerado como a soma de certos números inteiros. Então escreva as composições (formações) desse número escolhido, utilizando como suporte os materiais alternativos dispostos na bancada (Figuras 1).

Figura 1 – Manipulação do ábaco e do material dourado



Fonte: Dados da pesquisa

Desenvolvimento da tarefa 1: A maioria dos professores em formação apresentou uma maneira de fazer associada ao ábaco aberto (dupla A e B), enquanto as duplas C, D e E utilizaram o material dourado para decompor um determinado número e escrever as formações possíveis a partir de agrupamentos, ordenações, contagens, combinações e composições.

A dupla A com a utilização do ábaco aberta, figura 1, explica como construiria a composição de um número natural qualquer, a partir das noções contidas no ábaco, partindo da explanação da ideia de unidade, dezena, centena, unidade de milhar e dezena de milhar, para enfim, construir as composições do número escolhido, como pode ser percebido na transcrição a seguir,

Componente da dupla A: *Eu comecei explicando assim porque não quis já falar de dezena e unidade justamente por eles (alunos dos anos iniciais), talvez, não entenderem o que é. Explicar primeiramente o que é unidade, o que é dezena e centena daria formação 10, e também que o amarelo é unidade, o vermelho é dezena, um exemplo que estou botando, assim mesmo seria o azul pro aluno ter essa visão de como ele vai formar, pro aluno não começar a colocar um amontoado de peças e não saber distinguir depois, quer dizer que cada um desse vale 1 e cada um deste vale 10, cada 10 unidades do amarelinho valerá o núcleo da redondinha azul, a cor é bem relativa no caso do Ábaco dela (colega de grupo) é amarelo e o meu vermelho, ela atribui a unidade ao amarelo só que pro aluno a gente não usaria como cor porque pode ser diferente. No caso eu usei um número bem pequeno, usei o 30 quer dizer que cada uma dessa vale 10 duas dessa contei 20 se eu colocar 3 vou ter 30, no caso vou ter 10 unidades e 2 dezenas. Eu posso colocar 3 fileiras dessa daqui 30 unidade, 1 dezenas e 20 unidades ou então eu posso pegar 6 de cada cor para forma o trinta ou então eu colocaria mais uma cor aqui e diminuiria e ia decompondo.*

A dubla B, também com a utilização do ábaco aberto, figura 1, utilizou o mesmo para compor o número escolhido com as peças do ábaco, partindo da ideia de unidade com a utilização dos pinos em cada haste para compor diferentes agrupamentos para formar o número escolhido, como pode ser observado na transcrição a seguir

Componente da dupla B*: a gente escolheu o número 20, a gente fez a soma, procurou várias formas de escrever esse número 20, a gente viu que, 10 + 10 também dá 20, 5 + 5 +5 + 5 também dá 20 e assim vai, a gente fez de 10 de 5 fez de 4 fez de 2 e chegamos de 1 em 1 a gente descobriu 5 combinações para escrever o número 20 só com soma de números iguais, a gente pode trazer o material para a criança e ir construído de 4 em 4 de 5 em 5 ou uma coluna de 10, de 15 + 5 também daria 20 ou 16 mais 4 também daria N possibilidades.*

O resultado encontrado pelas duplas A e B podem ser compreendidos da seguinte forma: os professores em formação inicial fundamentaram suas estratégias na organização de cores, com a base sendo o verde, representando as unidades, o laranja as dezenas, o azul as centenas, o amarelo as unidades de milhar e o vermelho as dezenas de milhar. A técnica associada ao material escolhido está limitada pela decomposição de um determinado número no ábaco aberto, donde identificamos que nas unidades o limite da técnica vai até o número10, pelo fato de o ábaco ter 10 peças em cada coluna, na casa das dezenas o limite da técnica vai até o número 100, na casa das centenas até o número 1000, na casa das unidades de milhar até o número 10000 e, por fim, na casa das dezenas de milhar o limite da técnica vai até o número 100000. Sendo assim, a técnica utilizada foi a construção da combinação de cores com a base de cada número associada as unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar e dezenas de milhar para se codificar a composição de cada número, o que justifica e fundamenta essa técnica associada na tarefa 1, e que são noções do campo da Aritmética e Álgebra. Na realização da tarefa, os futuros professores fizeram escolhas de materiais e técnicas refletindo sobre as dificuldades e possíveis procedimentos que poderiam ser usadas por alunos dos anos inicias a partir de conhecimentos que, possivelmente, podem mobilizar sobre o assunto tratado.

Ao examinarmos as construções encontramos a dialética entre os possíveis e os necessários na elaboração de um conhecimento novo. Os discentes nos oferecem indicadores importantes sobre compreensão das múltiplas possibilidades de alcançar a formação de um número inteiro, seja pela adição ou pela composição utilizando o ábaco e/ou o material dourado. Embora sejam resultados que não são referentes à multiplicação, que envolve produto cartesiano, eles mostram o papel organizador de composições de ajustamentos ou correspondência, ou seja, um para muitos, buscados pelos sujeitos, continuamente, nos diversos momentos da tarefa.

Desta forma, as correspondências permitem a progressiva coordenação de variáveis por associatividade, até chegar-se ao caráter formal da enumeração, da ordenação, da contagem, dos agrupamentos que exigem a noção de Raciocínio Combinatório. Portanto, são resultados que reforçam a ideia da importância de se trabalhar tarefas com materiais didáticos alternativos. Sendo assim, a formalização nos mostra que as crianças, nos anos iniciais do ensino fundamental, necessitam mobilizar saberes relacionando conceitos de adição, multiplicação, contagem relativamente complexa, como as de teoria de conjunto e que são resultados que evidenciam a importância da noção de Raciocínio Combinatório. Portanto, a partir dos resultados da tarefa podemos inferir que as técnicas combinatórias devem fazer parte do rol de conhecimentos do professor dos anos iniciais, pois os alunos necessitam vivenciar situações que favoreçam a apropriação de técnicas combinatórias recorrendo a recursos disponíveis na escola.

A dupla C, partiu para a utilização do material dourado, para compor o número quatro, com a utilização da medida de unidade, caracterizada pelos cubinhos do material, descritas abaixo,
Componente dupla C*: O número escolhido foi o número 4 para representar o princípio de contagem para mostrar primeiramente qual a possibilidade de combinações que a criança teria na decomposição do número 4 como unidade, quais são as formas que eles usariam para somar de N formas diferentes, aí no caso a criança mostraria através das possíveis decomposições e chegaria ao número, 1+1+1+1, 4 vezes que resultaria no número inteiro 4, 2+2, 1+3, 1+1+2 tudo demonstraria a mesma decomposição do número 4. Para ter certeza fomos na fórmula para comprovar e a fórmula que eu utilizei foi de combinação para poder embasar as repetições para chegar na mesma base de raciocínio.*

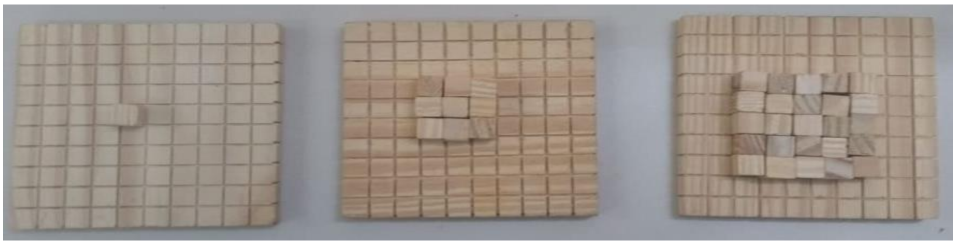
O resultado encontrado pela dupla C pode ser compreendido da seguinte forma: será construído através da organização de unidades baseado na representação das unidades do cubinho no material dourado, das dezenas, das centenas, da unidade de milhar. A técnica associada apresenta um limite de composição, pois para representar um determinado número no material dourado, temos que observar o limite das unidades, pelo motivo do material dourado ter 1000 peças que representam as unidades, 100 peças na casa das dezenas, 10 peças na casa das centenas e uma peça na casa do milhar. Dessa forma, o limite da técnica vai até o número 10 nas unidades, na casa das dezenas até o limite de 100 e na casa das centenas o limite da técnica vai até o número 1000. Sendo assim, a técnica utilizada foi a construção da combinação associada às unidades, dezenas, centenas, para se chegar à composição de cada número, que se justifica e fundamenta em noções do campo da Aritmética e da Álgebra.

Descrição da tarefa 2: A segunda tarefa teve como objetivo explorar o crescimento polinomial de uma forma quadrada como estratégia para ensinar elementos básicos de raciocínio combinatório, nesse caso crescimento, agrupamentos, ordenação e composição.

Tarefa 2: Deixe uma forma quadrada crescer no plano adicionando uma célula do mesmo formato e do mesmo tamanho para qualquer um dos seus lados e escrevas as composições polinomiais para as primeiras três formas quadradas.

Desenvolvimento da tarefa 2: A maioria dos discentes apresentou uma maneira de fazer associada ao material dourado para construir a composição de um determinado número e escrever as formações possíveis a partir do crescimento polinomial utilizando os agrupamentos, as combinações e composições possíveis por intermédio do cubinho e da placa do material dourado dado pela figura 02, descritos pela dupla A.

Figura 2 - Construção do Crescimento Polinomial descrito pela dupla A



Fonte: Dados da pesquisa

A dupla A, com a utilização de dois componentes do material dourado, os cubinhos e a placa, construíram um crescimento polinomial descrito pela figura 2 e transcritos a seguir,

***Componente da dupla A**: Na questão se pede que num plano cresça para os lados a gente escolheu células e nessa célula agente fez assim, a gente escolheu o número 4, a partir desse número a gente achou as posições para formar uma base quadrada, a gente encontrou as possibilidades, a gente fez a demonstração com essas peças e encontramos 11 possibilidades, mais especificamos essas aqui (demonstração com o material dourado), escolhemos 3, sempre numa base quadrada, a gente pegou a base como exemplo (placa de centena do material dourado) a gente encontrou na diagonal vários tipos e também encontramos na vertical e na horizontal. A primeira foi essa aqui (indica no material), um segmento de reta, essa diagonal e o quadrado e a partir daí agente foi brincado até achar outras formas e a gente achou as 11 foram as únicas, eu não afirmo que seja só essas formas de crescimento, mas foram só essas que encontrei.*

O professor formador 2, fez algumas indagações, dentre elas, qual seria o número máximo descrito pelo crescimento polinomial, associada a placa utilizada do material dourado? Com o intuito de saber até que ponto a dupla estão compreendendo a sua construção na resolução da tarefa.

Professor formador 2: *11 é o número máximo de crescimento polinomial com uma base quadrada com quatros peças?*

Como resposta, a dupla A não soube informa com a devida exatidão o conjunto do crescimento polinomial, mas consegui construir diferentes formas polinomiais quadradas com a utilização da placa e das unidades do material dourado. Como pode ser transcrito a seguir,

Componente da dupla A: *não podemos afirmar que exista só esse crescimento, mas foi o que encontramos.*

O resultado encontrado pela dupla “A” pode ser compreendido da seguinte forma: foi construído por meio da organização de unidades baseado na representação das unidades do cubinho no material dourado e por intermédio da placa do material dourado para se fazer a representação do crescimento de uma célula quadrada. A técnica associada está no limite de composição de um determinado número no material dourado, tendo que se observar que a técnica vai até o limite das unidades da placa, pelo motivo de no material dourado a placa ser uma peça que representa as 100 unidades. Sendo assim, a técnica utilizada foi a construção das composições associadas as unidades e a placa das centenas, para se chegar ao crescimento polinomial de uma forma quadrada, cuja justificativa está associada a noções do campo da Aritmética e Álgebra.

Desta forma, as correspondências permitem a progressiva coordenação de variáveis por associatividade, até chegar-se ao caráter formal da multiplicação, que a noção de Raciocínio Combinatório requer. Portanto, a partir dos resultados da tarefa, podemos inferir que as técnicas combinatórias devem ser exploradas com professores em formação para, depois, as poderem trabalhar nos anos iniciais. Adicionalmente, espera-se que os futuros professores desenvolvam tarefas com uso de recursos que favoreçam a compreensão desse tipo de raciocínio, pois são materiais disponíveis na escola e, no caso da não disponibilidade, outros materiais podem ser usados, como tampas de garrafas, para desenvolver situações similares.

A dupla E, com a utilização das peças dos cubinhos, do material dourado, deixaram crescer uma unidade, acrescentando em cada lado uma nova peça, até compor um novo quadrado, construindo assim, um crescimento polinomial, descrito pela transcrição a seguir,

Componente da dupla E: *Nossa equipe, a princípio pensamos bastante conforme o enunciado aqui da questão eu não sei se está certo ou errado, aí diz assim: deixa uma forma quadrada crescer no plano adicionando uma célula, nós montamos uma forma quadrada na mesma célula, formato do mesmo tamanho para qualquer uns dos lados, aí nós pensamos assim, nós tivemos um outro entendimento não sei se está certo ou errado, então nós formamos aqui ó outro (demonstração com o material)! Nos utilizamos o material dourado, aí nós formamos outro quadrado com a mesmo tamanho da mesma peça. O que fez crescer as laterais dele para qualquer um dos seus lados e escrever as composições, aí nós fizemos a mesma coisa como pede 3 formas quadradas fizemos mais uma forma dentro dela aí apresentamos novamente, vamos primeiro colocar no cento para não se perder! (o material alternativo) vamos preenchendo outra forma quadrada 1, 2, 3, 4, 5 nós fizemos e fomos adicionando outro formato quadrada com as mesmas peças.*

O professor formador 1, fez algumas indagações, dentre elas, se a dupla consegui verificar algum padrão na construção polinomial? Com o intuito de saber até que ponto a dupla estão compreendendo a sua construção na resolução da tarefa.

Professor formador 1: *você percebeu outro padrão quando fez crescer essa peça?*

Tendo como resposta positiva, sim, pois a dupla consegui perceber o crescimento polinomial, pela adição e soma da mesma quantidade de peças para construir um novo polinômio. Isso indica que a tarefa foi importante, pois cabe destacar que é necessário que o professor se aproprie desses princípios para fazer as intervenções adequadas na resolução desse tipo de problema.

Componente da dupla A: *sim, vai crescendo de 8 em 8 (mostra o caderno) nós usamos primeiro uma peça e depois mais 8 e depois 16 e assim foi sucessivamente.*

Descrição da tarefa 3 e 4: A terceira e a quarta tarefas tiveram como objetivo explorar combinações possíveis como estratégia para ensinar elementos básicos do raciocínio combinatório, nesse caso agrupamentos, combinações para se chegar ao princípio fundamental da contagem. As figuras 3 e 4, representam as construções feitas pelos alunos na oficina para a terceira e quarta tarefa, respectivamente.

Tarefa 03: Quantas combinações diferentes podem ser realizadas, usando uma dessas xícaras e um desses pires da figura a seguir? (Figura 3).

Figura 3 – Tarefa 3

Fonte: Autores

Tarefa 04: Para fazer sanduíches, uma casa de lanches tem 2 tipos de pão e 4 tipos de recheios. Quantos sanduíches diferentes essa casa de lanches vende, combinando 1 tipo de pão e 1 tipo de recheio?

Desenvolvimento da tarefa 03 e 04: A maioria dos discentes apresentou uma maneira de fazer associada ao ábaco aberto para construir as combinações possíveis por intermédio das cores das peças do ábaco, tanto para a terceira quanto para a quarta tarefa, descritos pelas duplas A, F e G.

A dupla F, com a utilização do ábaco aberto, as hastes e as peças, construíram um conjunto de possibilidades de agrupamentos e contagens, para que os alunos possam construir as possíveis combinações, deixaram o aluno acrescentando em cada haste uma nova peça, até compor uma nova possibilidade, construindo assim, os agrupamentos possíveis, transcrição a seguir,

Componente da dupla F: *na questão 3 que é das xícaras e dos pires, a gente utilizou o ábaco aberto e representou os pires e as xícaras, a cor se nós formos utilizar com os alunos eles iriam escolher a cor que eles iriam manusear, aqui são as combinamos possíveis das xícaras com os pires, ficaria essas combinações ficaria 6 combinações possíveis.* (Figura 4).

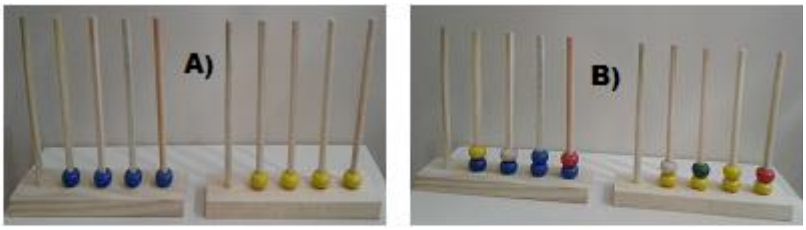
Figura 4 - **A)** Cada peça caracteriza um pires; **B)** Combinações caracterizando os pires e as xícaras

Fonte: Dados da pesquisa

Da mesma forma que a dupla F, a dupla G, com a utilização do ábaco aberto, as hastes e as peças, construiu um conjunto de possibilidades de agrupamentos e contagens, para que os alunos possam construir as possíveis combinações, deixaram o aluno acrescentando em cada haste uma nova peça, até compor uma nova possibilidade, construindo assim, os agrupamentos possíveis, transcrição a seguir,

Componente da dupla G: *Essa questão aqui dos sabores dos sanduiches, eu coloquei cada pecinha de cada cor para representar os sabores, esse amarelo e azul (se referindo a peça do ábaco), vão representa os 2 tipos de pães eu coloque aqui (ábaco) esse aqui pão e sabor, pão e sabor e assim vai, eu fiz assim ,e esses aqui são os outros, estão aqui (se referindo as peças na mesa) eu fiz 4 jeito de fazer, esse é o pão de batata, com 4 sabores eu coloquei requeijão, queijo, cheda, presunto, como se cada negócio desse (peça do ábaco) fosse um recheio então esse pão com quatro recheio e esse outro aqui é só um outro recheio entendeu? Eu só não sei se ele fica coerente, não usei o ábaco com a função dele mesmo, eu usei ele para fazer uma representação dessa atividade aqui, olha cada um desse azul (peça do ábaco) é um tipo de pão e o amarelo que estão entre eles é o tipo de recheio, 4 recheios para dois tipos de pães deram 8 combinações, olha 1,2 3,4, 5,6,7,8 (fazendo as contagens no eixo vertical do ábaco).*

Figura 04 **- A)** Imagens caracterizando os pães; **B)** Imagens caracterizando os pães e recheios



Fonte: Dados da pesquisa

Os resultados encontrados pelas duplas F e G podem ser compreendidos da seguinte forma: foram construídas por meio da organização das cores do ábaco aberto, por intermédio das cores para se fazer a representação das combinações possíveis. A técnica associada está no limite das composições das cores, tendo que se observar no limite das unidades que a técnica vai até o limite de dez cores, pelo motivo de cada haste ter dez peças. Sendo assim, a técnica utilizada foi a construção das composições associadas as unidades, para se chegar as combinações possíveis e a justificativa se fundamenta no campo da Aritmética e da Álgebra.

Tarefa 05: Veja todas as adições de dois números naturais que têm soma 3.

0+3	1+2	2+1	3+0

a) Escreva todas as adições de dois números naturais que tenham a soma 3.

b) Escreva todas as adições que têm soma 8.

Desenvolvimento da tarefa 05: as duplas conseguiram compreender na resolução da tarefa que pela decomposição dos números poderiam chegar ao mesmo resultado na soma de dois números, independente da ordem desses números. A maioria das duplas consideraram a questão a) e b) mais fácil de resolver, e também conseguiram associar as questões anteriores a essa questão da tarefa 05, ou seja, perceberam que existe uma sequência nas atividades propostas.

A dupla E, consegui compreender a construção da sequência de tarefas para se chegar a tarefa 5, essa construção compõem um conjunto de tarefas para se obter a noção de raciocínio combinatório, associadas com a utilização de materiais alternativas na sua composição.

Componente da dupla E (ábaco aberto): *a letra a) e a letra b) são bem simples na forma de decomposição dos números, a questão do máximo aqui é bem simples utilizar com eles (refere-se aos alunos dos anos iniciais) qualquer tipo de material jogando aqui, a representação de uma peça seria pegar por exemplo, a quantidade do número 3 e esse número 3 a gente tem que representar o número 5 poderia ser feito a soma de números diferentes para chegar em vários tipos de composições para chegar no número 5, exceto no material aqui, era eu pegar por exemplo 0+5 como a gente representaria o 0? Nenhum + 5?*

É importante destacar que a dupla E, encontrou um obstáculo didático para a utilização do material alternativo, para se construir o número zero, mas independentemente dessa dificuldade consegui compreender a justificativa de ser das tarefas desenvolvidas na oficina.

Professor formador: *Então você encontrou um obstáculo para se trabalhar com material no caso, representar o 0.*

A dupla E, propõem também uma possível solução para o obstáculo didática, para a construção do zero, a partir da composição e decomposição de um número qualquer, até a sua compreensão.

Componente da dupla E (ábaco aberto): *A gente poderia representar uma outra peça que pudesse dar esse exemplo para poder eliminar essa barreira. Através dela vai brincando, e elimina essa barreira para a criança chegar a somar 0 como resultado, olha esse aqui é o 0! Então a gente vai até na hora de decompor. Aqui a gente vai explicando também a questão daquelas noções de número repetido como 1 + 4, vai se resulta em 5 assim como 4+1, já vai entender se fosse uma combinação, qual seria diferença no caso dele combinar do jeito mais possível sem ficar repetido na questão da posição representa o mesmo valor. A mesma coisa foi do 8, aí poderia compor vários números de uma forma tanto desse material, como também a questão das cores que acho que deve ser até melhor, que aí formava os números maiores, ou seja, as cores poderiam dá o nome.*

Evidenciamos que as tarefas potencializam desdobramentos como exploração das propriedades de inteiros e a complexidade da representação do zero que é histórica, como na numeração egípcia que em decorrência de não ser posicional e apresentar valores fixos não necessitava do algarismo zero. Ou como no sistema grego, que na representação dos números não apresentava referência a quantidade e como utilizavam o princípio aditivo, não havia necessidade da presença do algarismo zero. No sistema de numeração romano se utilizava letras relacionadas a quantidades, numa organização por agrupamentos (5 era representado por V, 10 por X, etc.), também faziam uso do princípio aditivo e não precisavam do algarismo zero. Ou seja, a representação “do algarismo zero para a constituição dos números só é necessária quando se fala de um sistema de numeração posicional, característica essa que não aparece nos sistemas egípcio, grego e romano” (GUIMARÃES, 2008, p. 37).

No sistema de numeração babilônico, inicialmente deixavam-se espaço(s) entre as posições para indicar o(s) zero(s). Segundo Seife (2001), posteriormente os Babilônios passaram a representar o algarismo zero como duas cunhas inclinadas . Fato importante nessa pesquisa, uma vez que os alunos propuseram uma representação para o zero no material utilizado. Nesse sentido, vale destacar que os Maias representavam o zero a partir de uma forma semelhante a uma concha ou uma casinha de caracol (IFRAH, 1999).

A dupla B, assim como a dupla E, também consegui compreender a construção da sequência de tarefas para se chegar a tarefa 5, essa construção compõem um conjunto de tarefas para se obter a noção de raciocínio combinatório, associadas com a utilização de materiais alternativas na sua composição.

Componente da dupla B: *Aqui estamos dando o exemplo do número 3. Escolhemos o 5, 2 +3, 4 +1, 0 +5, 3 +2, 1 +4, 5 +0, porque a ordem dos fatores não altera os valores, aí eles trocam mas vai continuar sendo o mesmo valor. Aqui o número 8,1,2,3,4,5,6,7,8,9 possibilidades, mesma coisa que a gente alterou as ordens dos fatores e não alterou o valor do produto, a gente achou a relação entre A e B.*

É importante destacar que ao final da tarefa 5, a dupla B, consegui, construir um algoritmo de contagem com a utilização do material dourado para se obter as composições, assim como, as construções matemáticas do algoritmo, juntamente com suas propriedades e compreensões.

Professor formador 1*: A sequência das atividades proporcionou vocês chegarem ao algoritmo final que vocês escreveram aqui (indicando no caderno). Essa adição de parcelas das questões que foram tratadas deu condições para vocês chegarem ao algoritmo e compreensão de propriedades?*
Componente da dupla D: *sim! Desde a primeira questão tu consegues ver. Assim, a gente foi uma ajudando a outra, porque nas primeiras não consegui entender, daqui (se referindo a terceira questão) comecei a me ligar, a entender melhor, ela (componente da dupla) me ajudou a entender mais (apontando para as duas primeiras questões). Aí as outras fui fazendo sozinha (se referindo a última questão)... botei aqui em baixo que a ordem das parcelas não altera o resultado.*
Componente da dupla A (Material dourado): *Eu coloquei aquela ordem que não altera os resultados, eu só esqueci, ela tem um nome, 1 com 4, 2 com 3, aí aqui eu repeti porque acabei de falar não vai alterar, coloquei o 3 + 2 e aqui 4 + 1. Aqui eu fiz com 8, eu coloquei, 1 + 7, 2 + 6, 3+ 5, 4+4 aqui eu botei 5+ 3 e 6+ 2, não coloquei 7 porque não peguei mais dessas peças aqui.*
Professor formador 2: *Entendi, quando você chegou e fez essa última questão, você sentiu mais facilidade a partir das outras que você já tina feito?*
Componente da dupla A: *sim, eu achei ela mais simples. Porque está pedindo pra gente representar o número através de, como posso dizer, fragmentar o número e aqui essas são as formas de fragmentar que dá o mesmo resultado em tudo.*

Professor formador 2: *Em relação as tarefas um, dois, três, quatro e cinco, elas proporcionaram aprendizagens diferentes para vocês?*

Componente da dupla L: *Sim, sim até então quando fomos resolver a segunda questão aqui em relação, nós tivemos um outro entendimento, não é que vá dizer está errado, até então se for trabalhar com uma criança dos anos iniciais, quando ela tiver essa ideia, passar o entendimento dela. Não posso dizer que está errado, vou analisar, a minha opinião, e ver como ela conseguiu resolver aquela questão, de que forma ela chegou aquele determinado resultado.*

Componente da dupla A: *no final a gente usa número em si e aqui nas outras questões a gente não usa os números, a gente usa os objetos, aí dá pra gente fazer a combinação e o raciocínio da combinação. Quando chega no final, como a gente já está habituado com os números, se torna mais fácil. Então a diferença é consegui montar o que tu fazes com o número através dos materiais, acho que a relação dele é essa. E agora a gente aprendeu a ter mais habilidades fazendo com o material do que com o normal, com os números.*

Componente da dupla L: *A gente deve ter mais esse tipo de trabalho, como nós vamos trabalhar nos anos iniciais, porque até então a gente não tinha essa noção de trabalhar com ábaco. Eu fui descobrir com um trabalho com outra professora, nós fomos trabalhar com o ábaco, nós fomos fazer a soma, vou colocar aqui 9+2 = 1. Na unidade, vai 1, mas porque vai 1? Porque nós fomos habituadas a fazer os exercícios assim em sala de aula, desse mesmo jeito, porque nós fomos criados dessa forma.*

Componente da dupla I: *A gente conseguiu ver a importância da dezena, da unidade e dos números.*

Componente da dupla L: *nós não tínhamos essa visão: unidade, dezena e centena. Quando já tivemos essa visão de usar as unidades, dezenas e centenas, ficou melhor pra gente! Quando nós aprendemos a matemática, por que vai 1? Por que nenhum professor deu esse sentido? Nós aprendemos aqui.*

Desta forma, as tarefas possuem diferentes enfoques no ensino básico e refletem a potencialidade dos recursos para se trabalhar tarefas ligadas ao Raciocínio Combinatório nos anos iniciais de escolarização por intermédio de materiais alternativos. Por conseguinte, as diferentes visões de como o Raciocínio Combinatório contribui para o desenvolvimento de conhecimento e as relações deste com práticas sociais traduzem diferentes posicionamentos sobre o ensino da matemática e as condições de produção de novos conhecimentos.

Conclusão

O objetivo principal dessa pesquisa foi descrever as ações e narrativas de professores em formação inicial envolvidos em uma oficina cuja temática foi o desenvolvimento de tarefas sobre Noções de Raciocínio Combinatório utilizando materiais alternativos.

Os resultados da oficina indicam segundo os autores Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), a necessidade de se iniciar a escolarização com tarefas de noção de Raciocínio Combinatório, pela importância de se fazer uso de construções de diferentes agrupamentos, sem necessariamente sistematizar e/ou formalizar o estudo.

Os estudos e o desenvolvimento da oficina favoreceram o entendimento da noção de Raciocínio Combinatório nos anos iniciais de escolarização. No trabalho com os discentes da licenciatura emergiram possibilidades de ensino nos anos iniciais de escolarização com atividades ligadas ao raciocínio combinatório, a partir do uso de materiais alternativos para o ensino de matemática, como ábaco, material dourado, blocos lógicos e outros, segundo os autores Fischbein, Pampu e Minzat (1970), Piaget e Inhelder (1971), Fischbein (1975), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) e Moraes (2016).

Desta forma, as tarefas possibilitaram diferentes técnicas de resolução e refletiram a potencialidade dos recursos para se trabalhar nos anos iniciais de escolarização com tarefas ligadas ao Raciocínio Combinatório por intermédio de materiais alternativos. E, por conseguinte, as diferentes visões de como o Raciocínio Combinatório contribui para o desenvolvimento de conhecimento e as relações deste com as possíveis práticas dos futuros professores.

Os estudos revelam que as dificuldades enfrentadas tanto pelos professores quanto pelos alunos, referentes aos temas do Raciocínio Combinatório, podem ser superadas desde que sejam implementadas na formação continuada dos professores, para que os professores tenham as competências necessárias para trabalhar os temas, para que levem também em consideração as estratégias que os alunos desenvolvem para resolver as questões e para que esse conhecimento possa auxiliar em novas abordagens do tema.

Há necessidade de aprofundamento no uso de recursos alternativos para abordar o Raciocínio Combinatório nos anos iniciais de escolarização e em outros níveis da escola básica na busca de fornecer outras práticas com os materiais, além das formas clássicas de abordagem na escola, o que pode contribuir para a superação de algumas dificuldades no entendimento do tema pelos professores e, consequentemente, pelos alunos.

Referências

BATANERO, C.; ORTIZ, J. J.; SERRANO, L. Investigación en didáctica de la probabilidade. **UNO**, v. 44, p. 7-16, 2007.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. The use of implicative and correspondence analysis for assessing pupils' combinatorial reasoning, In: R. Gras (Ed). **Actes** du colloquem ethodesd analyses statistiques multidimension nelle sen Didactiquedes Mathematiques. IRMAR, Rennes, p. 245–256. 1996.

BATANERO, C.; NAVARRO-PELAYO, V.; GODINO, J. D. Efeito do Modelo Combinatório Implícito no Raciocínio Combinatório em Alunos do Ensino Secundário. **Educational Studies in Mathematics**, v. 32, p. 181– 199, 1997.

BORBA R. E. S.; ROCHA R. C. A.; AZEVEDO J. Estudos em Raciocínio Combinatório: Investigações e Práticas de Ensino na Educação Básica. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1348-1368, 2015.

BRASIL, **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL**. Base Nacional Curricular Comum: versão final.** Secretaria da Educação Fundamental. Brasília, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 18 de setembro. 2019.

CORREIA, P. F.; FERNANDES, J. A. (2007). **Estratégias intuitivas de alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória**. In A. Barca, M. Peralbo, A. Porto, B. Duarte da Silva; L. Almeida (Eds.), Actas do IX Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagoxía (CD ROM, pp. 1256- 1267). Coruña/Universidade da Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación.

CORREIA, P. F.; FERNANDES, J. A. (2007). **Estratégias usadas por alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas em Combinatória**. Quadrante, Vol. XVI, Nº 2, 51-79.

CORREIA, P. F.; FERNANDES, J. A. (2009). **Estratégias espontâneas de alunos do 9º ano em Combinatória. Educação e Matemática**, nº 102, 12-17.

FERNANDES, J. A., CORREIA, P. F.; ROA, R. (2010). **Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino.** Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa, 13(2), 215-242

FISCHBEIN, E.; PAMPU, L.; MINZAT, I. Effect of Age and Instruction on Combinatorial Ability in Children. **British Journal of Educational Psychology**, v. 40, p. 261–270, 1970.

FISCHBEIN, E. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company, 1975

GUIMARÃES, F. **Sentidos do zero**. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

IFRAH, G. **Os Números:** A história de uma grande invenção. 9 ed. São Paulo:Globo, 1998.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **De la lógica del niño a la lógica del adolescente**. Trad. M. T. Cevasco. Buenos Aires: Paidós (originalmente publicado em 1955). 1972.

KAPUR, J. N. Combinatorial Analysis and School Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**. v. 3, p. 111 - 127, 1970.

MELO L. M. S.; SILVA J. F. G.; SPINILLO A. G. Os Princípios Invariantes e a Resolução de Problemas de Raciocínio Combinatório. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. v. 7, n. 1, 2016.

MORAES, G. M. **Organizações didáticas nos livros didáticos nos anos iniciais do ensino fundamental: o caso da noção de raciocínio combinatório**. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

NÓBREGA G. M. M.; SPINILLO, A. G. A. Noção de Possível na Probabilidade e na Combinatória em Estudantes do Ensino Fundamental. **Em teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 7, n. 1, 2016.

PEREIRA J. F. F.; CURI, E. Problemas que Envolvem Relação Entre Dois ou Mais Conjuntos no Âmbito do Raciocínio Combinatório. **Em teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 7, n. 1, 2016.

SANTOS J. S. S.; MERLINI V. L. Situações-problema Elaboradas Por Professores Dos Anos Iniciais. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 1, p. 021-040, 2018.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **La genèse de l'idee de hasard chez l'enfant**. Presses Universitaires de France, Paris,1951.

SEIFE, C. **Zero:** a biografia de uma idéia perigosa. Lisboa: Gradiva, 2001.

SILVA, D. N., FERNANDES, J. A.; SOARES, A. J. (2004). **Intuições de alunos do 12.º ano em combinatória: Um estudo exploratório.** In J. A. Fernandes, M. V. Sousa; S. A. Ribeiro (Orgs.), Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola (pp. 61-84). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

SILVA M. C.; PESSOA C. A. S. A. Combinatória: Estado da Arte em Anais de Eventos Científicos Nacionais e Internacionais Ocorridos no Brasil de 2009 a 2013. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.17, n. 4, pp.670-693, 2015.

SPINILLO A. G.; SILVA J. F. G. Alternativas para Desenvolver Formas Apropriadas de Resolução de Problemas de Produto Cartesiano. **Em teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 7, n. 1, 2016.