emd Ensino da Matemática em Debate

DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.2021v8i2p117-137

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS: um estudo sobre o *Design* de Problemas e o Conhecimento Matemático para o Ensino

ARITHMETIC AND GEOMETRIC PROGRESSIONS: a study on Problem Design and Mathematical Knowledge for Teaching

Thalia Leiria Pinto[1]

Eleni Bisognin[2]

RESUMO

Neste artigo são apresentados resultados parciais de uma pesquisa realizada com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de investigar as contribuições do Design ou de Problemas e da metodologia de Resolução de Problemas para a construção de conhecimentos matemáticos para o ensino do conteúdo de Progressões Aritméticas e Geométricas. Foram propostos aos participantes da pesquisa dez problemas sobre o conteúdo e aplicados de modo remoto. Os dados foram obtidos por meio das respostas escritas das atividades realizadas pelos alunos e das gravações das conversas realizadas por meio de vídeo conferências. Concluiu-se que apesar dos licenciandos apresentarem bons resultados no que diz respeito à metodologia de Resolução de Problemas, eles estão pouco familiarizados com a reformulação ou redesign de problemas, pois em suas respostas apareceram poucas modificações nos enunciados propostos. Em relação à construção de conhecimentos matemáticos para o ensino referentes às Progressões Aritméticas e Geométricas, constatou-se que há indícios da construção de tais conhecimentos pelos licenciandos, embora a maioria das resoluções ainda sejam baseadas em aplicações de fórmulas.

Palavras-chave: *Ensino de Matemática; Design de Problemas; Formação Inicial de Professores.*

ABSTRACT

This article presents partial results of a research carried out with students of a Mathematics Degree course, with the objective of investigating the contributions of Design or Problems and the Problem Solving methodology for the construction of mathematical knowledge for teaching content of Arithmetic and Geometric Progressions. Ten research questions about the content were proposed to the research participants and applied remotely. The data were obtained through written responses to the activities carried out by the students and recordings of the conversations carried out by means of video conferences. It was concluded that although the undergraduate students present good results with regard to the Problem Solving methodology, they are unfamiliar with the reformulation or redesign of problems, because in their answers there were few changes in the proposed statements. In relation to the construction of mathematical knowledge for teaching related to Arithmetic and Geometric Progressions, it was found that there is evidence of the construction of such knowledge by the undergraduates, although most resolutions are still based on application of formulas.

Keywords*: Mathematics teaching; Problem Design; Initial Teacher Training.*

[1]. Mestra em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana – RS. E-mail: thalia.leiriap@gmail.com.

[2]. Professora doutora no Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Matemática Universidade Franciscana – RS. E-mail: eleni@ufn.edu.br.

Introdução

De acordo com Saviani (2013), a Resolução de Problemas faz parte da vida dos seres humanos e serve como uma ponte para o aluno descobrir o mundo que o cerca. Neste contexto, esta metodologia é capaz de promover situações que façam o estudante apresentar seus próprios procedimentos, suas ideias, desenvolvendo habilidades básicas como verbalizar, ler, interpretar e produzir textos. Tais habilidades podem auxiliar tanto na compreensão da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento que podem estar relacionadas com os problemas propostos (SMOLE; DINIZ, 2001).

A partir da metodologia de Resolução de Problemas se faz possível a utilização do processo de *Design* de Problemas, o qual promove a estruturação de problemas sobre determinada temática. Dessa maneira, aliar esta metodologia com o *Design* de Problemas possibilita aos estudantes o desenvolvimento da aprendizagem durante a resolução de problemas, qualificando o trabalho docente, pois ele poderá explorar o conteúdo matemático além de quadro e giz (TICHÁ; HOSPESOVÁ, 2013).

No que se refere ao desenvolvimento de problemas, os conteúdos de Progressões Aritméticas e Geométricas têm grande potencial na exploração de problemas que envolvem situações cotidianas. Maia (2011) relata que o ensino das Progressões pode ser problematizado com questões do cotidiano, facilitando a compreensão dos estudantes e mostrando a aplicabilidade da Matemática em um contexto histórico e real.

No entanto, independentemente do conteúdo a ser trabalhado, é preciso ressaltar que para que os problemas matemáticos sejam eficientes na aprendizagem dos alunos, o professor deve ter conhecimento tanto do conteúdo matemático quanto do pedagógico. Neste contexto, seguindo os estudos de Shulman (1986; 1987), Ball, Thames e Phelps (2008) construíram categorias e subcategorias de conhecimentos que são essenciais para o professor de Matemática, as quais serão trazidas nos pressupostos teóricos deste trabalho.

Com o objetivo de investigar as contribuições do *Design* de Problemas e da metodologia de Resolução de Problemas para a construção de conhecimentos matemáticos para o ensino, foi desenvolvida uma pesquisa de mestrado em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

A pesquisa realizada foi do tipo qualitativa, utilizando o método qualitativo estudo de caso, do tipo descritivo. A mesma foi desenvolvida com seis acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal Farroupilha, localizado no Rio Grande do Sul e, baseou-se na aplicação de dez problemas sobre os conteúdos de Progressões Aritméticas e Geométricas. Foram escolhidos tais conteúdos pela sua relevância, pelas dificuldades que os alunos apresentam e porque esses conceitos podem ser trabalhados por meio de diversas representações matemáticas. Para isso, analisou-se como esses conteúdos são apresentados nos livros dos autores Dante (2013), Paiva (2010) e Iezzi et al. (2013) para, posteriormente, desenvolver os problemas expostos neste trabalho.

Neste artigo serão apresentados os resultados referentes a dois problemas aplicados, um sobre o conteúdo de Progressão Aritmética e outro relacionado ao conteúdo de Progressão Geométrica. Os resultados que constam nesta investigação demonstram que os licenciandos estão pouco familiarizados com a reformulação ou *redesign* de problemas e, também, que há indícios da construção de conhecimentos matemáticos para o ensino, referentes às Progressões Aritméticas e Geométricas nas respostas dos futuros professores.

Resolução de Problemas

Bigode (2014, p. 22) ressalta que "a Matemática é uma ciência poderosa, seja por suas aplicações e conexões com outras áreas do conhecimento, seja como ferramenta para a resolução de problemas da vida cotidiana e de outras ciências". Diante disso, tem-se que com a exploração de alguns conceitos matemáticos, por meio da Resolução de Problemas, se faz possível que o estudante relacione o que está aprendendo em suas aulas de Matemática com as situações de seu dia a dia, e com outras áreas do conhecimento, tornando a disciplina mais interessante e compreensível.

De acordo com Almeida, Gomes e Madruga (2020), a Resolução de Problemas é uma tendência do campo da Educação Matemática que tem proporcionado a discussão de novas perspectivas teóricas e metodológicas designadas ao ensino e aprendizagem da Matemática escolar. Todavia, embora esta metodologia esteja com bastante destaque atualmente, o estudo sobre a Resolução de Problemas é bastante recente, visto que Onuchic (1999) relata que os educadores matemáticos perceberam a importância da metodologia de Resolução de Problemas entre os anos de 1980 e 1990, período que eles decidiram ter um olhar mais rebuscado para a capacidade de resolver problemas.

Ainda, durante os estudos sobre a Resolução de Problemas, Arsac, Germain e Mante (1991) discutiram sobre os problemas abertos, os quais segundos os autores, são aqueles que não têm relação com os últimos conteúdos propostos em aula, mas permite ao aluno que seja possível resolvê-los pela familiaridade com o tema, visto que eles devem fazer parte da realidade do discente. Os problemas abertos podem possuir uma ou mais soluções, possibilitando que os estudantes entrem em conflitos cognitivos para encontrar o resultado (ARSAC; GERMAIN; MANTE, 1991). A proposta de problemas abertos favorece o trabalho em duplas ou grupos, pois possibilita que os estudantes discutam sobre as possíveis soluções, para após, entrarem em um consenso sobre o resultado, favorecendo a aprendizagem dos próprios (MEDEIROS, 1999).

De acordo com Medeiros (1999, p. 6):

> Um problema aberto tem por objetivo permitir que o aluno desenvolva um processo de resolução de problemas que nós chamaremos "processo científico", ou seja, onde o aluno desenvolverá a capacidade de tentar, supor, testar e provar o que for proposto como solução para o problema, implicando uma oposição aos problemas fechados.

Os problemas abertos diferem dos problemas fechados. Nos problemas abertos o estudante, com o intuito de encontrar o resultado desejado, necessita encarar diversos desafios, pertencentes a um contexto real e específico propostos pelo professor. Neste caso, o professor atua primeiramente como mediador, a partir das ideias levantadas pelos alunos e, após, ocorre a análise e consenso sobre as respostas (BILLY et al., 1995). Já nos problemas fechados, o aluno tem o papel de solucionador de uma coleção de problemas escolhidos pelo professor, o qual utiliza o método expositivo (MEDEIROS, 1999).

Conforme Polya (1978), para ensinar por meio de problemas demanda que seja observado todo o processo utilizado pelo aluno para alcançar a solução, isto é, não se deve ter o foco somente no resultado final. Algumas das estratégias advindas do autor supracitado tornaram-se populares no âmbito da Educação Matemática, pois ele relata que o principal objetivo do ensino deveria ser o "ensinar a pensar". Neste contexto, para o autor:

> Ensinar a pensar significa que o professor de Matemática não deveria simplesmente comunicar informação, mas deveria também tentar desenvolver a habilidade dos estudantes em usarem a informação transmitida: ele deveria enfatizar o saber-fazer, as atitudes úteis e os hábitos da mente desejáveis (POLYA, 1978, p. 100).

De acordo com Polya (1978), o professor não deve ser um mero transmissor de conhecimentos, mas sim ter um papel de mediador, para que auxilie na geração de ideias dos alunos, desenvolvendo a criticidade e a autonomia dos próprios. Corroborando a isso, Onuchic (1999, p. 208) traz que: "quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão".

Nunes (2010) ressalta que Onuchic (1999) organizou algumas questões que podem ajudar o professor a escolher ou a criar problemas com os quais irá trabalhar na metodologia de Resolução de Problemas. São elas:

> 1. Isso é um problema? Por quê?
> 2. Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema?
> 3. Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
> 4. Para que séries acredita ser este problema adequado?
> 5. Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
> 6. Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
> 7. Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema?
> 8. Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
> 9. Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais? (NUNES, 2010, p. 94)

Tais perguntas servem de orientação para o professor que está disposto a trabalhar com a metodologia de Resolução de Problemas, pois faz com que o docente reflita sobre os problemas que irá propor aos seus alunos.

As autoras Onuchic e Allevato (2011, p. 79) salientam que no ensino por meio da metodologia de Resolução de Problemas, "[...] o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seus próprios conhecimentos e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo". Sendo assim, na concepção das autoras, a metodologia tratada pode proporcionar que sejam construídos conteúdos ainda não trabalhados em sala de aula, utilizando a própria como uma ponte para explicações referentes ao uso adequado das representações matemáticas.

Outra autora que ressalta a importância da utilização da metodologia de Resolução de Problemas é Figueiredo (2008). Ela coloca que esta metodologia proporciona aos estudantes uma compreensão sobre o seu cotidiano. É válido ressaltar que o professor pode reformular problemas para que se adequem com a realidade da turma que trabalha, fazendo com que a Matemática tenha sentido para o estudante.

Polya (1997, p. 2) relata que: "[...] resolver problemas é a realização específica da inteligência[3], e a inteligência é o dom específico do homem. Se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta [...]". Polya (1978), ainda destaca quatro fases para resolver um problema:

> (1) Compreensão do problema: é fundamental para o aluno compreender o problema. O enunciado verbal precisa ficar bem entendido assim como o problema escolhido não poderá ser muito fácil, nem muito difícil. É importante fazer perguntas. Por exemplo: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais as condições? É possível satisfazer essas condições? Qual a condicionante? A construção de figuras para ilustrar a situação proposta também poderá ser útil.
> (2) Estabelecimento de um plano: para estabelecer um plano, é importante descobrir conexões entre os dados e a incógnita; considerar problemas auxiliares ou particulares caso uma conexão não seja encontrada no tempo estabelecido. Neste caso, algumas perguntas podem ajudar. Você conhece algum problema comparável a este? É possível utilizá-lo? Olhe para a incógnita e procure encontrar um problema parecido, que tenha uma incógnita semelhante. Caso encontre um problema análogo, tente aproveitá-lo como elemento auxiliar na resolução do problema proposto. Se não conseguir resolver o problema com os dados dispostos procure alterar esses dados e a incógnita, de modo que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos do problema. Não esqueça de levar em conta todas as incógnitas, dados e condições apresentadas, as quais poderão encaminhá-lo à solução desejada.
> (3) Execução do plano: para executar o plano, é muito mais fácil. Para conseguir fazer isso, é importante que o aluno tenha conhecimento prévio e concentração para alcançar o objetivo proposto; paciência para verificar cada passo do plano e estar convicto em algumas respostas como, por exemplo: é possível perceber e demonstrar que o passo está correto?
> (4) Retrospecto: ao fazer o retrospecto, poderá verificar os resultados obtidos e os

[3] De acordo com Polya (1997) "[...] a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas: problemas do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos e quebra-cabeças. O aluno desenvolve sua inteligência usando-a; ele aprende a resolver problemas resolvendo-os".

> argumentos utilizados corrigindo-os e aperfeiçoando-os se necessário. Ainda, algumas questões podem ser levantadas: Pode-se chegar ao resultado por outro caminho? É possível utilizar o resultado, ou o método em algum outro problema? Qual será a utilidade desse resultado? (POLYA, 1978, p. 4-10).

Vale ressaltar que as fases expostas acima só terão eficácia se tanto o professor quanto os alunos estiverem motivados e interessados em trabalhar com a metodologia de Resolução de Problemas, haja vista que ela pode proporcionar muitos benefícios na aprendizagem do estudante, possibilitando que ele crie suas próprias conjecturas sobre conceitos matemáticos (VIANNA, 2002).

A partir das ideias tratadas acima, pode se inferir que a Resolução de Problemas, aliada à dedicação e interesse dos estudantes pode ser uma facilitadora da aprendizagem, uma vez que estimula a criatividade do aluno, o pensar matemático e a autonomia, pois é preciso que ele crie esquemas mentais para solucionar os problemas propostos.

Design de Problemas

Figueiredo (2017) define *Design* como uma atividade, na qual exige planejar, desenvolver, implementar, bem como tomar decisões. Assim, os *designers* desenvolvem a criatividade e autonomia, pois precisam desenvolver estratégias que os auxiliem a solucionar o que foi planejado.

Conforme Figueiredo e Groenwald (2019), a construção ou reformulação de problemas pode ser associada ao *Design* de um problema matemático, pois torna possível a modificação de um problema com a finalidade de torná-lo compreensível e contextualizado.

Em relação à reformulação de problemas, os autores Stoyanova e Ellerton (1996) categorizaram os problemas em três tipos: livres, semiestruturados e estruturados. Os livres são problemas baseados em uma situação que pode surgir naturalmente, havendo ou não uma orientação sobre o tema escolhido; os semiestruturados se baseiam na formulação de um problema a partir da exploração de uma situação aberta, englobando conhecimentos, capacidades, conceitos ou relações e; os estruturados se referem à formulação de problemas a partir de um problema bem definido (STOYANOVA; ELLERTON, 1996). Salienta-se que os problemas explanados neste trabalho foram do tipo estruturado, pois partiram de conceitos definidos pela pesquisadora.

Conhecimento Matemático para o Ensino

Shulman (1987) desenvolveu uma base do conhecimento para o ensino, a qual elencou sete conhecimentos necessários para um professor, os quais são: Conhecimento do Conteúdo, Conhecimento Pedagógico do Conteúdo; Conhecimento do Currículo; Conhecimento das Características Cognitivas dos Alunos; Conhecimento dos Contextos Educacionais e Conhecimento dos Objetivos Educacionais. O maior destaque dado pelo autor é para o Conhecimento Específico do Conteúdo e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.

Apoiados nos estudos de Shulman (1987), Ball, Thames e Phelps (2008) aprofundaram suas pesquisas em relação ao ensino de Matemática, construindo categorias acompanhadas de subcategorias para os conhecimentos necessários a um professor de Matemática. Abaixo têm-se a explanação sobre as categorias e subcategorias de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008).

No que se refere à categoria "Conhecimento Específico do Conteúdo", tem-se as subcategorias de: Conhecimento Comum de Conteúdo (*Common Contente Knowledge (CCK)*), que baseia-se em habilidades e conhecimentos matemáticos utilizados em qualquer âmbito, podendo ser fora do contexto de ensino; Conhecimento Especializado do Conteúdo (*Specialized Content Knowledge (SCK)*), que são as habilidades e conhecimentos matemáticos específicos do ensino; e por fim, Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (*Horizon Content Knowledge (HCK)*), o qual diz respeito ao conhecimento que o professor relaciona para desenvolvimento conceitual de tópicos matemáticos no currículo.

Já na categoria "Conhecimento Pedagógico do Conteúdo", são elencadas as seguintes subcategorias: Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (*Knowledge of Content and Students (KCS)*), que é combinação entre o conhecimento sobre os alunos e sobre a compreensão deles em Matemática; Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (*Knowledge of Contente and Curriculum (KCC)*), que consiste em um subdomínio do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo; e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (*Knowledge of Content and Teaching (KCT)*), o qual é uma combinação de conhecimento sobre ensino e Matemática.

No presente trabalho foram analisados três dos conhecimentos explicitados acima, o Conhecimento Especializado do Conteúdo, o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino. Sendo assim, teve-se o intuito de perceber tanto a forma como eles usam seu conhecimento matemático para solucionar os problemas, quanto sobre os seus modos de ensinar mediante as suas concepções como docentes.

Metodologia

A pesquisa realizada é de cunho qualitativo, pois preocupou-se com o desenvolvimento do processo dos participantes da pesquisa, preconizando suas trajetórias. Corroborando a isto, Bicudo (2019) enfatiza que a pesquisa qualitativa tem relação com o subjetivo, possibilitando que o indivíduo participante dela demonstre suas percepções e experiências.

A amostragem e a abordagem de análise de dados apresentadas enquadram a pesquisa como um estudo de caso com propósito descritivo, pois ela descreve como são os conhecimentos e práticas, sobre os conteúdos de Progressões Aritméticas e Geométricas, de professores de Matemática em formação inicial. De acordo com Ponte (2006, p. 2) "um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social". O objetivo do próprio é ter a compreensão sobre o "como" e os "porquês" dessa entidade, enfocando nos interesses do pesquisador (PONTE, 2006).

Essa pesquisa foi desenvolvida com seis alunos de um curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal Farroupilha, localizado no Rio Grande do Sul. Diante disso, teve-se o cuidado de preservar as identidades dos licenciandos, denominando-os de P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6. Estes seis licenciandos estavam matriculados na disciplina de Fundamentos de Álgebra e já haviam cursado a disciplina de Matemática Discreta, a qual possui em sua grade curricular os conteúdos de Progressões Aritméticas e Geométricas. Vale ressaltar que todos os participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

A aplicação da pesquisa ocorreu de maneira remota e no período de 03 a 31 de Julho de 2020. Com isso, foram enviados dez problemas via e-mail aos licenciandos de forma fragmentada, ocasionando um total de quatro envios, sendo enviados dois e três problemas por vez. Assim, os participantes da pesquisa retornaram suas respostas por e-mail enviando para a pesquisadora os registros, tanto escritos à mão quanto por documento de texto, com o prazo de cinco dias para o retorno das respostas de dois problemas e de sete dias para o retorno das respostas de três problemas. Após isso, ocorreram quatro encontros em salas virtuais do *Facebook* que duravam de 45 a 60 minutos, as quais proporcionaram discussões e reflexões sobre os problemas propostos. As falas dos licenciandos foram gravadas a fim de elucidar as análises dos problemas.

Cabe destacar que a pesquisadora realizou o processo de *Design* e *redesign* nos dez problemas sobre os conteúdos de Progressões Aritméticas e Geométricas, para após, serem aplicados com licenciandos em Matemática. No entanto, neste trabalho serão trazidos dois problemas, um referente à Progressão Aritmética e outro relacionado à Progressão Geométrica. A escolha destes dois problemas foi por eles demandarem a exploração de aspectos figurais e gráficos, importantes na visualização de conceitos matemáticos. Além disso, notou-se a relevância de trazer o Problema 2, pois ele trata do contexto pandêmico que estamos vivenciando, ocasionado pela COVID-19, o qual teve início em 2020 e, que se estende até o atual momento.

As respostas dos licenciandos foram analisadas de acordo com as categorias de análise de Ball, Thames, Phelps (2008) e, também a partir dos indicadores elaborados pela própria autora, conforme está descrito no Quadro 1.

Quadro 1 – Categorias e Indicadores para análise de dados

Categorias	Indicadores
Conhecimento Especializado do Conteúdo	Uso adequado de símbolos matemáticos.
	Uso adequado da linguagem Matemática.
	Resolução correta do problema proposto.

Conhecimento do Conteúdo no Horizonte	Relação do conteúdo matemático do problema proposto com outros conteúdos matemáticos
Conhecimento do Conteúdo e do Ensino	Maneiras de como ensinar o conteúdo matemático apresentadas pelos licenciandos.

Fonte: Próprio autor.

Além disso, analisou-se como foi realizada a reformulação ou *redesign* dos problemas com a respectiva resolução. É válido destacar que no Problema 2 não foi solicitado aos licenciandos que fizessem o *redesign*. No entanto, o processo de *design* foi realizado pela pesquisadora neste problema.

Por fim, para os problemas que exigiam a resolução por parte dos licenciandos, foram utilizadas as fases da metodologia de Resolução de Problemas propostas por Polya (1978). Tais fases puderam ser vistas nas respostas dos licenciandos e explanadas no decorrer do texto. Ressalta-se que a última fase, o retrospecto, foi realizada nos encontros virtuais propostos pela pesquisadora.

Resultados

Os problemas aplicados com os seis licenciandos envolveram os conteúdos de Progressões Aritméticas e Geométricas e contaram com os registros dos participantes seguidos de discussões e reflexões realizadas pela pesquisadora. A seguir está o enunciado do primeiro problema.

Quadro 2 – Enunciado do Problema 1

1) Observe os desenhos.

a) A partir dos desenhos e analisando a quantidade de segmentos, é possível observar um padrão? Se sim, qual o termo geral encontrado?
b) Explique como você conseguiu descobrir o termo geral.
c) Com base no desenho, elabore um enunciado e explane como resolveria o problema produzido para seus futuros alunos.

Fonte: Próprio autor.

No Problema 1, foi proposta a observação de um desenho composto por traços, cujo número vai aumentando de uma figura para outra. Com isso, na letra *a* deste problema, solicitou-se que os licenciandos encontrassem um padrão nessas figuras e, ainda, descobrissem um termo geral que representasse a quantidade de segmentos de cada figura. Todos os licenciandos afirmaram que existia um termo geral para a sequência proposta e, trouxeram o mesmo em suas respostas. Exceto o licenciando P_4, que afirmou que existia somente um padrão, pois a cada figura aumentavam dois traços. Para elucidar o que foi relatado, tem-se a resposta do licenciandos P_5, na Figura 1, o qual foi um dos licenciandos que apresentou a resposta de maneira correta.

Figura 1 – Resposta do licenciando P_5 na letra a do Problema 1

a) Sim, é possível observar um padrão.
Para obter o termo geral, temos:
$a_1 = 3\ ;\ a_2 = 5\ ;\ a_3 = 7\ ;\ r = 2$

$a_n = a_1 + (n-1)\,.\,r \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)\,.\,2 \Rightarrow a_n = 3 + 2n - 2 \Rightarrow \boldsymbol{a_n = 2n + 1}$

Termo geral encontrado: $\boldsymbol{a_n = 2n + 1.}$

Fonte: Dados da Pesquisa, 2020.

Ficou evidente, pela resposta do licenciando P_5 que ao observar a figura proposta, ele conseguiu retirar os dados que constituem a expressão do termo geral da Progressão Aritmética.

Em relação à Resolução de Problemas, com exceção do licenciando P_4, os demais licenciandos compreenderam o que o item solicitava, traçando o plano de resolução por meio da expressão do termo geral da Progressão Aritmética, ou seja, eles souberam que a expressão poderia ser utilizada ao retirarem o primeiro e segundo termos (a_1 e a_2), notando o padrão que existia de um termo para outro (razão dois). Ainda, executaram este plano ao substituir os dados encontrados na expressão do termo geral, realizando os devidos cálculos.

O licenciando P_4 notou que o padrão existia e o mostrou por meio de uma tabela, como pode ser visto na Figura 2. Todavia, não respondeu a segunda pergunta proposta pela pesquisadora sobre a existência de um termo geral.

Figura 2 – Resposta do licenciando P_4 na letra a do Problema 1

a) O padrão indica que os tracinhos aumentam de 2 em 2.

Figura	Tracinhos
1ª	3
2ª	5
3ª	7
4ª	9

Fonte: Dados da Pesquisa, 2020.

Pode-se inferir, desse modo, que na fase do retrospecto o licenciando P_4 notou que seu plano não seria suficiente para responder o problema, tendo, então, que aperfeiçoá-lo. Vale salientar que a última fase da Resolução de Problemas, proposta por Polya (1978) aconteceu no momento do encontro virtual, em que os licenciandos compararam suas respostas com a explicação realizada pela pesquisadora.

Ainda, ressalta-se que não foi comentado pelos licenciandos sobre a influência das cores nos traços da figura apresentada no Problema 1. Desse modo, acredita-se que as mesmas não influenciaram nas percepções dos licenciandos em relação aos caminhos percorridos para a resolução.

Na letra *b* do mesmo problema, após os licenciandos terem descoberto o termo geral, deveriam explicar como fizeram para isso. Os licenciandos P_1, P_2, P_3, P_5 e P_6 relataram que encontraram o termo geral na obtenção de dados que a figura proporcionava, ou seja, ela possuía o primeiro termo a_1 e a razão da Progressão Aritmética, possibilitando substituir os valores e encontrar o termo geral. Todavia, embora o licenciando P_4 tenha respondido, na letra *a*, que a figura aumentava de dois em dois traços, ele se equivocou em sua resposta na letra *b*, pois mostrou o termo geral de uma Progressão Geométrica. Segue abaixo, a Figura 3, a qual traz a explicação do licenciando P_5 e, logo após, a resposta equivocada do licenciando P_4, na Figura 4.

Figura 3 – Resposta do licenciando P_5 na letra b do Problema 1

b) Apenas usei a fórmula do termo geral da uma P.A, pois vi que existia um padrão de aumentar dois traços a cada nova figura.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2020.

Nota-se que o licenciando P_5 utilizou uma resposta condizente com os cálculos que desenvolveu, explicando assim, que foi possível utilizar a Progressão Aritmética, pois observou o padrão na figura. Logo, tem-se que os licenciandos P_1, P_2, P_3, P_5 e P_6 deixaram evidente em suas respostas o Conhecimento Especializado do Conteúdo. Por outro lado, na Figura 4, é mostrada a resposta do licenciando P_4, o qual apresentou uma falha na aplicação de conceitos sobre o conteúdo trazido no problema.

Figura 4 – Resposta do licenciando P_4 na letra b do Problema 4

b) É possível descobrir o termo geral analisando a fórmula e os dados que o desenho nos remetem, sendo:

$a_1 = 3$

$q = 2$

a_n = número de elementos

Sendo assim a fórmula utilizada o termo geral de uma PG.

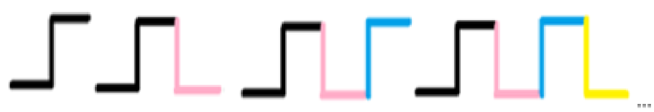
$a_n = a_1 \times q^{n-1}$

Fonte: Dados da Pesquisa, 2020.

Diante disso, pode-se perceber que faltou ao licenciando P_4 o Conhecimento do Conteúdo, pois não relacionou o padrão que havia na figura com a Progressão Aritmética.

Para finalizar o Problema 1, foi solicitado na letra *c*, que os licenciandos elaborassem um enunciado juntamente com a sua resolução, a partir do desenho proposto. Assim, com exceção do licenciando P_6, todos os outros alunos utilizaram um enunciado baseado somente na visualização da figura, sem uma contextualização. A seguir, no Quadro 3, são trazidos enunciados desenvolvidos por dois licenciandos, que utilizaram ideias distintas.

Quadro 3 – Respostas dos licenciandos P_5 e P_6 na letra c do Problema 1

Licenciandos	Enunciados dos problemas
P_5	c) Ana estava estudando matemática quando encontrou no livro a sequência abaixo.  Ela ficou muito curiosa e tentou encontrar o termo seguinte dessa sequência. Ajude Ana encontrar os próximos termos da sequência. Como você a ajudaria?
P_6	c) Pedro comprou algumas canetas, e para testá-las começou a criar "traços" em uma folha. O desenho "abaixo" exibe como a figura foi sendo alterada a cada teste. Após o último teste, a figura contava com 21 traços, se o padrão após a segunda caneta se manteve, qual é o nº total de canetas? 

Fonte: Dados da Pesquisa.

Percebeu-se que um licenciando utilizou somente uma relação direta com a figura e o outro já partiu para uma situação contextualizada. Ao ver que somente um licenciando contextualizou o problema a partir da figura, é possível perceber o distanciamento que eles têm com a contextualização de problemas.

Com base nas pesquisas de Crespo (2003) e Leung e Silver (1997), as quais foram realizadas com professores e futuros professores, esperava-se, também que as formulações dos licenciandos fossem mais elaboradas, explorando mais conceitos de Progressão Aritmética. Percebe-se, em questões como estas, uma carência de domínio de conceitos relacionados aos processos de observação e generalização de padrões, visto que não houve exploração dos mesmos para a construção de novos problemas. Acredita-se que a questão de não produzirem problemas muito elaborados, se dá pelo fato dos licenciandos trazerem em sua trajetória um modelo mais tradicional de ensino.

No Problema 1, em suma, foi abordado a exploração da capacidade de visualização, reconhecimento e representação sobre o padrão apresentado na figura. Neste sentido, Polya (1945) salienta que a busca por padrões é uma das estratégias mais essenciais na Resolução de Problemas, haja vista que corrobora para que o formule conjecturas, tornando-se ativo em sua aprendizagem. Corroborando a isto, os autores Vale e Pimentel (2005, p. 14), trazem que "o uso de padrões é uma componente poderosa da atividade matemática, uma vez que a sua procura é indispensável para conjecturar e generalizar".

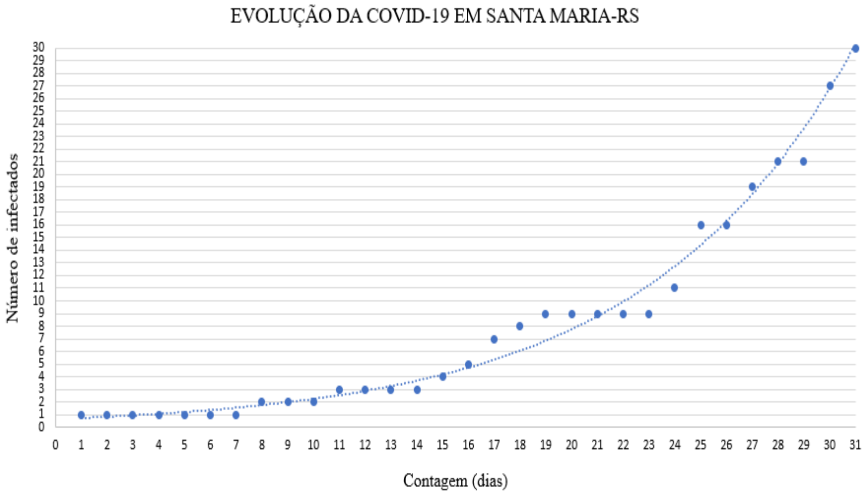
No encontro virtual realizado para discutir sobre o Problema 1, ocorreram alguns questionamentos para os licenciandos, como por exemplo: Qual a opinião de vocês sobre os problemas envolverem desenhos? Vocês utilizariam?. Diante disso, o licenciando P_6 respondeu: "*Acho muito interessante, usaria com toda certeza, pois os desenhos nos problemas fazem com que o aluno note que naquela situação está relacionada a um conteúdo matemático. É interessante pensar também que é possível usar vários tipos de desenhos para explorar uma PA*". Percebe-se que a fala do licenciando foi muito relevante, pois ele entendeu a essência da pesquisa proposta, que consistiu em fazer com que os futuros professores tivessem a visão de que estes problemas podem ser adaptados e usados com diversos públicos.

No que se refere à reformulação de problemas a pesquisadora perguntou, no mesmo encontro virtual relatado acima, se os licenciandos tiveram dificuldade em elaborar o enunciado baseando-se somente em uma figura. O licenciando P_6 relatou "*Achei bem mais complicado, pois tentei contextualizar de forma que o aluno compreendesse, pois a compreensão é uma preocupação*". O licenciando P_3 interagiu com o P_6, dizendo "*Eu não pensei como o colega, só tentei relacionar com a figura mesmo, vi que não criei um problema contextualizado*". Por fim, o licenciando P_4 explanou "*Para mim foi muito difícil transcrever o que eu estava vendo na figura*". Percebeu-se, assim, que os licenciandos tiveram opiniões similares sobre a dificuldade de formular um problema, sendo essa dificuldade maior a partir de uma figura do que em língua natural.

Após o Problema 1, tem-se o segundo problema, o qual envolveu o conteúdo de Progressão Geométrica. O enunciado do Problema 2 está no Quadro 4 a seguir.

Quadro 4 – Enunciado do Problema 2

2) De acordo com dados do Ministério da Saúde, a COVID-19, causada pelo coronavírus SARS-CoV-2, é uma doença contagiosa que surgiu em meados de dezembro de 2019, com os primeiros casos na China. Atualmente, o mundo passa por uma pandemia devido à progressão de contágio da doença. O gráfico a seguir mostra esse crescimento de acordo com o número de pessoas infectadas pela Covid-19 em Santa Maria/RS, no período que foi feita a contagem.



O período descrito no gráfico é de 21 de Março de 2020, primeiro dia da contagem, até 20 de Abril de 2020, totalizando 31 dias, segundo dados da Prefeitura da cidade de Santa Maria. A partir destas informações gráficas, responda algumas questões:

a) Qual(is) conteúdo(s) você observa que pode(m) se relacionar com o problema proposto?
b) Nos próximos dias as contagens em relação às pessoas infectadas continuarão acontecendo. Sendo assim, sabendo que no dia 21 de Março, primeiro dia da contagem, uma pessoa estava infectada com a Covid-19 e no dia 09 de Abril nove pessoas estavam infectadas com a mesma doença, é possível estimar quantas pessoas, aproximadamente, estarão infectadas no dia 10 de Abril de 2020? E no dia 20 de abril? Explique como você pode obter essa informação. Sua resposta está de acordo com a representação gráfica?
c) Em relação a atual situação que estamos vivendo, explique como você, futuro professor, utilizaria *softwares* como o GeoGebra e o Excel para resolver esse problema de modo que o torne compreensível ao seu futuro aluno.

Fonte: Próprio autor.

O Problema 2 traz dados do Ministério da Saúde em relação à COVID-19 por meio de um gráfico, que mostra o crescimento da doença conforme o número de pessoas infectadas em Santa Maria/RS, no período de 21 de Março até 20 de Abril. Sabe-se que a pandemia não tem um crescimento exponencial, porém, nesse curto prazo de tempo a função exponencial é um bom modelo representativo da situação real.

Na letra *a* deste problema, foi questionado aos licenciandos sobre qual(is) conteúdo(s) que poderia(m) ser relacionado(s) com o problema proposto, procurando perceber, a partir das respostas, se os licenciandos apresentavam o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte. No Quadro 5 são explanadas as respostas dos seis licenciandos, a partir da indagação proposta.

Quadro 5 – Respostas dos licenciandos na letra a do Problema 6

Licenciandos	Respostas
P_1	*Função e análise gráfica*
P_2	*Progressão Geométrica e Função Exponencial*
P_3	*Progressão Geométrica e Função Quadrática*
P_4	*Função e análise gráfica*
P_5	*Função Exponencial e Progressão Geométrica*
P_6	*Função Exponencial e Progressão Geométrica*

Fonte: Dados da Pesquisa.

Percebeu-se, por meio das respostas dos licenciandos, que eles relacionaram o gráfico trazido no problema com as seguintes temáticas: Funções, Progressão Geométrica, Função Exponencial, Função Quadrática e Análise gráfica. Os licenciandos P_1 e P_4 cometeram equívoco semelhante ao que ocorreu no Problema 2, envolvendo Progressão Aritmética, em que alguns licenciandos associaram o gráfico com o conteúdo de Funções, sem relatar o tipo de função, ou, também fizeram como o licenciando P_3, que relacionou o conteúdo do problema com uma função que não se enquadra com o comportamento do gráfico proposto. Isto remete à fragilidade dos licenciandos em relação à interpretação gráfica.

Em Brasil (2006) é ressaltado que é imprescindível compreender que a Progressão Geométrica pode ser definida como Função Exponencial, onde o domínio é o conjunto dos números naturais, de modo que não deve ser desenvolvida como sendo um tópico independente, em que o aluno não reconhece como função já estudada. Diante disso, “[...] devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas (“determine a soma...”, “calcule o quinto termo...”) (BRASIL, 2006, p. 75).

Ainda, foi possível observar que os licenciandos P_2, P_5 e P_6 mencionaram corretamente os conteúdos que poderiam ser trabalhados no gráfico, evidenciando que possuíam o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, haja vista que conseguiram relacionar os dois conteúdos já tratados.

Em relação à letra *b*, tendo em vista que a contagem das pessoas infectadas continuaria acontecendo, foi perguntado se era possível estimar quantas pessoas, aproximadamente, estariam infectadas no dia 10 de Abril de 2020 e no dia 20 de abril do mesmo ano, sabendo que no dia 21 de Março (primeiro dia de contagem) uma pessoa estava infectada com a COVID-19 e no dia 09 de Abril nove pessoas estavam infectadas com a mesma doença. Ainda, nesta questão foi solicitado que os licenciandos explicassem como pode ser obtida essa informação e, se ela condizia com a interpretação gráfica.

Neste contexto, os licenciandos P_1, P_4 e P_5 não conseguiram relacionar seus cálculos com o gráfico e trouxeram suas respostas baseadas somente pela visualização gráfica, mostrando fragilidade no que se refere ao Conhecimento Especializado do Conteúdo, visto que ele não foi abordado de uma maneira mais notória; já os licenciandos P_2, P_3 e P_6 desenvolveram a questão de maneira correta, isto é, utilizaram a expressão do termo geral de uma Progressão Geométrica para descobrir a razão, a qual estimava quantos estariam infectados nos dias solicitados no problema. Estes três licenciandos mostraram evidências de Conhecimento Especializado do Conteúdo em suas respostas, pois souberam relacionar o gráfico proposto com uma questão que envolvia Progressão Geométrica. Na Figura 5 tem-se a resposta do licenciando P_3.

Figura 5 – Resposta do licenciando P_3 na letra b do Problema 2

b) Podemos utilizar o termo geral da P.G. para determinar a razão e, com os dados obtidos, resolver o problema.

$$an = a_1 \times q^{n-1}$$

$$9 = 1 \times q^{19}$$

$$q = \sqrt[19]{9}$$

Sendo o a_{21} o termo referente ao dia 10 de abril:

$$a_{21} = 1 \times \left(\sqrt[19]{9}\right)^{20}$$

$$a_{21} \approx 10$$

E o a_{31} o termo referente ao dia 20 de abril:

$$a_{31} = 1 \times \left(\sqrt[19]{9}\right)^{30}$$

$$a_{21} \approx 32$$

Logo, pode-se constatar que as respostas estão próximas aos dados do gráfico.

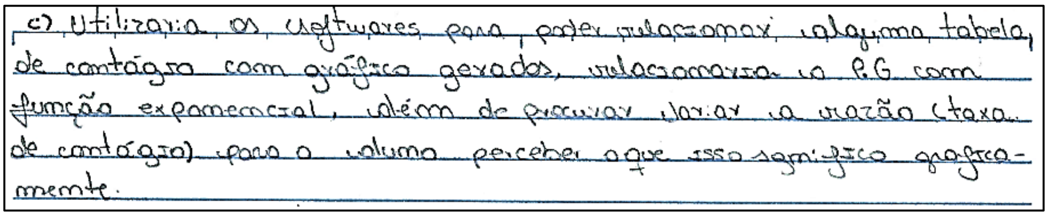
Fonte: Dados da Pesquisa, 2020.

Destaca-se que nas resoluções dos licenciandos P_2, P_3 e P_6 as fases da metodologia de Resolução de Problemas propostas por Polya (1978) foram atendidas com êxito, haja vista que os próprios conseguiram ter uma compreensão correta do problema, traçando os planos sobre como resolver por meio da razão, que foi encontrada a partir dos dados do problema e, da expressão do termo geral da Progressão Geométrica. Com isso, os licenciandos citados anteriormente utilizaram os conceitos de forma coesa no momento de executar o plano, tendo em vista que retiraram os dados e calcularam a razão. Posteriormente substituíram a razão na expressão do termo geral da Progressão Geométrica, constatando que suas respostas estavam próximas com os dados expostos no gráfico. Para finalizar, no momento da fase do retrospecto, realizado virtualmente, tanto os licenciandos que acertaram quanto os que erraram, puderam fazer a verificação de suas resoluções. Aqueles que os planos traçados não foram totalmente certos, perceberam seus equívocos e o que deveria ser novamente planejado.

Ainda, tem-se que licenciando P_3 apresentou características do Conhecimento Especializado do Conteúdo, visto que conseguiu perceber que as respostas condiziam com os dados disponibilizados no gráfico e dependiam somente de aproximações das casas decimais utilizadas para constar os mesmos valores.

Por fim, na letra *c* do Problema 2, levou-se em consideração o atual momento que estávamos vivendo e foi solicitado aos licenciandos que explicassem como utilizariam *softwares* como o GeoGebra e o Excel para resolver o problema proposto, a fim de facilitar a compreensão de seus futuros alunos. Neste sentido, os seis alunos relataram que poderiam ser utilizados tanto o GeoGebra com o Excel para a construção de tabelas e gráficos, baseado no problema proposto. Somente o licenciando P_6 que trouxe uma explicação mais pontual sobre a utilização desses *softwares* no conteúdo de Progressão Geométrica, aliada à Função Exponencial, segue a Figura 6 com a resposta.

Figura 6 – Resposta do licenciando P_6 na letra c do Problema 2


c) Utilizaria os softwares para poder relacionar alguma tabela de contágio com gráfico gerados, relacionando a P.G com função exponencial, além de procurar variar a razão (taxa de contágio) para o aluno perceber o que isso significa graficamente.

Fonte: Dados da Pesquisa, 2020.

Observou-se nas respostas do licenciando P_6 alguns indícios do Conhecimento Especializado do Conteúdo e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, visto que, além de mostrar a sua familiaridade com os *softwares* GeoGebra e Excel, relatou sobre a aplicação com seus futuros alunos, evidenciando sua visão como professor.

No encontro virtual desenvolvido para discussões sobre o Problema 2, a pesquisadora fez alguns questionamentos, como: Tiveram dificuldades para responder o problema proposto? Perceberam rapidamente sobre qual conteúdo se tratava o problema? O que acharam de inserir um problema sobre a situação atual que estamos vivenciando, a COVID-19?

Após a pesquisadora perguntar se tiveram dificuldades e se haviam percebido sobre qual conteúdo se tratava o problema, o licenciando P_3 trouxe a seguinte fala: *"Notei que tinha mudado de Progressão Aritmética para Progressão Geométrica pelo comportamento do gráfico"*. Já o licenciando P_1 relatou que: *"Eu sabia que tinha algo relacionado a PG, mas eu não consegui descobrir o que era, pois não consegui ver uma razão como número inteiro*".

A pesquisadora aproveitou as falas acima para relatar a relação do conteúdo de Progressão Geométrica com a Função Exponencial, visto que é muito importante os futuros professores terem conhecimento sobre isso, não tratando desses conteúdos separadamente, mas sim os abordando de forma contextualizada, de modo que a relação seja natural. Percebeu-se, ainda, outro aspecto relevante e, ao mesmo tempo, preocupante, que é o distanciamento de alguns licenciandos com questões reais, envolvendo estimativas.

Posteriormente, a pesquisadora perguntou a opinião dos licenciandos sobre inserir um problema relacionado a uma situação atual como a que estamos vivenciando, a COVID-19. Diante disso, o licenciando P_6 teve a seguinte fala: *"Acho bem interessante, pois é um assunto que os alunos estão vendo diariamente. Acredito que eles devem ter muitas curiosidades sobre isso, pois é uma coisa que eles estão vivenciando. O professor deve aproveitar para relacionar a matemática com assuntos atuais, para que os alunos se motivem".* Após o relato do licenciando, a pesquisadora buscou complementar, comentando sobre a aplicabilidade da Matemática em uma situação real a qual pode ser explorada no Ensino Médio.

Outro aspecto importante de ser ressaltado é que, embora os licenciandos P_1, P_2, P_4 e P_5 tivessem respondido sobre o uso de tecnologias, eles falaram nos encontros que mesmo estando no 5º semestre do curso de Licenciatura em Matemática, eles nunca utilizaram a construção gráfica nos *softwares* GeoGebra e Excel, somente a construção de tabelas. Diante disso, percebe-se a deficiência que os licenciandos trazem em sua trajetória sobre a representação gráfica com o auxílio de *softwares*. De acordo com Rodrigues (2017, p. 128), a utilização de tecnologias na formação inicial dos professores é de extrema importância, ela ressalta que "[...] seria necessário que os professores das licenciaturas e demais cursos superiores também fossem estimulados a adotar essas ferramentas em suas aulas".

Considerações Finais

A partir dos resultados da pesquisa pode-se concluir que o objetivo proposto foi atingido.

Da análise das respostas dos alunos observou-se que os licenciandos conseguiram trazer em suas respostas as fases da Resolução de Problemas, utilizaram o *redesign* de Problemas para elaborar seus enunciados. Todavia, observou-se que estão pouco familiarizados com a reformulação ou *redesign* de problemas, pois nos seus novos enunciados apareceram poucas modificações, tanto em relação à linguagem, quanto aos conceitos utilizados nos problemas propostos pela pesquisadora.

Quanto aos conhecimentos matemáticos para o ensino referentes às Progressões Aritméticas e Geométricas pode-se inferir que há alguns indícios de sua construção pelos licenciandos, embora no que se refere ao Conhecimento Especializado do Conteúdo, foi possível perceber que as resoluções ainda foram baseadas em aplicações de fórmulas. Em relação ao Conhecimento do Conteúdo e do Ensino observou-se que eles estão focados em apresentar a resolução, mas não explicar os passos utilizados para resolver o problema.

Ao finalizar este trabalho, é válido ressaltar que os problemas trazidos admitem um *redesign* e uma adaptação para diversos contextos, com a finalidade de potencializar a aprendizagem dos estudantes, estimulando a formação de professores de Matemática.

Recebido em: editora
Aprovado em: editora

Referências

ALMEIDA, C. G. de; GOMES, L. P. S.; MADRUGA, Z. E. F. Modelagem Matemática e Resolução de Problemas na Educação: um panorama de pesquisas recentes. **Educação Matemática Debate**, v. 4, n. 10, p. 1-18, 2020.

ARSAC, G., GERMAIN, G; MANTE, M. **Probleme ouvert et situation-problème**. Presses Universitaires de Lyon: França, 1991.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special?. **Journal of teacher education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. (Orgs.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** 6 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

BIGODE, A. J. L. Matemática do cotidiano: um ensaio de problematização a partir do futebol. **Salto para o Futuro. Matemática e a relação com outros campos do saber no ciclo de alfabetização. Ano XXIV-Boletim**, v. 10, p. 22-35, 2014.

BILLY, M. et al. **Entre situation didactique ou situation a-didactique:** regard de l'éleve ou regard du technicien? Repères-IREM, n. 19, AVRIL Topiques éditions, 1995.

BRASIL. Secretaria da educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

CRESPO, S. Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. **Educational Studies in Mathematics**, v. 52, n. 3, p. 243-270, 2003.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

FIGUEIREDO, F. F. **Resolução de Problemas no Ensino de Porcentagem: em busca de uma compreensão pedagógica a partir dos processos reguladores gerais da teoria de Robbie Case**. 2008. 185f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2008.

FIGUEIREDO, F. F. **Design de problemas com a utilização das tecnologias digitais na formação inicial de professores de Matemática**. 2017. 275 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2017.

FIGUEIREDO, F. F; GROENWALD, C. L. O. Design de problemas matemáticos com o uso de Tecnologias Digitais sob o enfoque da formulação de problemas subsidiários. **Educação, Ciência e Cultura**, v. 24, n. 1, p. 221-234, 2019.

IEZZI, G. et al. **Matemática:** ciência e aplicações. 7 ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEUNG, S. S.; SILVER, E. A. The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. Mathematics **Education Research Journal ,** Springer Netherlands, . 9, n. 1, p. 5-24, 1997.

MAIA, R. J. D. **Progressões Aritméticas e Geométricas**. 2011. 32 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2011.

MEDEIROS, K.M. **O Contrato Didático e a Resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula**. Recife: UFPE, 1999. 211p. (dissertação de mestrado).

NUNES, C. B. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da Resolução de Problemas:** perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 430 p. Tese (Doutorado em educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro (SP), 2010.

ONUCHIC, L. D. L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, p. 199-220, 1999.

ONUCHIC, L. D. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73 - 98, 2011.

PAIVA, M. R. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

POLYA, G. **How to solve it:** a New Aspect of Mathematical Method. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, v. 2, 1978.

POLYA, G. **Sobre a resolução de problemas de matemática na high school**. In: KRULIK, S. E REYS, R. E. (Org). A resolução de problemas na matemática escolar. Tradução de Domingues, H. H. E Corbo, O. 4ª reimpressão. São Paulo: Atual Editora, 342 p., 1997.

PONTE, J. P. da. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, p. 105-132, 2006.

RODRIGUES, Suely da Silva. Eficácia docente no ensino da matemática. **Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, v. 25, n. 94, p. 114-147, 2017.

SAVIANI, D. **Educação:** do senso comum à consciência filosófica. 19. ed. São Paulo: Autores Associados, 2013. 290 p. (Coleção Educação Contemporânea).

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in the teaching. **Educational Researcher**, Washington, US, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of a new reform. **Harvard Educational Review**, Harvard, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SMOLE, K. C. S. ; DINNIZ, M. I. **Ler e aprender Matemática**. In: SMOLE, Kátia C. S.; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.) Ler escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

STOYANOVA, E.; ELLERTON, N. F. A framework for research into student's problem posing in school mathematics. Technology in mathematics education. In: Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics **Education Research Group of Australasia (MERGA)**. 1996.

TICHÁ, M.; HOSPESOVÁ, A. Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. **Educational Studies in Mathematics**, v. 83, n. 1, p. 133-143, 2013.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática**, Portugal, nº 85, p.14-20. Lisboa: APM, 2005.

VIANNA, C. R. **Resolução de Problemas**. Temas em Educação, p.401-410, 2002.