emd Ensino da Matemática em Debate

Dobraduras Dinâmicas e o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico

Dynamic Folding and the Development of Geometric Thinking

Priscila Ferreira Silveira[1]

Márcia Rodrigues Notare[2]

RESUMO

Este artigo apresenta uma pesquisa desenvolvida a partir da proposta de exploração de dobraduras dinâmicas que resultam em figuras geométricas, construídas em ambiente de geometria dinâmica e analisa a partir dessa exploração o desenvolvimento do pensamento geométrico e da argumentação. A investigação foi conduzida por um experimento prático, realizado com estudantes do nono ano do Ensino Fundamental. A partir das atividades dinâmicas elaboradas, foi oportunizado o desenvolvimento de aspectos essenciais do pensamento geométrico, como a exploração, formulação e teste de conjecturas, assim como o incentivo à argumentação na Educação Básica. O material foi desenvolvido em formato de livro digital no GeoGebrabook, e propõe a manipulação de objetos geométricos dinâmicos que simulam dobraduras em folhas de papel, nos quais os alunos foram incentivados a explorar e argumentar. Utilizamos o modelo de Van Hiele de níveis de compreensão que descrevem sequencialmente características do processo de pensamento geométrico para a análise do experimento. Os resultados apontam que, com a exploração das dobraduras dinâmicas virtuais e o incentivo à argumentação, é possível o desenvolvimento de aspectos essenciais do pensamento geométrico e o resgate da argumentação na Educação Básica.

Palavras-chave: *Geometria Dinâmica; Dobraduras; Pensamento Geométrico; Argumentação em Geometria; Educação Matemática.*

ABSTRACT

This article presents research developed from the proposal for exploring dynamic folding that result in geometric figures, constructed in an environment of dynamic geometry and analyzes the development of geometric thinking and argumentation based on the exploration of this material. The investigation was conducted by an experiment, with students in the ninth grade of elementary school. Based on the elaborated dynamic activities, it was possible to develop essential aspects of geometric thinking, such as exploration, formulation and conjecture testing, as well as encouraging argumentation in the basic school. The material was developed in a digital book format at GeoGebrabook, and proposes the manipulation of dynamic geometric objects that simulate folds on sheets of paper, in which students were encouraged to explore and argue. We used the Van Hiele model of levels of understanding that sequentially describe characteristics of the geometric thinking process for the analysis of the experiment. The results show that, with the exploration of the virtual dynamic folds and the incentive to argumentation, it is possible to develop essential aspects of geometric thought and to recover the argumentation in the basic school.

Keywords*: Dynamic Geometry; Folding; Geometric Thinking; Argumentation in Geometry; Mathematics Education.*

[1]E-mail: pry.f.silveira@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-4517-4034

[2]Professora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. E-mail: marcia.notare@ufrgs.br; https://orcid.org/0000-0002-2897-8348

Introdução

Notare e Basso (2012) comentam que o sistema de ensino, muitas vezes, impõe aos estudantes a utilização de teoremas, fórmulas e “regras”, omitindo os caminhos de construção de conceitos matemáticos, privando-os de vivenciarem processos importantes com a exploração e a descoberta. Gravina e Contiero (2011) apontam que, no caso particular da geometria, há entraves em sua abordagem na escola, destacando que o estudo da geometria escolar tem focado na apresentação de conceitos e propriedades geométricas, deixando de lado o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Gravina e Contiero (2011) indicam que ações como abstrair, generalizar, estabelecer relações e fazer conjecturas costumam ser estranhas aos alunos, ações importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático e da argumentação. Da mesma forma, Notare e Basso (2018) afirmam que ações como experimentar, formular conjecturas, testá-las e validá-las são processos naturais que constituem o pensamento geométrico. Portanto, percebemos a importância de proporcionar uma abordagem da geometria que contribua para o desenvolvimento do pensamento geométrico, oportunizando processos de análise e exploração de propriedades para desencadear a construção de conceitos.

Para Santos-Trigo et al. (2016), construir e explorar modelos dinâmicos que permitam analisar uma variedade de exemplos é uma habilidade essencial aos alunos, como também identificar e formular conjecturas ou invariâncias que emergem dessa exploração e procurar argumentos que sustentem as relações geométricas observadas. Assim, as tecnologias digitais e, em especial, os ambientes de geometria dinâmica possibilitam representações dinâmicas que podem desenvolver habilidades cruciais para o pensamento geométrico e a argumentação. Para esse autor, levar o aluno pelo caminho de argumentos visuais pode contribuir para o caminho de provas mais formais, a partir do estabelecimento de relações entre raciocínio empírico e raciocínio dedutivo.

Dessa forma, acreditamos que ambientes de geometria dinâmica oferecem uma oportunidade para transformar o estudo da geometria em uma versão moderna e contemporânea, mas que preserva sua essência axiomática-dedutiva e as ações essenciais que possibilitam o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Nesse artigo, recorte de uma pesquisa de mestrado acadêmico, apresentamos um estudo do desenvolvimento do pensamento geométrico e da argumentação com estudantes do nono ano do ensino fundamental, a partir da exploração de um livro digital que aborda dobraduras virtuais. Utilizando a Teoria de Van Hiele, analisamos como a exploração de dobraduras virtuais no GeoGebrabook desencadeou o desenvolvimento de habilidades próprias do pensamento geométrico, como identificar relações e regularidades, formular conjecturas, testar e argumentar.

O objetivo das atividades propostas foi resgatar a essência do pensamento geométrico em tempos modernos, incentivando a comunicação dos estudantes sobre o entendimento de propriedades geométricas e da validação ou não de suas conjecturas, encorajando-os nesse universo argumentativo.

O aporte teórico sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico e o potencial dos ambientes de geometria dinâmica nesse processo, as escolhas metodológicas da pesquisa e a análise de três atividades, recorte de uma sequência mais ampla, elaborada para analisar o desenvolvimento do pensamento geométrico são indicados no próximo item.

Desenvolvimento do Pensamento Geométrico

Para Gravina (2001), os objetos geométricos podem ser considerados como objetos construídos a partir de processos de abstração e generalização. Segundo a autora, esses objetos (círculos, quadrados, cubos etc.) constituem-se em idealizações de objetos físicos que, inicialmente, apoiam-se em características originadas de percepções, como a identificação de aspectos visuais. Mais adiante, quando avançamos no processo de aprendizagem de geometria, esses registros perceptivos, que caracterizam o objeto físico, transformam-se em objetos geométricos, impulsionados por processos de reconhecimento de propriedades que os definem. Assim, podemos afirmar que, em fases iniciais de aprendizagem de geometria, os estudantes tendem a identificar uma figura geométrica pela sua aparência física. Em fases posteriores, esses estudantes começam a reconhecer a figura geométrica por características e propriedades que as definem. Atividades de exploração, que possibilitam a realização de testes e formulação de conjecturas, são etapas importantes para proporcionar a identificação de propriedades da figura geométrica e desencadear a etapa seguinte, de validação e argumentação.

A etapa de argumentação de uma propriedade geométrica, naturalmente, ocorre após a etapa de identificação e convicção sobre sua veracidade. Em outras palavras, é necessário que o estudante esteja convencido de que a propriedade é verdadeira para aventurar-se na etapa de argumentação (DE VILLIERS, 1997). Nesse processo, a principal função didática da argumentação de uma propriedade não é apenas de verificação, mas sim de explicação. Durante o processo de explicação, os estudantes produzem conhecimento sobre conceitos relevantes da geometria que podem ser mais importantes do que atividades que exigem apenas a confirmação de um resultado. Conforme salientamos anteriormente, oportunizar ao estudante etapas de exploração da situação geométrica, formulação de conjecturas, realização de testes, refutações, reformulações e explicações, em um ambiente investigativo, são fundamentais para o desenvolvimento da habilidade de argumentação. Nessa perspectiva, ambientes de geometria dinâmica proporcionam esses processos de pensamento e serão abordados a seguir.

Pensamento Geométrico e Geometria Dinâmica

De acordo com De Villiers (1997) e Santos-Trigo (2016), os ambientes de geometria dinâmica têm colaborado para o resgate da argumentação nas aulas de matemática. Esses ambientes permitem movimentar objetos geométricos (pontos, retas, figuras geométricas etc.), construídos a partir de propriedades geométricas, fazendo com que essas propriedades sejam realçadas e observadas, proporcionando um espaço para a elaboração, teste e validação de conjecturas, etapas importantes do processo dedutivo.

Ambientes de geometria dinâmica são caracterizados pela possibilidade de construir objetos geométricos a partir de propriedades que os definem, mantendo a estabilidade de regularidades geométricas quando movimentados pela ação de arrastar. Esses ambientes, como o GeoGebra, podem oportunizar experiências ricas para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Com a manipulação de figuras geométricas em ambiente de geometria dinâmica, o aluno observa características estáveis que se mantêm na figura, permitindo-o deduzir propriedades que são preservadas mesmo com a figura em movimento. Assim, a partir da manipulação em ambiente de geometria dinâmica, regularidades e invariantes vão aparecendo. Consequentemente, pela essência do pensamento geométrico, a busca por uma justificativa pode ocorrer. Dessa forma, estabelece-se (ou inicia-se) o processo de dedução.

A possibilidade de arrastar é uma das principais características da geometria dinâmica, pois permite ações de exploração e identificação de regularidades, que se mantêm quando movimentadas, e pode conduzir à elaboração de conjecturas. Basso e Notare (2015) destacam duas categorias para a ação de arrastar: arrastar para explorar e conjecturar e arrastar para validar uma conjectura. Na primeira categoria apontada pelos autores, os alunos arrastam objetos geométricos para observar a figura em busca de regularidades e invariantes. Na segunda categoria, os alunos arrastam um objeto geométrico para verificar a validade (ou não) de uma conjectura já descoberta.

Diante dessa perspectiva, entendemos que uma das principais contribuições dos ambientes de geometria dinâmica é a evolução do conceito de argumentação na Escola Básica. Argumentar, nesses ambientes de experimentação, passa a ser um processo de procurar explicações para validar uma afirmação, de acordo com princípios axiomáticos-dedutivos que organizam a sequência lógica das explicações. É nesse sentido que entendemos a argumentação nessa pesquisa e suas contribuições para o desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes da Educação Básica.

Níveis de Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele

O modelo Van Hiele de pensamento geométrico emergiu dos trabalhos de doutoramento de Dina Van Hiele-Geldof (1984a) e Pierre Van Hiele (1984b), finalizados simultaneamente na Universidade de Utrecht. A teoria foi esclarecida, aperfeiçoada e promovida por Pierre Van Hiele após o falecimento de Dina, logo depois de concluir sua tese (CROWLEY, 1996).

Esse modelo consiste em cinco níveis de compreensão que descrevem características do processo de pensamento geométrico: Nível 1 - Visualização; Nível 2 - Análise; Nível 3 - Dedução Informal; Nível 4 - Dedução; e Nível 5 - Rigor (CROWLEY, 1996), (NASSER, 1993). Alguns autores adotam notação de 0 a 4 para os níveis de compreensão. Nesse artigo, vamos adotar a notação de 1 a 5.

No nível 1 (Visualização), os alunos percebem o espaço apenas como algo que existe em torno deles. Crowley (1996) explica que nesse nível “Os conceitos de geometria são vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos.” (CROWLEY, 1996, p.2). Ou seja, os alunos reconhecem os elementos em sua totalidade. Por exemplo, as figuras geométricas são reconhecidas por sua aparência física, e não por suas partes ou propriedades. Um indivíduo desse nível consegue aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e reproduzir uma figura. Porém, não consegue identificar propriedades presentes nas figuras geométricas.

No nível 2 (Análise), o indivíduo começa uma análise de conceitos geométricos. Por meio da observação e da experimentação, começa a discernir características das figuras.

Crowley (1996) afirma que, nesse nível, “surgem então propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Assim, reconhece-se que as figuras têm partes, e as figuras são reconhecidas por suas partes.” (CROWLEY, 1996, p.3). Por exemplo, em um paralelogramo, o indivíduo desse nível consegue identificar ângulos congruentes, mas não consegue relacionar que, se os ângulos opostos são congruentes, então os lados opostos são paralelos. Nesse nível, o indivíduo não é capaz de explicar relações entre propriedades, não vê inter-relações entre figuras e não entende definições.

No nível 3 (Dedução Informal), o indivíduo consegue estabelecer inter-relações de propriedades tanto dentro de figuras quanto entre figuras. Portanto, é capaz de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras. A inclusão de classes é compreendida. As definições têm significado. Os alunos acompanham e formulam argumentos informais. Por exemplo, nesse nível o indivíduo identifica que, se os lados opostos do quadrilátero são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são iguais. Porém, nesse nível o indivíduo ainda não compreende o significado da dedução ou o papel dos axiomas. Com isso, é capaz de acompanhar demonstrações formais, mas não percebe como pode ser alterada a ordem lógica e nem como se pode construir um argumento partindo de inícios diferentes ou não familiares (CROWLEY, 1996).

No nível 4 (Dedução), o aluno compreende o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. Além de percebida a inter-relação, nesse nível, também são percebidos o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações. Nesse nível, o aluno é capaz de construir demonstrações; compreende a interação entre as condições necessárias e suficientes; é capaz de fazer distinções entre uma afirmação e sua recíproca.

No nível 5 (Rigor), o indivíduo é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, ou seja, pode-se estudar geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes. Crowley (1996) explica que nesse nível a geometria é vista no plano abstrato. O modelo de Van Hiele possui a característica sequencial que, segundo Nasser (1993, p.31), “Os níveis formam uma hierarquia, no sentido de que não é possível atingir um nível sem dominar todos os níveis inferiores”. Segundo a autora o modelo de Van Hiele define que o avanço de um nível para o seguinte depende mais da experiência de atividades adequadas do que da idade ou da maturação. Nesse modelo o que está implícito em um nível, torna-se explícito no nível seguinte.

Na seção a seguir, são apresentados os procedimentos metodológicos.

Percurso Metodológico

A pesquisa apresentada nesse artigo tem cunho qualitativo que, segundo Bogdan e Biklen (1994), possui cinco características: (1) a fonte de dados é o ambiente natural no qual a investigação ocorre, e o investigador é o instrumento principal, ou seja, na pesquisa qualitativa o investigador se introduz no ambiente da pesquisa e coleta dados e, ao analisar os dados coletados e produzidos, pode retomá-los na sua totalidade; (2) nenhum dado é simplificado, ou seja, os dados são analisados em toda a sua riqueza; (3) os investigadores interessam-se mais pelo processo do que pelo resultado ou produto; (4) a análise dos dados ocorre de forma indutiva, ou seja, os investigadores não coletam dados para provar ou não hipóteses construídas previamente; (5) "o significado é de importância vital na abordagem qualitativa." (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.50), ou seja, a perspectiva do indivíduo e como ele entende certo problema.

Para a realização da investigação apresentada nesse artigo, recorte de uma pesquisa mais ampla realizada em uma dissertação de mestrado concluída em 2020, foi oferecida uma oficina para turmas de nono ano de uma escola da rede estadual de ensino fundamental do Rio Grande do Sul, na qual treze estudantes, entre doze e catorze anos de idade, participaram. A oficina, intitulada *Investigações com Dobraduras Dinâmicas Virtuais*, foi organizada em um livro digital no GeoGebrabook com dobraduras virtuais dinâmicas e sequências de atividades. Cada capítulo do livro digital aborda uma dobradura diferente e está organizado em duas categorias de atividades: *Investigações* e *Agora é a sua vez!*, como podemos visualizar na Figura 1.

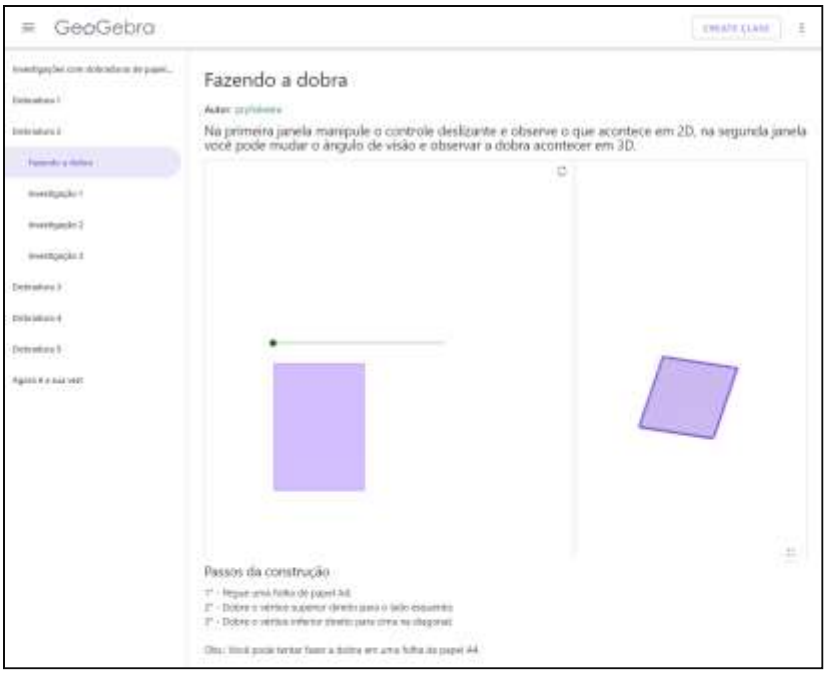
A estrutura geral das *Investigações* foi pensada para contemplar etapas do pensamento geométrico como: 1) manipular e explorar; 2) realizar conjecturas, identificando características e propriedades gerais das figuras; 3) realizar conjecturas, identificando propriedades geométricas que definem as figuras; e 4) argumentar sobre as conjecturas realizadas. Apresentaremos a seguir os três capítulos que serão analisados nesse artigo.

Figura 1 - Tela Inicial do Livro Digital

Fonte: Acervo pessoal

O segundo capítulo do livro dinâmico traz a exploração da Dobradura 2, que propõe a construção de um triângulo isósceles a partir de dobraduras dinâmicas. Como pode ser observado na Figura 2, foi elaborada a seção *Fazendo a Dobra*, que apresenta os passos da dobradura.

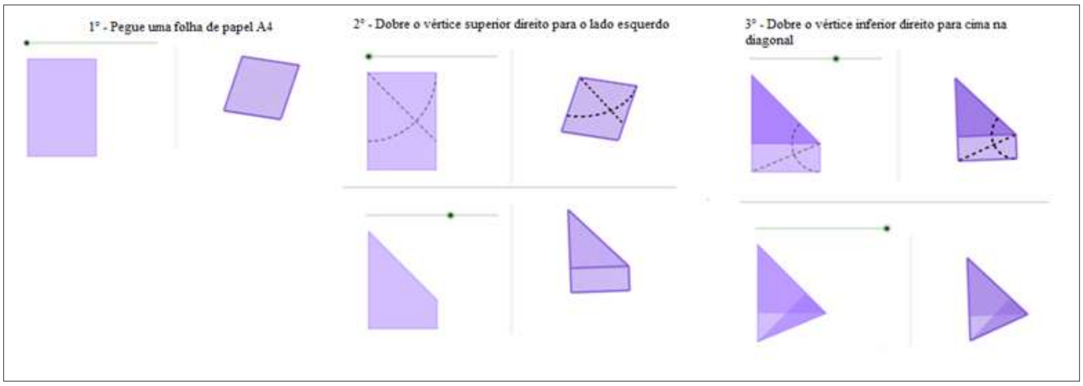
Figura 2 – Tela de Exploração da Dobradura 2



Fonte: Acervo pessoal

Na Figura 3 apresentamos uma simulação do dinamismo da Dobradura 2, organizada pelos passos sugeridos no livro digital.

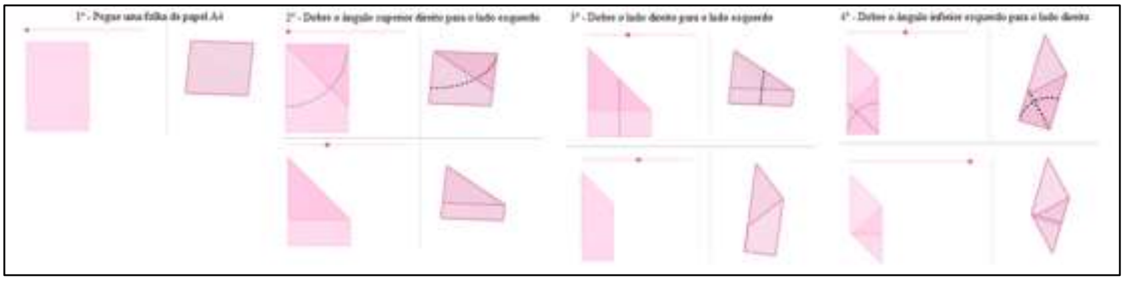
Figura 3 - Sequência de imagens que simulam o dinamismo da Dobradura 2



Fonte: Acervo pessoal

O terceiro capítulo (Dobradura 3), que propõe a construção de um paralelogramo a partir de dobraduras dinâmicas, também apresenta os passos da construção. Uma simulação do dinamismo da Dobradura 3 pode ser observado na Figura 4.

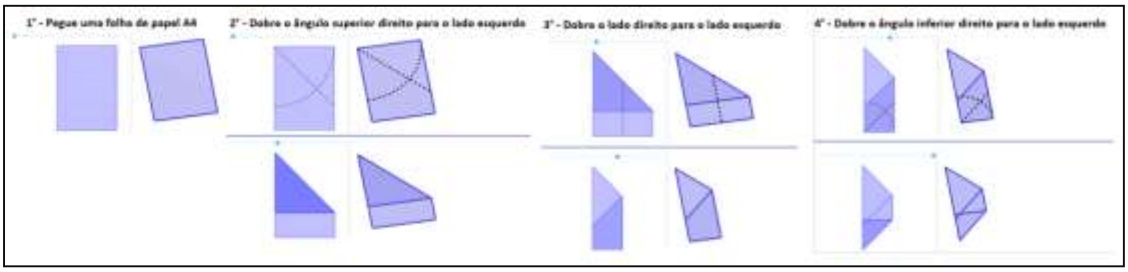
Figura 4 - Sequência de imagens que simulam o dinamismo da Dobradura 3



Fonte: Acervo pessoal

O quarto capítulo do livro (Dobradura 4) propõe a exploração da construção de um trapézio. A Figura 5 apresenta uma sequência de imagens com os passos de construção do trapézio.

Figura 5 - Sequência de imagens que simulam o dinamismo da Dobradura 4



Fonte: Acervo pessoal

Para produção dos dados da pesquisa, foram utilizados os seguintes instrumentos: diário de campo da professora-pesquisadora; registros dos participantes em editor de texto, constituindo dados para fornecer indícios ou evidências de processos de pensamentos ao longo do percurso; gravação de vídeos, a fim de retomar o processo de cada participante a partir da análise de diálogos e manifestações dos estudantes ou de intervenções da pesquisadora para revelar dados importantes sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico.

A investigação buscou compreender como se dá a aprendizagem de propriedades geométricas e o desencadeamento de argumentações que emergem da exploração de dobraduras em ambiente de geometria dinâmica e como se dá o avanço dos níveis de pensamento geométrico, estabelecidos pelo modelo de Van Hiele. Nessa perspectiva, as respostas não são objetivas e o propósito não é contabilizar quantidades como resultados, mas sim compreender o comportamento dos estudantes no ambiente de geometria dinâmica, diante das atividades propostas. A análise dos dados centrou-se na investigação sobre os processos de descoberta e desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. O estudo do processo exploratório e argumentativo dos estudantes permitiu identificar indícios de desenvolvimento de pensamento geométrico, a partir da observação de propriedades referenciadas ao longo do trabalho de exploração com dobraduras virtuais.

Na seção a seguir, apresentamos a análise das três atividades de dobraduras apresentadas. Buscamos compreender como ocorreu o processo de aprendizagem de propriedades geométricas e o desencadeamento de argumentações, provocadas pela exploração de dobraduras em ambiente dinâmico, analisando possíveis avanços nos níveis de aprendizagem do modelo de Van Hiele.

Analisando os Níveis do Pensamento Geométrico

Conforme afirmado selecionamos para análise, três atividades de dobradura, para evidenciar o processo de exploração e argumentação no ambiente dinâmico proposto pela pesquisa e identificar níveis de pensamento geométrico dos estudantes. A partir da manipulação de um controle deslizante no GeoGebra, os alunos puderam explorar no livro digital as dobraduras virtuais em folhas de papel que formavam figuras geométricas, apresentadas na seção anterior. A partir da identificação dessas propriedades, os estudantes eram convidados a justificar a validade das mesmas. Nas análises, trazemos estratos de falas de alguns estudantes, representativas do grupo maior.

Dobradura 2: por que forma um triângulo isósceles?

A primeira dobradura que vamos analisar é a Dobradura 2, que forma um triângulo isósceles. Os alunos acessaram o livro digital, observaram e manipularam a dobradura por meio do controle deslizante. Umas das questões propostas foi: Que figura foi construída? Por quê? Como exemplo de respostas apresentadas, temos: "*foi construído um triangulo isósceles porque tem apenas dois lados iguais*". "*Foi um triangulo, pois tem três ângulos*". Em seguida, a investigação propunha a questão: Qual tipo de triângulo foi construído, pensando em seus lados? Por quê? As respostas foram: "*Escaleno, apenas dois lados iguais*". "*Um escaleno: dois lados iguais*". Identificamos equívoco na resposta dos estudantes, pois afirmaram que os triângulos possuem a igualdade de dois lados, mas o classificam como escaleno, revelando desconhecimento da classificação de triângulos quanto aos lados. Esse desconhecimento dos estudantes levou a professora-pesquisadora, à retomada de modo a apresentar a classificação dos triângulos quanto aos lados, realçando os conceitos corretos. Nessas questões, observamos certa dificuldade em justificar as respostas, evidenciando que o desenvolvimento do pensamento geométrico ainda se encontra em uma fase inicial. O comportamento desses dois estudantes (e que também se revelou na resposta dos demais) apresenta características do nível 2 (Análise), em que os alunos conseguem discernir características da figura geométrica, que permitem conceituá-las.

Dando continuidade à exploração da dobradura realizada no GeoGebra, os alunos observaram que a diagonal do quadrado tem a mesma medida do lado maior do papel A4 e, por meio da manipulação dinâmica, os alunos identificaram essa característica (mesmo que de forma implícita. Para provocar os estudantes no processo argumentativo, o diálogo a seguir se estabeleceu:

Pesquisadora: Como vocês sabem que os dois lados do triângulo são iguais?

A2: Porque um lado do triângulo é a diagonal do quadrado que é igual a medida do lado maior do papel A4.

Pesquisadora: Mas como tu sabe que são iguais?

A1: É não tem como saber.

A2: É sim, ali tem o pontilhado do círculo que mostra que uma parte são iguais, e as partesinhas que sobra em cada uma são iguais porque quando dobra aquele lado fica em cima da diagonal.

Nesse diálogo, os alunos observam, a partir da dobradura no GeoGebra, que o triângulo é isósceles, e chegam a argumentos informais de demonstração para explicar que os lados do triângulo são congruentes. Podemos identificar esse aspecto quando o estudante A2 afirma que "*...ali tem o pontilhado do círculo que mostra que uma parte são iguais...*", caracterizando uma tentativa de argumentar sobre a igualdade dos lados. A fala de A2 apresenta indícios de comportamento do nível 3, Dedução Informal, do modelo de Van Hiele, buscando argumentar uma propriedade observada na figura (neste caso, a congruência dos lados do triângulo). Analisando a argumentação dos alunos, podemos dizer que, inicialmente, eles indicam que são demarcados pontilhados que definem a diagonal do quadrado e o movimento de dobrar o lado menor da folha de papel A4 para o lado maior da folha de papel A4. Estão implícitas noções de mediatriz e bissetriz e suas propriedades, mesmo que ainda sejam conceitos não formalizados para A1 e A2. Percebe-se que o pensamento geométrico desses estudantes avança para argumentações apoiadas nas experiências das dobras exploradas, realçando o papel da manipulação dinâmica para observar e conjecturar, atividades importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Dando continuidade à investigação, foi questionado: quais as medidas dos ângulos desse triângulo? Por quê? A resposta para essa questão foi: "*para o primeiro angulo dividimos 90 por 2 por causa da dobradura que foi feita; para o segundo ângulo subtraímos 45 de 180 que resultou em 135 graus, que foram divididos ao meio resultando em 67,5, no terceiro os triângulos são iguais*" (Alunos A1 e A2). "*Se divide por dois q da 45, pq dobrou la, dps 180 menos 45 e ficou 135*" (Aluno A3).

Analisando as respostas, que já sugerem indícios de argumentação, verificamos que os alunos A1, A2 e A3 sabem que a folha de papel A4 tem o formato de um retângulo com ângulo de 90° em cada vértice. Ao dobrar o vértice superior direito para o lado esquerdo, eles observaram que o ângulo de 90° do vértice superior esquerdo é dobrado "ao meio" (aspecto visual observado pelos estudantes ao realizar a dobra), dividindo o ângulo ao meio, portanto concluíram que o ângulo formado vai medir 45°. A noção de bissetriz de um ângulo está implícita, mesmo que os estudantes ainda não (re)conheçam esse conceito. A manipulação dinâmica permitiu aos alunos a exploração e observação da divisão de um ângulo "ao meio" construída pela dobra realizada, o que conduz à argumentação usada por eles "*dividimos 90 por 2 por causa da dobradura que foi feita" e "se divide por dois q da 45, pq dobrou lá*". Ainda, identificamos que um dos ângulos da base não foi calculado pelos alunos, pois deduziram (indícios de pensamento geométrico dedutivo) ser congruente ao outro ângulo, advindo da resposta anterior, em que definiram o resultado da dobradura como um triângulo isósceles. Ou seja, é possível identificar, na argumentação dos alunos, um passo além no processo de dedução e argumentação, pois não precisaram realizar cálculos para o terceiro ângulo, apoiando-se no fato do triângulo ser isósceles e, portanto, com dois ângulos congruentes.

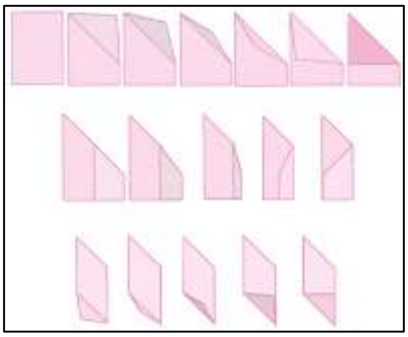
Aqui podemos perceber o início de uma análise de conceitos geométricos e o estabelecimento de inter-relações de propriedades dentro da figura, como a utilização da propriedade que afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, assim como da propriedade que afirma que todo triângulo isósceles tem ângulos da base congruentes. Os estudantes A1, A2 e A3 não utilizam linguagem matemática formal, mas tentam explicar as propriedades identificadas em linguagem coloquial. A identificação dessas propriedades revela indícios de comportamento de nível 3 do modelo em relação ao pensamento geométrico. A partir da manipulação da dobradura dinâmica e da observação, os alunos começam a discernir características das figuras, nesse caso, a classificação do triângulo por meio de seus ângulos, assim como justificar suas conjecturas.

O ambiente de geometria dinâmica permitiu aos alunos explorar, conjecturar, testar, explicar contribuindo para o desenvolvimento da argumentação, corroborando com De Villiers (1997), Santos-Trigo et al. (2016) e Notare e Basso (2018).

Dobradura 3: por que forma um paralelogramo?

Vamos analisar a Dobradura 3 do livro digital, que forma um paralelogramo. Como afirmado anteriormente, é possível explorar dinamicamente no material o processo de dobradura na folha. A Figura 6 apresenta uma sequência de imagens para ilustrar o dinamismo da dobradura, até formar o paralelogramo.

Figura 6 - Passos da Dobradura 3



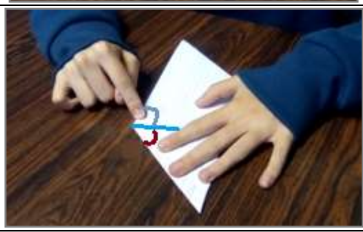
Fonte: Acervo pessoal

A partir das questões da investigação, que tinham o propósito de provocar a exploração da dobradura dinâmica para a realização das primeiras conjecturas, os estudantes foram desafiados a observar as características da figura que se formava (Quais características podemos observar na figura construída? Por quê?). Neste encontro, os alunos estavam organizados em dois grupos. Um dos grupos de alunos respondeu "*é roxo, rosa, tem quatro lados, dois ângulos obtusos e dois agudos, dois lados iguais dois a dois; visualmente foram essas as observações feitas*".

A partir da análise da resposta, percebemos que estão apoiadas, ora na aparência física da figura, que é característica do nível 1 do modelo de Van Hiele (Visualização), ora em algumas propriedades, característica do nível 2 (Análise). Ao serem questionados sobre a classificação da figura (Qual figura foi construída? Por quê?), os alunos responderam "*é um paralelogramo, porque possui os lados opostos paralelos*". Identificamos que esses alunos passam a analisar propriedades das figuras para defini-las, apresentando características do nível 2 do modelo de Van Hiele, quando o aluno reconhece as figuras pelas suas propriedades.

Para avançar no processo de exploração e argumentação, nesse momento, foi solicitado aos alunos que argumentassem que a figura é, de fato, um paralelogramo, ou seja, que utilizassem argumentos sustentados por propriedades geométricas decorrentes das dobraduras realizadas. Os estudantes não tinham experiências prévias com demonstrações (apenas a vivência das dobraduras anteriores) e um dos alunos sugeriu apoiar os argumentos nos ângulos observados. Os alunos manipularam novamente a dobradura dinâmica e iniciaram um debate sobre como argumentar sobre as propriedades dos lados do paralelogramo. O Quadro 1 apresenta uma sequência de argumentos dos alunos, que levaram à justificativa do paralelismo dos lados, característica que garante que a figura é um paralelogramo.

Quadro 1 - Sequência de argumentos dos estudantes

Argumento 1: Como aqui tem 180° e a linha está partindo no meio	
Argumento 2: Tem 90° de cada lado	
Argumento 3: Então a gente pegou o 90° e dobrou no meio e ficou 45°	
Argumento 4: Então tem o 45° e aqui ficou 90°	
Argumento 5: Como nós temos uma folha que é quadrada nas pontas, nós temos 90° aqui	
Argumento 6: E como nós dobramos os 90° aqui e aqui tem 180°	
Argumento 7: Aqui então tem 90° porque $90 + 90 = 180$	

Argumento 8: Então esses lados são paralelos, o lado direito e o lado esquerdo	

Fonte: Elaborado pelo autor

Nesse processo de argumentação dos alunos, podemos observar o nível 3 de pensamento geométrico de Van Hiele, pois identificamos que os alunos fazem deduções informais, indicando propriedades geométricas que se mostram de forma implícita na argumentação. Podemos identificar o conceito de bissetriz sendo utilizado nos argumentos 1, 2 e 3, a noção de perpendicularidade no argumento 5, noção de ângulo raso no argumento 6, ângulos suplementares no argumento 7 e propriedades de retas paralelas e perpendiculares no argumento 8. Segundo Van Hiele, no nível da dedução informal (nível 3), o estudante consegue estabelecer inter-relações de propriedades dentro de figuras, sendo capaz de deduzir propriedades de uma figura, o que pode ser observado no comportamento desse grupo de alunos. Além disso, para indivíduos que apresentam características desse nível, as definições passam a ter significado e são capazes de acompanhar ou elaborar argumentos informais, comportamento observado nos alunos analisados nessa atividade.

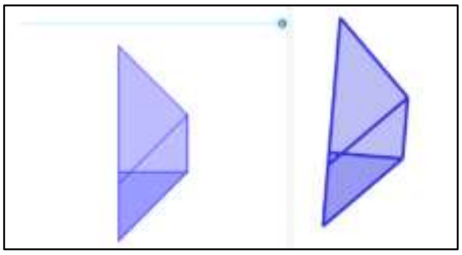
Salientamos que a manipulação da dobradura no GeoGebraBook possibilitou aos alunos construírem uma prova informal, sendo utilizada a folha de papel A4 apenas para registro dos dados. Conforme Santos-Trigo et al. (2016), realçamos que o raciocínio matemático envolve explorações informais, formulação de conjecturas e explicações parciais. Também, corroborando com Notare e Basso (2018), na geometria euclidiana a argumentação tem papel fundamental para a compreensão e validação de teoremas, que caracterizam a essência axiomática-dedutiva desse campo da Matemática.

Nessa argumentação, evidencia-se que os alunos construíram ou utilizaram uma série de conceitos matemáticos, como perpendicularidade, paralelismo, bissetriz, ângulos suplementares, e organizaram uma sequência lógica de argumentos, característica do pensamento geométrico. Assim como De Villiers (1997) afirma, a aprendizagem ocorre quando o aluno usa argumentações para explicar um conceito. Evidentemente, não temos uma argumentação formal, mas uma sequência de argumentos que explicam a veracidade de suas observações, conforme defendem Basso e Notare (2015).

Dobradura 4: por que forma um trapézio?

A terceira dobradura que analisaremos nesse artigo refere-se à Dobradura 4 do livro digital, que forma um trapézio (Figura 7). Trazemos aqui as características da figura construída observadas pelos alunos a partir da manipulação dinâmica (Quais as características da figura construída? Por quê?). A resposta dos alunos para essas questões foi: “*quadrilátero, dois lados paralelos, dois lados concorrentes, azul, formado por 3 triângulos*”.

Figura 7 - Dobradura 4



Fonte: Acervo pessoal

Analisando a resposta, observamos que os alunos não apresentaram argumentações sobre suas observações, estabelecendo suas conclusões a partir da observação visual sobre as características da dobradura. Destacamos que os alunos, na primeira dobradura (não analisada nesse artigo), identificaram características sobre a aparência física das figuras e, nessa dobradura, já são capazes de identificar propriedades geométricas, o que, segundo Gravina (2001), revela um processo de aprendizagem de geometria. Os alunos definem a figura como um quadrilátero pelas suas propriedades, apresentando indícios do nível 2 do modelo de Van Hiele.

Ao serem questionados sobre as medidas dos ângulos da figura (O que podemos dizer sobre os ângulos da figura construída? Por quê? e que medidas tem esses ângulos? Por quê?), foi possível perceber a facilidade para encontrar e observar diretamente o valor dos ângulos, conforme a resposta “*dois obtusos e dois agudos. Dois ângulos de 45 graus e dois de 135 graus*”. Nessa resposta, os alunos argumentaram verbalmente sobre as medidas dos ângulos em debate em sala de aula: os ângulos estão sendo dobrados ao meio (ou seja, as dobras determinam bissetrizes dos ângulos). Portanto, os ângulos medem 45° e, como esses ângulos têm medidas menores que 90°, são ângulos agudos. Para o outro ângulo, os alunos perceberam, a partir da exploração da dobradura no GeoGebra que, ao realizar a dobra, está sendo subtraído 45° do ângulo de um raso, pois, observaram que a dobra é bissetriz do ângulo. Assim, concluíram que o outro ângulo do trapézio mede 135° e o classificaram como obtuso, pois suas medidas são maiores 90°.

Com isso, observamos indícios do nível 3, pois os alunos estabelecem inter-relações de propriedades na dobradura e formulam argumentos informais. Ao argumentarem sobre as medidas dos ângulos utilizando a dobradura, constataram a veracidade de suas conjecturas iniciais, corroborando com De Villiers (1997), que afirma que a motivação para uma argumentação de determinada propriedade geométrica é a convicção da mesma, ou seja, o desenvolvimento de uma argumentação tende a ser feito após tomar-se uma propriedade como verdadeira. Nesse processo de manipulação e observação de dobraduras no GeoGebraBook seguidos de perguntas, os alunos percorrem um caminho de argumentos visuais que, segundo Santos-Trigo et al. (2016), contribui para o caminho de argumentos mais formais, a partir do estabelecimento de relações entre o raciocínio empírico e o raciocínio dedutivo. Observamos, nas primeiras respostas dessa dobradura, que os alunos apresentaram noções intuitivas, sem argumentações, mas depois avançam para justificar suas conjecturas iniciais, corroborando com Gravina (2001).

Evidentemente, nos dados apresentados e analisados, verificamos que os alunos não apresentaram uma argumentação formal, clássica da Geometria Euclidiana, mas há evidências de argumentações que explicam a veracidade de suas observações, corroborando com De Villiers (1997), Santos-Trigo et al. (2016) e Basso e Notare (2015), que defendem que o processo de prova na educação básica pode ser desassociado do rigor matemático. Percebemos nas análises dos dados que os alunos avançaram no processo de aprendizagem de Geometria, pois conforme Gravina (2001), esse processo ocorre quando o aluno passa de um estágio de apenas identificar uma figura geométrica pela sua aparência física, para determinar a figura geométrica por suas propriedades. Atividades que provocam o exercício da argumentação e justificativa favorecem esse processo e realçamos, com os dados dessa investigação, que isso é possível.

Os alunos participantes da pesquisa, desafiados pelas atividades virtuais de dobradura, foram convidados a vivenciar ações importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico, como explorar, manipular, conjecturar, testar e argumentar. Os argumentos apresentados pelos estudantes não consistem em provas rigorosas de Geometria, mas revelam um processo importante de desenvolvimento do pensamento geométrico e nos encorajam no trabalho de resgate de atividades de argumentação na sala de aula de Matemática da escola básica.

Considerações finais

Essa pesquisa teve o objetivo de investigar o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico por meio de argumentação nas aulas de matemática da Educação Básica. Ambientes de geometria dinâmica trazem novas oportunidades para transformar o estudo de geometria, preservando sua essência axiomática-dedutiva que valoriza a argumentação, mas não de forma rígida e distante dos níveis de pensamento dos alunos. O resgate e revalorização de habilidades matemáticas de exploração, testes, conjecturas e argumentações foi o propulsor desse estudo. A partir de atividades de manipulação de dobraduras virtuais no GeoGebra, desenvolvidas nesse estudo, os alunos tiveram a oportunidade de vivenciar ações importantes do pensamento geométrico, ou seja, identificaram regularidades e propriedades de figuras geométricas que se formavam e, em seguida, argumentaram sobre suas constatações.

Destacamos que o desafio de argumentar sobre as conjecturas elaboradas pelos estudantes, proporciona, não só um trabalho inicial com a construção de provas geométricas, mas também impulsiona a apropriação de conceitos e propriedades geométricas. Evidentemente, os argumentos apresentados pelos alunos não caracterizam demonstrações matemáticas formais, mas evidenciam que é possível esse trabalho em sala de aula, com uma versão contemporânea possibilitada pela geometria dinâmica.

Recebido em: 12/03/2021
Aprovado em: 19/12/2023

Referências

BASSO, M. & NOTARE, M. Pensar com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, *v. 13*, n. 2, 2015.

BOGDAN, R. & BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1994.

CROWLEY, M. L. **Aprendendo e Ensinando Geometria. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. São Paulo: Atual Editora LTDA, 1996, p. 1-20.

DE VILLIERS, M. The Role of Proof in Investigative, computer-based Geometry: Some personal reflections. **Chapter in Schattschneider**, D. & King, J. (1997). Geometry Turned On! Washington: MAA, p. 15-24, 1997.

GRAVINA, M. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo** (Tese de doutorado, curso de Pós-Graduação em informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul). UFRGS, Porto Alegre, 2001. Disponível em http://hdl.handle.net/10183/2545. Acesso em: 16/03/2019.

GRAVINA, M. & CONTIERO, L. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 9, n. 1, 2011.

NASSER, L. A teoria de Van Hiele para o ensino de geometria. **Anais do 1° Seminário internacional de educação matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro, p. 29-40, 1993.

NOTARE, M., BASSO, M. Tecnologia na Educação Matemática: Trilhando o caminho do fazer ao compreender. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 10, n. 3, 2012.

NOTARE, M., BASSO, M. Argumentação e Prova Matemática com Geometria Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 16, n. 1, 2018.

SANTOS-TRIGO, M., MORENO-ARMELLA, L. & CAMACHO-MACHÍN, M. Problem solving and the use of digital Technologies within the Mathematical Working space framework. **ZDM Mathematics Education**, *48*, p. 827-842, 2016.