emd Ensino da Matemática em Debate

Regards syntaxique et sémantique sur la formule de Taylor-Young

Syntactic and semantic views on the Taylor-Young formula

Rahim Kouki[1]

Imed Kilani[2]

RESUMÉ

La formule de Taylor-Young fait l'objet d'un enseignement explicite en analyse à l'entrée à l'université et particulièrement dans les institutions préparatoires aux études d'ingénieurs tunisiennes. Cette recherche a pour objet de l'analyser sous les deux angles mathématique et didactique. Elle a permis de montrer l'illusion de transparence de cette formule et a révélé sa complexité syntaxique. Elle a montré, surtout, l'intérêt de l'approcher sémantiquement aussi bien d'un point de vue graphique que d'un point de vue numérique. L'analyse curriculaire que nous avons menée a montré la légèreté, aussi bien dans le programme officiel que dans le « savoir apprêté » des enseignants, de la prise en compte réelle des aspects sémantiquesque dissimule la formule de Taylor-Young.

Mots clés *: Formule de Taylor-Young. Syntaxe et sémantique. Savoir apprêté.*

ABSTRACT

The Taylor-Young formula is the subject of explicit instruction in analysis upon entering university and particularly in preparatory classes for Tunisian engineering studies. This research aims to analyze it from both mathematical and didactic angles. It allowed to show the illusion of transparency of this formula and revealed its syntactic complexity. It has shown, above all, the value of approaching it semantically both from a graphic point of view and from a numerical point of view.The curriculara nalysis we carried out showed the lightness, both in the official program and in the "prepared knowledge" of the teachers, of the real taking into account of the semantic aspects concealed by the Taylor-Young formula.

Keywords *: Taylor-Young formula. Syntax and semantic. Prepared knowledge.*

Introdução

La recherche que nous présentons dans cet article s'inscrit dans la problématique de la l'articulation des deux points de vue syntaxique et sémantique dans l'approche des approximations locales et plus précisément de la formule de Taylor-Young. Cette formule est à la base de la notion de développement limité. En effet, si la fonction f est n-fois dérivable au voisinage d'un point x_0, alors f admet un développement limité au point x_0 qui découle de la formule de Taylor-Young. Cette formule joue, en fait, un rôle très important dans le domaine de l'analyse mathématique puisqu'elle permet de faire des approximations locales de fonctions complexes, de déterminer plus simplement

1 rahim.kouki@ipeiem.utm.tn; https://orcid.org/0000-0002-8664-731X
2. Université Virtuelle de Tunis, Institut Supérieur de l'Education et la Formation Continue, ECOTID ; kilanis2006@yahoo.fr; https://orcid.org/0000-0001-9549-5250

des limites de fonctions, d’étudier les comportements asymptotiques des fonctions au voisinage de l’infini, d'étudier localement des positions de courbes par rapport à leurs tangentes etc.

Plusieurs recherches Tall et Vinner (1981), Martin (2013), Rasmussen et Wawro (2017) et Kouki et Griffits (2020), ont déjà été conduites dans le domaine des approximations locales des fonctions. Cependant, réserver une recherche didactique pour étudier particulièrement l’articulation des deux points de vue syntaxique et sémantique dans la formule de Taylor-Young à travers les registres graphique et numérique n’a pas, à notre connaissance, eu lieu. Dans cette recherche, nous partons d’un constat souvent soulevé par des collègues universitaires de physique qui soulignent que leurs étudiants de la première année universitaire des Instituts Préparatoires aux Etudes d’Ingénieurs tunisiennes, arrivent dans leur cours de physique avec des connaissances vagues en rapport avec la formule de Taylor-Young. Selon eux, les étudiants sont certes capables de mener un développement de Taylor-Young syntaxiquement correct mais très souvent sont incapables de donner du sens aux liens qui existent entre les objets mathématiques en jeu dans la formule. Pourtant dans le cours d’analyse, de la première année universitaire des Instituts Préparatoires aux Etudes d’Ingénieurs tunisiennes, cette formule fait l’objet d’un enseignement explicite à l’occasion de l’étude de la notion de développement limité.

Dans la même vision que celle de Duval (1993), nous mettons l’hypothèse que la maîtrise de la conversion de la formule de Taylor-Young, entre les registres algébrique, graphique et numérique est nécessaire, pour les étudiants, pour une bonne conceptualisation qui satisfait aussi bien les demandes de l’activité mathématique que celles de physique et d’informatique.Nous considérons qu’une investigation de nature mathématique et didactique de cette formule permet d’apporter un meilleur éclairage en rendant compte des insuffisances qui peuvent apparaître dans sa conceptualisation dans le processus de sa transposition didactique. Dans la première partie de cet article, nous analyserons les aspects mathématiques de la formule de Taylor-Young afin de préciser ses spécificités. La deuxième partie sera consacrée à une étude sémiotique, au sens de Duval (1993, 2006), de cette formule.

Ces analyses enrichies par les jeux de cadres introduits et développés par Douady (1986,1991), nous en conduit à mener une étude en termes de transposition didactique du programme officiel et du « savoir apprêté » relatifs à cette formule enseignée dans le champ de l’analyse mathématique de la première année section Math-Physique (MP) du cycle préparatoire aux études d’ingénieurs.

Approche mathématique-syntaxique de la formule de Taylor-Young

L’analyse mathématique selon une approche syntaxique consiste à étudier la formation des expressions et des preuves mathématiques selon un regard purement syntaxique. Elle s’occupe de la manière dont un ensemble de connaissances reconnues comme mathématiquement valide (définitions, théorèmes, propriétés,…) permet, à lui seul, de construire de nouvelles connaissances mathématiques en respectant les règles de raisonnement et de logique formelle. Pour Weber & Alcock (2004) une production de preuve est qualifiée de syntaxique lorsqu'elle se réalise sans recours à des graphiques ou à d'autres représentations intuitives et non formelles des notions mathématiques :

> We define a syntactic proof production as one which is written solely by manipulating correctly stated definitions and other relevant facts in a logically permissible way. In a syntactic proof production, the prover does not make use of diagrams or other intuitive and non-formal representations of mathematical concepts. In the mathematics community, a syntactic proof production can be colloquially defined as a proof in which all one does is 'unwrap the definitions' and 'push symbols' (WEBER; ALCOCK, 2004, p. 210).

Analyser la formule de Taylor selon une approche syntaxique consiste, pour nous, à la regarder uniquement comme une expression formelle qui engage une fonction n-fois dérivable au voisinage d'un point x_0 et qui permet de substituer localement cette fonction par un polynôme P_n de degré n dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. Celui-ci s'appelle le polynôme de Taylor à l'ordre n. Pour des raisons de rigueur mathématique, on injecte une fonction indéterminée notée $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$, qui est localement négligeable devant $(x-x_0)^n$ lorsque x tend vers x_0, pour légitimer l'égalité locale suivante :

$$f(x) = P_n(x) + (x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

Dans son ouvrage *Methodus incrementorum directa et inversa*, paru en 1715, B. Taylor avance la relation suivante composée d'un nombre infini de termes :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

A propos de cette expression, Burkhadart. H et Wirtinger.W. (1909) soulignent :

> […] Qu'il (Taylor) l'a envisagée comme cas limite d'une relation analogue, composée d'un nombre n déterminé de termes relatifs aux accroissements finis d'ordre 1, 2, …, n-1 d'une fonction quelconque donnée $f(x)$; B Taylor ne s'est d'ailleurs nullement préoccupé de la signification précise du développement
>
> $$f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$
>
> qui figure dans le second membre de la relation… » (Burkhadart. H & Wirtinger.W, 1909, p. 298).

Ils ajoutent, juste après, que cette même relation est apparue aussi chez Euler qui ne s'est pas préoccupé, lui aussi, des conditions de sa validité. Il a attaché plutôt de l'importance à ses applications.

Outre l'importance de ce résultat et de son incidence dans le champ de l'analyse mathématiques, beaucoup de mathématiciens de l'époque, donnant de l'importance à la rigueur mathématiques, se sont penchés sur ce résultat cherchant à le valider mathématiquement. Burkhadart. H & Wirtinger.W.

(1909, p. 299-300) expliquent que dans son ouvrage édité en 1797 sous le titre *Théorie des fonctions analytiques*, Lagrange, reprend les n premiers termes de la relation de Taylor, remplace x par a ($x = a$) et h par $b - a$ ($h = b - a$) et écrit l'expression R_n suivante qui représente ce que nous appelons aujourd'hui le reste de Lagrange :

$$R_n = f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!}f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) - \cdots \ldots \ldots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

Il montre rigoureusement, sous conditions que f soit n - fois dérivable et que sa dérivée d'ordre n soit continue, que R_n est exactement égale à : $R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^n(t)dt$

Ainsi et pour la première fois, Lagrange précise avec exactitude l'erreur commise en confondant la valeur de la fonction avec ce que nous appelons aujourd'hui le polynôme de Taylor à l'ordre n. Il démontre ainsi le théorème de Taylor avec reste intégral.

La formule de Taylor-Young s'énonce habituellement comme suit :

> Soit I un intervalle ouvert non vide de IRet soit $x_0$un point de I.
>
> Soit $f : I \to IR$ une fonction et n un entier positif. Si $f$est n-fois dérivable sur I alors, il existe une fonction $\varepsilon(x)$définie sur I, qui tend vers 0 quand x tend vers x_0, telle que pour tout $x \in V(x_0)\backslash\{x_0\}$ on a :
>
> $$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x)$$

Cette formule a une étendue « locale[3] » car elle donne des informations sur la fonction f uniquement lorsque le réel x est au voisinage du point x_0 :

Si on considère $P_n(x)$ le développement de Taylor à l'ordre n en x_0, la formule de Taylor-Young peut s'exprimer comme suit :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$de x_0 sur lequel

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon|x - x_0|^n$$

Si on n'a pas besoin d'informations précises sur le reste du développement, cette formule est très utile. Certes, elle ne permet ni d'estimer ni de majorer l'erreur commise dans l'approximation mais elle permet de résoudre des problèmes locaux comme la détermination de limites ou l'étude de la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.

Cette formule est couramment utilisée pour déterminer les développements limités. Pour cela, elle donne une condition suffisante pour qu'une fonction f admette un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 : où il suffit qu'elle soit n-fois dérivable au voisinage de x_0.

[3] Dans sa thèse, Maschietto (2002) explique que faire une étude locale revient à mettre en jeu la notion d'intervalle à travers la problématique de son existence. Elle illustre ces propos par la définition suivante : *« ...soit une fonction $f : I \subset IR \to IR$, avec I=$[a, b]$ et un point choisi $x_0 \in]a, b[$. « faire une étude locale de la fonction f au voisinage de x_0 correspond à chercher un intervalle (ouvert et centré en x_0), sur lequel une propriété est vraie.* » (MASCHIETTO, 2002, p. 66).

Dans certains ouvrages de mathématiques et dans beaucoup d'œuvres universitaires l'énoncé de la formule de Taylor-Young suppose que la fonction f soit de classe C^n, alors qu'une fonction n-fois dérivable au point x_0 est supposée être suffisante. Pourquoi alors demander une hypothèse de plus ? Il semblerait que cette condition est imposée par le choix de la démonstration adoptée pour démontrer le théorème de Taylor-Young à partir du théorème de Taylor-Lagrange qui impose, lui, que la dérivée d'ordre n soit continue. La formule de Taylor-Young n'est pas un corollaire de celle de Taylor-Lagrange, comme il peut paraître. C'est un résultat à part qui peut se démontrer, par exemple, via un raisonnement par récurrence avec l'hypothèse que f est stricto sensu n-fois dérivable, ni plus ni moins.

En effet, si nous considérons :

$$R_n(x) = f(x) - (f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n)$$

Pour $n = 1$,

$$R_1 = f(x) - f(x_0) - f^{(1)}(x_0)(x - x_0)$$

Comme f est dérivable enx_0, alors $\lim_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f^{(1)}(x_0)$ ceci est équivaut à $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{(1)}(x_0) + \varepsilon(\mathrm{x})$ avec $\varepsilon(\mathrm{x})$ une fonction réelle qui tend vers 0 qd x tend vers x_0

Alors

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f^{(1)}(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(\mathrm{x})$$

D'où

$$R_1 = f(x) - f(x_0) - f^{(1)}(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)\varepsilon(\mathrm{x})$$

Ainsi

$$R_1 = (x - x_0)\varepsilon(\mathrm{x})$$

Supposons maintenant que le résultat soit vrai à l'ordre $n - 1$

$$P_n(x) = (f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n)$$

Donc

$$P_n'(x) = (f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n)'$$

$$P_n'(x) = f^{(1)}(x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f'^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

$$R'_n(x) = f'(x) - P_n'(x) = (x - x_0)^{n-1}\varepsilon(x)$$

$$\int_{x_0}^{x} R_n'(t)dt = \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n-1}\,\varepsilon(t)dt$$

$$R_n(\mathrm{x}) = \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n-1}\,\varepsilon(t)dt$$

Posons $\varepsilon_1(x) = \frac{1}{|x-x_0|^n}\int_{x_0}^{x}(t - x)^{n-1}\,\varepsilon(t)dt$ avec $\varepsilon_1(x_0) = 0$

Montrons que $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

Soit $\varepsilon_2 > 0$, comme $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0, $\exists\, \eta > 0 / |t - x_0| \prec \eta \Rightarrow |\varepsilon(t)| \prec \varepsilon_2$.

Si on suppose que $|x - x_0| \prec \eta$ on a $|\varepsilon_1(x)| \prec \varepsilon_2 \frac{1}{|x-x_0|^n} \left|\int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n-1}\, dt\right|$

Donc $|\varepsilon_1(x)| \prec \frac{\varepsilon_2}{n}$

On en déduit que pour $|x - x_0| \prec \eta$ on a $|\varepsilon_1(x)| \prec \frac{\varepsilon_2}{n}$ c'est-à-dire que $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. Donc $R_n(x) = |x - x_0|^n \varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. D'où le résultat.

Cette démonstration montre qu'on n'a pas besoin de la continuité de la dérivée n[ième] de f et que l'hypothèse qui consiste à imposer que f soit de classe C^n est « forte ». On a juste besoin de considérer que f soit n-fois dérivable au voisinage de x_0.

Ceci montre qu'il existe un écart didactique, au niveau des hypothèses dans la formule de Taylor-Young, entre le savoir savant purement mathématique et le savoir mathématique proposé à être enseigner. Cet écart n'a pas, à notre sens, de légitimité mathématique mais peut-être didactique dans le cas où la formule de Taylor-Young apparait dans le cours d'analyse avant d'entamer le chapitre intégration. En effet, la démonstration de la formule implique la notion d'intégrale qui est naturellement évitée. Cependant, ce choix a un coût qui consiste à imposer une condition supplémentaire à savoir la continuité de la dérivée n[ième] de la fonction f.

Le reste dans la formule de Taylor $((x - x_0)^n \varepsilon(x))$ se présente, souvent sous la forme de $o((x - x_0)^n)$ connue par la « notation de Landau ». Cette notation, couramment utilisée aujourd'hui en analyse, doit s'entendre voulant dire que $o((x - x_0)^n)$ est une fonction négligeable devant $(x - x_0)^n$ lorsque x tend vers x_0. Ce qui se traduit par $\lim\limits_{x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Ainsi, la formule de Taylor-Young peut se présenter sous l'écriture suivante :

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Cette notation, qui revient historiquement au mathématicien allemand Paul Bachmann, qui était largement utilisée dans les écrits de son élève Edmund Landau dès le début du XX[ème] siècle, soulève un certain nombre de problèmes au sujet desquels un didacticien ne peut rester indifférent. Certes, elle a été introduite pour faciliter les calculs et la présentation des résultats, mais elle nécessite au praticien d'être très attentif en la manipulant. Dire que $f = o(g)$ doit se comprendre comme voulant dire que $f \epsilon o(g)$ c'est-à-dire que f est un élément parmi d'autres qui sont négligeables devant la fonction g. Dire aussi que $o(g) - o(g) = o(g)$ ne peut pas passer sous silence car cette propriété manque de rigueur, de clarté et « viole » même la sémantique classique des symboles de soustraction et de l'égalité : «$-$» et « $=$ ». Cette propriété doit se lire via un langage ensembliste : soit $A =$

$o(g)$ l'ensemble des fonctions négligeables devant g et soit $B = A - A = o(g) - o(g)$ l'ensemble des différences de deux fonctions de $A, B = A - A = A$ signifie que B est inclus dans A. Nous pensons que l'usage de cette notation dans les classes de mathématiques, de physique ou d'informatique est loin d'être transparent pour les étudiants même si les choses peuvent passer sous silence. Une étude didactique relative à cette notation ne peut, à notre sens, que sensibiliser enseignants et étudiants de la portée sémantique et syntaxique particulière de cette notation.

Notons que, lorsque la formule de Taylor-Young s'applique au voisinage de $x_0 = 0$, nous obtenons la formule dite de Mac-Laurin explicitée par :

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

Mais il faut savoir que cette formule vue sous cet angle laisse penser que ce mathématicien n'a que le mérite d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange en un voisinage particulier d'une importance stratégique. Or ceci est inexact. En effet, Mac-Laurin a démontré différemment cette formule et en est arrivé au même résultat que celui de Taylor.

Dans son ouvrage *Treatise of Fluxions* paru en 1742, il expose sa démonstration et reconnait celle de Taylor :

> Aujourd'hui, pour beaucoup, le nom de Mac-Laurin est surtout associé à la formule dite de Taylor-Mac-Laurin. Nous n'allons pas faire l'histoire de cette formule, mais simplement donner la démonstration de notre auteur (Mac-Laurin). Cette formule apparait dans le Methodus Incremenrum directa et Inversa de Taylor parût en1715, ce que Mac-Laurin reconnait dans son Traité des Fluxions. La démonstration se trouve dans le livre II, à l'article 751(BRUNEAU, 2005, p. 352).

Une étude didactique de la formule de Taylor-Young ne peut à notre avis faire l'économie d'une analyse sémantique en plus de l'analyse syntaxique qui est très développée en mathématiques notamment à l'université. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Approche mathématique-sémantique de la formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young est un énoncé avec un vocabulaire et une syntaxe qui laisse penser qu'elle est transparente, sans ambigüités et permet, de part son formalisme et sa propre syntaxe, un axé mécanique à sa signification, éliminant ainsi toute place au contrôle et à l'interprétation qui sont de l'ordre de la sémantique. Or comme le souligne Brousseau (1986) : « Pour éviter les erreurs, il ne suffit pas d'appliquer des axiomes, il faut savoir de quoi on parle et connaître les paradoxes attachés à certains usages pour les éviter. Ce contrôle diffère assez du contrôle mathématique habituel, plus « syntaxique »" (BROUSSEAU, 1986, p. 43).

Comme nous l'avons développé plus haut, la formule de Taylor-Young est une expression exprimée dans un langage formel et symbolique appelant, sous des conditions, une certaine fonction f ainsi que ses dérivées successives. Trouver le polynôme de Taylor associé à f au voisinage d'un point x_0, revient à appliquer un algorithme de calcul « assez simple » pourvu que les dérivées successives soient faciles à chercher. Il peut s'agir aussi d'appliquer d'une manière « assez mécanique » des développements limités usuels pour déterminer le polynôme de Taylor associé à la fonction f en question. Or, travailler sous un contrôle exclusivement syntaxique peut, dans certains cas, conduire à des résultats « étranges ». Balacheff (1987),tout comme Brousseau (1986), met en garde contre un travail exclusivement syntaxique chez les apprenants. A ce sujet, il dit :

> C'est aussi le cas des situations dans lesquelles l'élève a à exécuter des algorithmes, des suites d'ordre, ou à mettre en œuvre des pratiques réglées par des habitudes pour lesquelles les questions de la validité et de la consistance ne se posent pas. (...) Ces situations n'exigent pas de contrôle des productions, toute erreur contingente d'exécution mise à part, parce que la situation porte a priori sur de « bons objets », de « bonnes relations », selon un contrat qui permet l'économie de l'examen des conditions de validité de l'action (BALACHEFF, 1987, p. 152).

Brousseau et Ballacheff relèvent ainsi l'importance de ne pas se limiter à un regard purement syntaxique en manipulant les notions mathématiques et en produisant des preuves. En accord avec ce point de vue, Kouki (2008), Durand–Guerrier (2005), Durand-Guerrier et Ben Kilani (2004)…ont aussi montré la nécessité d'avoir un regard sémantique relatif aux notions mathématiques et de ne pas se limiter à une approche exclusivement syntaxique pour un meilleur contrôle des notions en jeu dans l'activité mathématique. Nous nous inscrivons dans cette optique afin d'analyser la formule de Taylor-Young.

Bien conceptualiser cette formule nécessite de l'approcher selon diverses représentations sémiotiques. Selon Duval (1993), la diversification des représentations sémiotiques d'un objet mathématique est un *« point stratégique pour la compréhension des mathématiques »* (DUVAL, 1993, p. 37).

Un graphe, une formule algébrique, une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, un symbole para-mathématique…peuvent être tous des représentations sémiotiques pour un même objet mathématique. Il (Ibid, p. 51) souligne la nécessité de faire appel, à au moins, deux registres sémiotiques différents dont il faut être capable de coordonner entre eux. Coordonner entre deux registres sémiotiques différents suppose la possibilité de conversion de l'un vers l'autre. Duval (1993) souligne qu'en convertissant d'un registre à un autre, l'objet mathématique doit conserver la référence de la représentation de départ mais doit permettre de changer d'unité de représentation, afin d'accéder à d'autres propriétés de l'objet dans le registre d'arrivée. Selon Duval, les apprenants qui n'ont pas les moyens de faire cette conversion sont incapables de bien concevoir l'objet conceptuel et auront même des difficultés à le manipuler correctement selon les différentes facettes des notions qui lui sont associées.

Nous n'allons pas discuter, dans cet article, de la question de la congruence entre les registres pour les objets mathématiques enjeu dans la formule de Taylor-Young. Ce qui nous intéresse ici est plutôt ce que pourrait-nous apporter,en termes de conceptualisation, la représentation de ces objets dans un registre relativement à un autre.

Les registres disponibles pour une bonne conceptualisation de la formule de Taylor-Young sont *a priori* :

- le registre algébrique : ce registre engage les notions de fonctions et ses dérivées, les polynômes et les fonctions négligeables ;
- le registre de l'écriture formelle et symbolique : il engage les notations $f, f^{(n)}$, « petit o », n !.
- le registre numérique : il renvoie aux calculs approchés.
- le registre graphique : il fait appel aux représentations dans un repère des courbes des fonctions et des polynômes d'approximation de Taylor.

Ces registres ont des fonctionnalités différentes de représentation des objets mathématiques en jeu dans la formule de Taylor-Young. Chacun permet de rendre visible certaines propriétés que les autres ne le permettent pas directement.

La formule de Taylor-Young est un concentré d'objets mathématiques liés entre eux. Le changement de registre ne concernera pas alors un seul objet mathématique mais plutôt un ensemble d'objets mathématiques enchevêtrés. Dans cette recherche, nous étudierons les conversions des objets mathématiques inter-reliés dans la formule de Taylor-Young entre les trois registres : celui des représentations algébriques, celui des représentations graphiques et celui des représentations numériques.

La formule de Taylor-Young à travers les registres algébrique et graphique

Le passage du registre algébrique au registre graphique et inversement demande de faire appel à des procédés cognitifs différents et marque ainsi une distance cognitive relative à chacun des passages.

Bien conceptualiser la formule de Taylor-Young, c'est être capable, entre autres, de faire une correspondance sémantique des éléments signifiants en jeu dans la formule, du registre algébrique au registre graphique et vice-versa.

Ainsi, mettre en correspondance l'ordre du développement de Taylor au voisinage d'un point x_0 d'une fonction f et la « qualité » de l'approximation dans le registre graphique, établit une congruence entre les deux registres algébrique et graphique.

Soit f une fonction n-fois dérivable au voisinage de x_0, alors

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

avec $P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ le polynôme de Taylor de degré n au voisinage de x_0.

$o((x - x_0)^n)$ est une fonction indéterminée négligeable devant $(x - x_0)^n$quand x tend vers x_0.

Par exemple:

- $P_0(x) = f(x_0)$ est un polynôme de degré 0. Il représente une approximation à l'ordre 0 de la fonction f au voisinage de x_0 ;
- $P_1(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0)$ est un polynôme de degré 1. Il représente une autre approximation linéaire à l'ordre 1 de la fonction f au voisinage de x_0 ;
- $P_2(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$ est un polynôme de degré2. Il représente une autre approximation quadratique de la fonction f au voisinage de x_0.

Et ainsi de suite...

$P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$…$P_n(x)$ sont tous des polynômes qui représentent des approximations de la fonction $f(x)$ au voisinage de x_0. Mais $P_i(x)$ donne une approximation meilleure que celles obtenues par les polynômes $P_k(x)$ quelque soit l'entier naturel i supérieur strictement à l'entier naturel k.

Voyons sur un exemple. Soit le développement de Taylor-Young de la fonction $f(x) = \exp(x)$ au voisinage de 0 respectivement à l'ordre 1 et 2 :

$$f(x) = \exp(x) = 1 + x + o(x)$$

$$f(x) = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

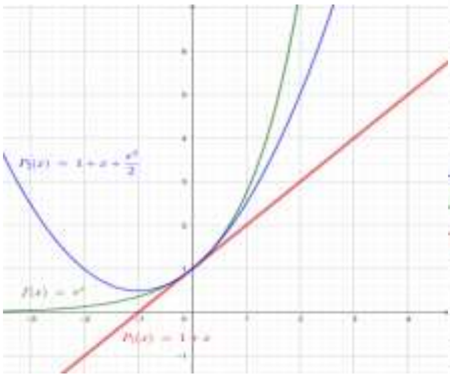
A l'ordre 1, $\mathrm{f(x)} - P_1(x) = \exp(x) - (1 + x) = o(x)$ (1)

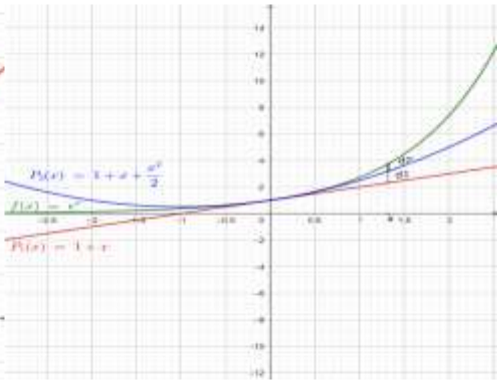
A l'ordre 2, $f(x) - P_2(x) = \exp(x) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) = o(x^2)$ (2)

P_1 et P_2 sont des polynômes qui approchent au voisinage de 0 la même fonction $f(\mathrm{x}) = \exp(x)$. Mais, la courbe représentative de P_2 approche mieux que la courbe représentative de P_1 le graphe de la fonction f donnant ainsi des approximations polynômiales de meilleure qualité en fonction de l'ordre du développement. L'écart entre la fonction f et son polynôme de Taylor au voisinage de 0 s'exprime dans le premier cas par $o(x)$ et dans le deuxième cas par $o(x^2)$. Pour une valeur x fixée voisine de 0 la valeur de $o(x^2)$ est plus petite que la valeur de $o(x)$ (voir graphique 2 ci-dessous).Ceci donne une approximation de qualité meilleure entre f et le polynôme de Taylor à l'ordre 2 par rapport à l'approximation obtenue entre f et le polynôme de Taylor à l'ordre 1.

Dans le graphique 1 ci-dessous sont représentées, au voisinage de 0, à la fois la courbe de la fonction $f(x) = \exp(x)$et les courbes relatives aux polynômes de Taylor $P_1(x) = 1 + x$ et $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$.

Le graphique 2 permet de voir localement comment la qualité de l'approximation dépend de l'ordre du développement c'est-à-dire du degré du polynôme de Taylor associé à la fonction f.



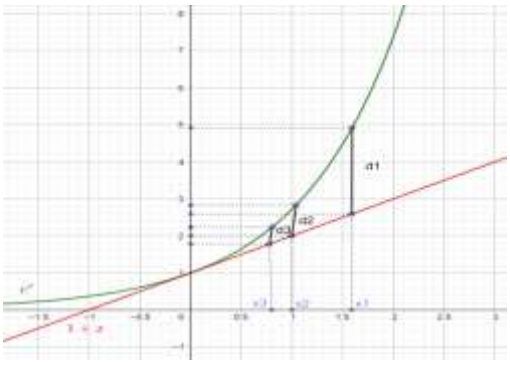


Graphique 1 : Vue globale du graphe de la fonction $f(x) = \exp(x)$ conjointement avec ceux des polynômes de Taylor associés à l'ordre 1 et 2 au voisinage de 0.

Graphique 2 : Vue locale du graphe de la fonction $f(x) = \exp(x)$ conjointement avec ceux des polynômes de Taylor associés à l'ordre 1 et 2 au voisinage de 0. $d_1$représente $o(x)$ et d_2 représente $o(x^2)$ pour x fixé voisin de 0.

Il faut noter que lorsqu'on fixe l'ordre i c'est-à-dire le polynôme $P_i(x)$, plus on s'éloigne du 0, plus l'écart entre la fonction $f$et le polynômes $P_i$augmente. Ainsi, plus on s'éloigne du 0, plus l'approximation locale sera de mauvaise qualité.

Soient x_1, x_2 et x_3 trois réels strictements positifs voisins de 0 tels que $x_1 > x_2 > x_3$. Nous remarquons, sur le graphique 3 suivant, que l'écart $d_1$entre $\exp(x_1)$ et $P_1(x_1)$ est plus important que l'écart d_2 entre $\exp(x_2)$ et $P_1(x_2)$ et encore plus important que l'écart d_3 entre $\exp(x_3)$ et $P_1(x_3)$. Ainsi, plus on s'approche de 0, meilleur est l'approximation entre la fonction et son polynômes de Taylor. Nous pensons qu'il est très intéressant, pour une meilleure conceptualisation des notions en jeux dans la formule de Taylor, d'illustrer,pour les étudiants, ses détails d'ordres sémantiques à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique comme GeoGebra. Son intérêt réside dans le fait qu'il permet de réaliser des animations et de visualiser toutes les étapes de la construction graphique réalisée. Il permet aussi de zoomer et de voir ainsi la précision et la qualité de l'approximation de la fonction selon le polynôme d'approximation et donc selon l'ordre du développement.



Graphique 3 : Graphe de $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ conjointement avec le graphe du polynôme de Taylor associé $P_1(x) = 1 + \mathrm{x}$, au voisinage de 0. d_i représente l'erreur d'approximation entre f et P_1 en fonction de x_i où $i \in \{1,2,3\}$.

La formule de Taylor-Young à travers les registres algébrique, numérique et graphique

Le passage du registre algébrique au registre numérique pour la formule de Taylor-Young nous met face à des raisonnements relatifs aux approximations numériques appelées habituellement calcul approché. Ce passage est habituellement transparent mais il ne l'est pas dans certains cas. L'exemple suivant peut mettre en lumière la nécessité d'un contrôle sémantique et de ne pas se fier uniquement aux traitements syntaxiques.

Considérons la fonction $g(x) = (1 + \mathrm{x})^{97}$. g est n-fois dérivables au voisinage de 0. La formule de Taylor-Young appliquée à g au voisinage de 0 à l'ordre 1 donne le polynôme de Taylor $Q_1(x) = 1 + 97x$. Donc au voisinage de 0, $(1 + \mathrm{x})^{97} \sim 1 + 97x$.

Cette expression permet de donner une valeur approchée de la fonction lorsqu'on assigne à x une valeur proche de 0. Être proche de 0 pose déjà un problème d'ordre sémantique à savoir à partir de quelle valeur, x est considéré comme proche de zéro ? Cette question est cruciale, pour les approximations locales, quand on veut passer du registre algébrique au registre numérique, chose que le physicien pratique assez souvent dans son exercice physique.

Dans le site futura-sciences[4], un étudiant (lolo299) a lancé un fil de discussions[5] autour de la détermination de la valeur approchée du nombre $(0{,}95)^{97}$. Il indique qu'en résolvant un exercice de probabilité il se trouve face à ce nombre. N'ayant pas une calculatrice à disposition, il fait appel à un développement de Taylor-Young de la fonction $(1 + \mathrm{x})^{97}$. Il fait remarquer que si on prend $x = -0{,}05$, ce développement à l'ordre 1 conduit les calculs vers une valeur approchée de $(0{,}95)^{97}$« inacceptable ». Perplexe, il s'est alors demandé à partir de quel ordre le reste du développement est négligeable pour pouvoir utiliser le développement et calculer ainsi des valeurs numériques approchées dans le champ de la physique. Un autre forumiste (Garnet) lui affirme qu'en physique on arrête le développement avec le premier terme non nul. Affirmant, ne pas comprendre sa réponse, lolo299, trois heures plus tard, repose de nouveau sa problématique en explicitant plus son désarroi :

> Ma question est don de savoir s'il existe une technique qui permet de savoir à partir de quel ordre on peut exploiter le développement limité d'une fonction en physique, sinon ç'a ne sert à rien, non ?
> J'ai de gros doute sur les approximations au premier ordre que l'on peut faire en physique sans véritable justification (par exemple l'équation du mouvement d'un pendule fait intervenir sin(x) que l'on remplace par x sans savoir si ce sera suffisant pour correspondre "numériquement" au sinus).

N'ayant pas eu de réponse à sa vrai question et pensant toujours que sa difficulté est due à son incapacité à déterminer l'ordre du développement nécessaire, il écrit une demi-heure plus tard :

[4]www.futura-sciences.com
[5]https://forums.futura-sciences.com/mathematiques-superieur/265480-developpement-limite-physique.html

> Existe-t'il une technique qui permet de savoir à partir de quel ordre on peut exploiter le développement limité d'une fonction en physique pour qu'il soit "numériquement" proche de la fonction. En reprenant mon exemple je souhaite une précision de 0,0001 par exemple comment en déduire l'ordre nécessaire?

Une demi-heure plus tard, il reçoit une réponse d'un forumiste (Hamb) lui disant :

> En fait, ce que tu veux c'est déterminer l'écart entre ta fonction et le développement limité que tu utilises, pour cela tu peux utiliser l'inégalité de taylor-lagrange qui est énoncée ici.

Six minutes plus tard, Garnet revient et informe que « *Mathématiquement il faut utiliser la formule de Taylor reste intégrale* ».

Trois minutes après, lolo299 remercie Hamb et lui dit que « *c exactement ce que je voulais !!* ».

Mais, les échanges se sont interrompus et lolo299 n'a pas reçu de réponse explicative à son problème.

Lolo299 pensait que la valeur approchée de $(0{,}95)^{97}$« inacceptable » qu'il a trouvé ($(0{,}95)^{97} \approx -3{,}85$) est tributaire de l'ordre inadéquat de son développement et qu'il suffit de trouver le bon ordre pour trouver une valeur approchée avec une précision de l'ordre de 10^{-4}, comme il l'a dit.

Analysons la problématique de lolo299.

Lolo299 est conscient qu'il y a un problème avec la valeur qu'il a trouvé suite à l'application d'un développement de Taylor-Young à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction $\mathrm{g(x)} = (1 + \mathrm{x})^{97}$. S'agissant d'un étudiant scientifique, il sait que $(0{,}95)^{97}$est un nombre très inférieur à 1 ($(0{,}95)^{97} \approx 0{,}0069$). Il se demande alors comment son calcul approché donne la valeur $(1 + 97.(-0{,}05)) = -3{,}85$. Cet écart « monumental », l'a amené à mettre en doute « l'exploitation » du développement limité dans le registre numérique en physique. Sans être catégorique, il essaye d'expliquer les raisons de cet écart. Il fini alors par se convaincre qu'il suffit de trouver le bon ordre du développement de Taylor-Young pour que cet écart devient physiquement acceptable. Il demande alors, sur le forum, si jamais il y a une personne qui connait une technique permettant de trouver ce bon ordre. Lolo299 s'est occupé de l'ordre du développement mais ne s'est préoccupé ni de son choix de la valeur de $x = -0{,}05$ ni des caractéristiques mathématiques de la fonction $\mathrm{g(x)} = (1 + \mathrm{x})^{97}$.

La situation embarrassante dans laquelle lolo299 s'est retrouvé ne se présente pas toujours. Très souvent la formule de Taylor-Young permet de trouver un calcul approchée « acceptable » sans se préoccuper vraiment de l'ordre du développement (en général,en physique, on ne dépasse l'ordre trois que rarement) et sans se préoccuper de la valeur choisie dans le voisinage du point x_0 (la valeur choisie est considérée comme voisine de x_0 de manière intuitive). Par exemple, si on applique un développement de Taylor-Young à l'ordre 1 à la fonction $f(x) = sin\,(x)$ et on remplace x par la même valeur $(-0{,}05)$, on trouve que $\sin(-0{,}05) \approx (-0{,}05)$. La calculatrice donne pour

$\sin(-0{,}05) \approx -0{,}04997$. Le polynôme de Taylor à l'ordre 1 permet, cette fois-ci, une « bonne » approximation de la valeur de $\sin(-0{,}05)$.

Comment peut-on, alors, expliquer l'adéquation entre la valeur affichée par la calculatrice et la valeur trouvée via le polynôme de Taylor pour la fonction $f(x) = sin(x)$ pour $x = -0{,}05$? Et comment peut-on expliquer l'écart « frappant » entre la valeur annoncée par la calculatrice et la valeur trouvée via le polynôme de Taylor pour la fonction $g(x) = (1 + x)^{97}$ pour la même valeur $x = -0{,}05$?

Un regard purement syntaxique permet difficilement d'éclairer un non expert sur cette problématique. Nous pensons qu'on ne peut faire l'économie d'un contrôle sémantique sur la question.

Mathématiquement, le polynôme de Taylor d'ordre n n'est une approximation de la fonction $f(x)$ autour de x_0 que lorsque le reste de Taylor $o((x - x_0)^n)$ est négligeable devant $(x - x_0)^n$ c'est-à-dire que lorsque $\frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

Or, le reste sous cette forme ne permet pas de contrôler l'erreur commise dans l'approximation. Tout ce qu'on sait c'est qu'il est possible d'écraser localement le polynôme de Taylor P_n sur la fonction f autour de x_0, pourvu que le x soit aussi proche que l'on veut de x_0. La particularité du x, ici, c'est qu'il représente une quantité variable, aussi variable qu'on veut autour de la valeur x_0. C'est cette variabilité du x qui va nous permettre, toujours, d'approximer la fon ction f par son polynôme de Taylor. Donc on peut toujours trouver un voisinage $V(x_0)$ tel que pour tout x dans ce voisinage, l'écart en valeur absolue entre $f(x)$ et $P_n(x)$ est tolérable selon la précision recherchée. Mathématiquement, on peut traduire cette dernière phrase comme suit :

Pour tout « écart de tolérance » ε>0, on peut trouver un " écart de garantie " $\eta(\varepsilon, f, n) > 0$ tel que, dès que x est proche de x_0 à $\eta(\varepsilon, f, n)$ près, alors $f(x)$ est proche de $P_n(x)$ à ε près. Nous insistons beaucoup sur le fait que η est une valeur qui dépend à la fois de ε, de la fonction f et de l'ordre n du développement de Taylor. Cette corrélation est souvent négligée dans les définitions proposées de la notion de limite finie d'une fonction réelle. Le fait que η dépend de ε, de f et de n montre que pour chaque « écart de tolérance » ε, s'ensuit un " écart de garantie " η. C'est-à-dire que le voisinage $V(x_0)$ ne peut être choisi librement. Il dépend de la précision recherchée dans l'écart en valeur absolue entre $f(x)$ et $P_n(x)$.

Dans les exemples ci-haut nous avons cherché à déterminer une valeur approchée de $\sin(-0{,}05)$ et une valeur approchée de$(0{,}95)^{97}$ en appliquant la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 au voisinage de 0 aux fonctions $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = (1 + \mathrm{x})^{97}$. En faisant de la sorte, nous avons considéré que $(-0{,}05)$ est assez proche de zéro et donc qu'il se trouve dans un « bon » voisinage de 0 permettant via le polynôme de Taylor de trouver une « bonne » valeur approchée des nombres

$\sin(-0{,}05)$ et $(0{,}95)^{97}$. Cette approche de la notion de voisinage et de limite d'une fonction est très intuitive. Elle est tellement intuitive que même les mathématiciens ne se sont penchés sur une définition rigoureuse des notions de voisinage et de limite que très tardivement. Weierstrass au 19ème siècle était le premier mathématicien qui a proposé la définition de limite telle qu'elle est connue aujourd'hui. Dans les programmes actuels du lycée, en France par exemple, cette approche intuitive de la limite d'une fonction est prédominante comme le font remarquer (GRENIER et al., 2015):

> Le point de vue analytique (de la limite d'une fonction) est absent : les infiniment petits ou infiniment grands, à peine évoqués par des expressions telles que « aussi près que » ou « aussi grand que » ne sont pas travaillés, même si on trouve quelques exercices « alibis ». Conception technique : les manuels proposent un grand nombre de « théorèmes » ou propriétés qui consistent uniquement en une liste de limites prêtes à l'emploi, ou en des règles algébriques sur les limites. Comme ces « théorèmes » ne sont pas démontrés et qu'on renvoie l'élève à l'intuition pour les comprendre (et même les justifier !), la boucle est bouclée (GRENIER et al., 2015, p. 670).

Ils résument, juste après, les manquements, dans les programmes actuels, imputables à cette approche intuitive, qui devraient être intégrer pour :

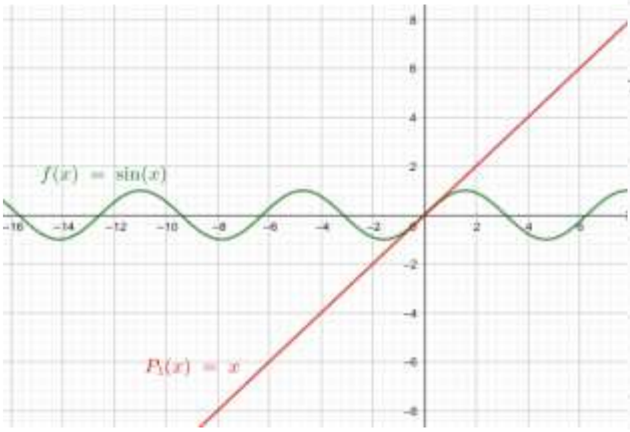
> […] Sensibiliser les étudiants aux enjeux de l'analyse réelle à l'Université afin de favoriser une entrée dans le point de vue conceptuel nécessaire pour une appropriation de la notion de limite […]
> • une approche qualitative du concept de limite de fonction ;
> • un travail introductif sur les approximations numériques. Par exemple : que dois-je choisir pour x pour que f(x) soit inférieur en valeur absolue à une puissance de 10 donnée (pour une fonction à limite nulle).
> • de vrais problèmes qui mettraient en relation les calculs d'approximation et les représentations des voisinages (par des bandes) dans l'objectif de donner du sens à des expressions comme « être près de » ou « être plus grand que », etc.., préliminaires à celles dont on se sert pour les limites (GRENIER et al., p. 670-671).

Nous appuyons totalement les recommandations proposées par ces auteurs car elles permettent aux étudiants, selon nous, dés l'entrée à l'université, non seulement d'accéder à une vue conceptuel nécessaire pour une appropriation de la notion de limite, mais aussi, de posséder les outils nécessaires pour une conceptualisation appropriée de la formule de Taylor-Young. Revenons aux analyses faites ci-haut relatives aux valeurs approchées de $\sin(-0{,}05)$ et de$(0{,}95)^{97}$.

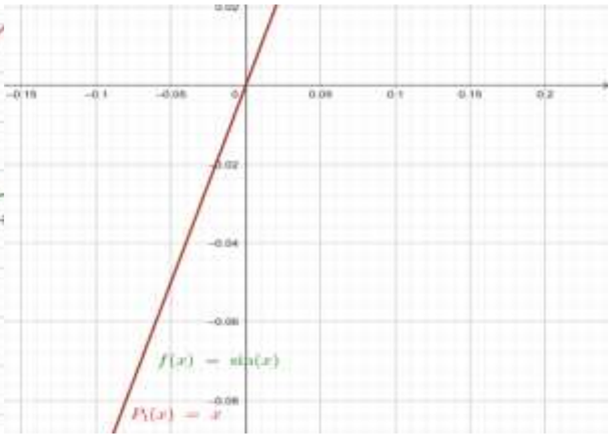
En prenant la valeur $x = -0{,}05$ et en fixant le développement à l'ordre 1 on n'a pas vérifié, pour chacune des fonctions $f(x)$ et $g(x)$, si cette valeur permet d'obtenir des valeurs approchées de $\sin(-0{,}05)$ et de $(0{,}95)^{97}$ à 10-4 près par exemple. Malgré cette défaillance nous avons pu avoir une « bonne » valeur approchée de $\sin(-0{,}05)$ mais on a eu au même temps une « très mauvaise » valeur approchée de $(0{,}95)^{97}$. Cette différence est due à des spécificités propres à chacune des fonctions $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = (1 + \mathrm{x})^{97}$. En effet, la dérivée de la fonction f en 0 est égale à 1 ($f'(0) = 1$), alors que la dérivée de la fonction g en 0 est égale à 97 ($g'(0)$=97). Or $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente d'approximation de f au point $(0, f(0))$ d'équation $y = x$ et

$g'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente d'approximation de g au point (0, $g(0)$) d'équation $y = 97x + 1$. Localement la tangente se confond avec la courbe. Mais pour la fonction f la pente de la tangente est croissante « modérément », alors que pour la fonction g la tangente est croissante de manière très accentuée. Ceci a pour conséquence qu'en s'écartant un petit peu de 0, l'écart entre la courbe représentative de f et sa tangente reste très faible (voir les graphiques 4 et 5 ci-dessous). Par contre, dés qu'on s'éloigne un petit peu de 0, l'écart entre la courbe représentative de g et sa tangente devient « grand » (voir les graphiques 6 et 7 ci-dessous). Ceci explique, graphiquement, les raisons de l'adéquation entre la valeur affichée par la calculatrice et la valeur trouvée via le polynôme de Taylor pour la fonction $f(x) = \sin(x)$ pour $x = -0{,}05$ et explique aussi l'écart important entre la valeur annoncée par la calculatrice et la valeur trouvée via le polynôme de Taylor pour la fonction $g(x) = (1 + x)^{97}$ pour la même valeur $x = -0{,}05$. Les représentations graphiques suivantes, autour de 0, des fonctions f et g ainsi que leur tangentes permettent d'illustrer ses détails d'ordres sémantiques.

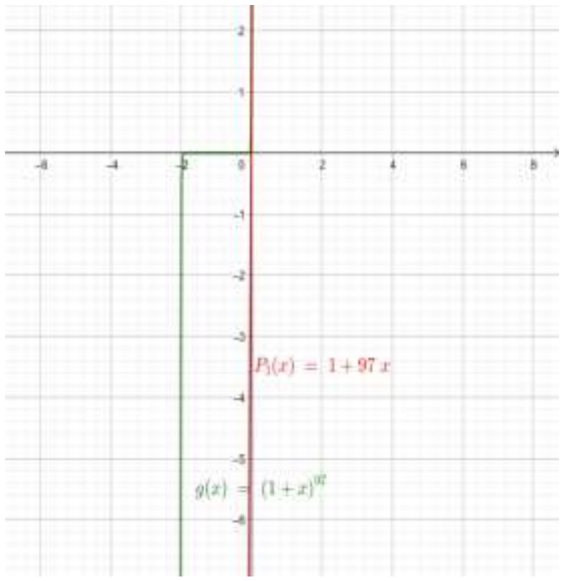
Le choix de la fonction g permet de montrer l'intérêt et la pertinence d'avoir un regard sémantique sur la question posée et de ne pas se limiter à un traitement syntaxique mécanique. Le travail dans le registre numérique a soulevé, dans ce cas, des questionnements qui n'auront peut-être pas eu l'occasion de se manifester si le traitement de la formule de Taylor-Young est resté stricto sensu dans le registre algébrique. Ceci montre un cas réel de l'importance du changement de registre, de l'algébrique au numérique, pour contrôler la validité de l'activité mathématique, procédures et raisonnement, par la force du contrôle sémantique sur la situation à résoudre.

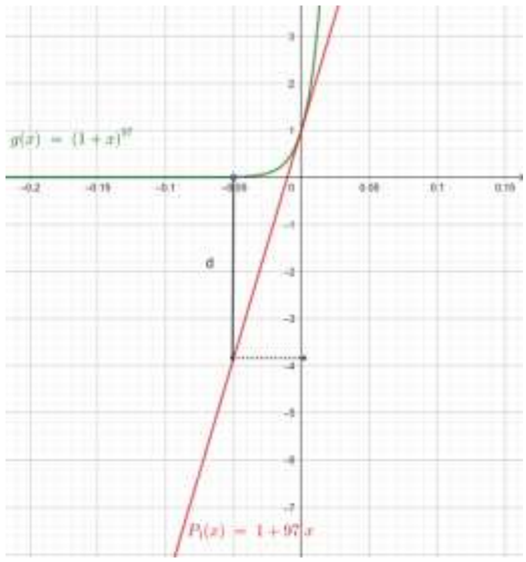


Graphique 4 : Vue globale du graphe de $f(x) = \sin(x)$ conjointement avec celui du polynôme de Taylor associé $P_1(x) = x$, au voisinage de 0.



Graphique 5 : Vue locale en zoomant autour de $x_0 = -0{,}05$du graphe de $f(x) = \sin(x)$ conjointement avec celui du polynôme de Taylor associé $P_1(x) = x$, au voisinage de 0.





Graphique 6 : Vue globale du graphe de $f(x) = (1 + \mathrm{x})^{97}$ conjointement avec le graphe du polynôme de Taylor associé $P_1(x) = 1 + 97x$, au voisinage de 0.

Graphique 7 : Vue locale en zoomant autour de $x_0 = -0{,}05$du graphe de $f(x) = (1 + \mathrm{x})^{97}$ conjointement avec le graphe du polynôme de Taylor associé $P_1(x) = 1 + 97x$, au voisinage de 0.

Nous pensons que si l'étudiant lolo299 ainsi que les deux autres forumistes, qui étaient à l'origine de toutes ces analyses, n'ont pu expliquer les raisons de la valeur approchée « inacceptable » que lolo299 a trouvé de $(0{,}95)^{97}$, c'est parce qu'ils se sont limités à approcher la formule de Taylor-Young selon le point de vue purement syntaxique. Ajouter à ce point de vue, un regard sémantique prenant en compte les différents objets mathématiques en jeu dans la formule peut, à notre sens, aider à mieux conceptualiser la formule de Taylor-Young. Le registre graphique est, en fait, un bon registre pour l'étude sémantique des questions relatives à cette formule.

Nous ne connaissons pas les étudiants qui ont animé le forum de discussion sur la question de la valeur approchée de $(0{,}95)^{97}$. Mais, à travers leurs difficultés, nous avons reconnu les remarques des collègues universitaires de physique qui notent les difficultés de leurs étudiants à donner du sens aux liens qui existent entre les objets mathématiques en jeu dans la formule de Taylor-Young. Ceci nous a incités à étudier,à travers l'analyse des programmes de mathématiques des Instituts Préparatoires aux Etudes d'Ingénieurs, la place des aspects sémantiques dans l'enseignement de cette formule.

Par chance, dans l'IPEIM[6] un certain nombre d'enseignants de mathématiques ont construits collégialement un polycopié de mathématiques de référence mis au service de tous les enseignants. À travers ce polycopié nous analyserons aussi la place accordée aux aspects sémantiques relatifs à la formule de Taylor-Young.

[6] Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El Manar.

Analyse curriculaire de la formule de Taylor-Young

Dans ce qui suit nous présentons les analyses que nous avons mené, d'abord au niveau programme officiel de mathématiques et ensuite à travers le polycopié de mathématiques de l'IPEIM, relativement à la formule de Taylor-Young.

La formule de Taylor-Young à travers le programme de mathématiques des IPEI[7]

Les classes préparatoires aux études d'ingénieurs, en Tunisie, comportent deux années d'études couronnées par un concours national d'accès aux écoles d'ingénieurs. Pour la section mathématiques-physique, le programme des mathématiques de la première année s'étale sur les deux semestres au cours desquels les étudiants suivront, séparément, un cours d'algèbre et un cours d'analyse.

Selon les concepteurs, le programme des mathématiques « …est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant ou de scientifique» (IPEIEM, 2016, p. 2).

Pour atteindre cet objectif, le programme précise que le travail, avec les étudiants, doit se faire autour d'activités mathématiques visant à développer « six grandes compétences » :

> – s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
> – modéliser : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
> – représenter : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
> – raisonner, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
> – calculer, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
> – communiquer à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique (IPEIEM, 2016, p. 2).

Le programme d'analyse, est centré autour des deux concepts fondamentaux, celui des fonctions et celui des suites. Les concepteurs notent, dans l'introduction générale, l'importance de travailler les problèmes mathématiques selon une double approche : qualitative et quantitative. En ce qui concerne les fonctions (ce qui nous intéresse ici), ils marquent l'intérêt d'étudier, à la fois, leurs comportements global et local ou asymptotique. Ceci les amène à prévoir, dans le programme, tout un chapitre spécifique qui traite des méthodes de l'analyse asymptotique. Ils soulignent que ce chapitre sera exploité ultérieurement dans l'étude des séries.

[7] Les Instituts Préparatoires aux Etudes d'Ingénieurs

Chaque chapitre est présenté sous la forme d'un tableau à deux colonnes : colonne des « *CONTENUS*» et colonne des «*CAPACITÉS & COMMENTAIRES* ». Dans la première, les concepteurs précisent les différentes notions à enseigner relatives à ce chapitre. Dans la deuxième, ils notent leurs remarques, à prendre en compte, relatives à chaque notion.

La formule de Taylor-Young fait l'objet d'un enseignement explicite dans le cours d'analyse autour de la douzième semaine, trois semaines après l'enseignement de la formule de Taylor-Lagrange. En parallèle dans le cours d'algèbre du premier semestre, et autour de la neuvième semaine d'enseignement, la « Formule de Taylor polynomiale » fait l'objet d'un enseignement explicite dans un grand chapitre intitulé « Polynômes et fractions rationnelles ». Notons que la formule de Taylor avec reste intégrale est enseignée au début du deuxième semestre dans le cours d'analyse à la fin du premier chapitre « Intégration ».

La formule de Taylor-Young, est enseignée, dans le dernier chapitre intitulé « Analyse asymptotique »[8] dans le sous chapitre « Développements limités ». Dans ce chapitre les étudiants étudieront successivement les notions mathématiques suivantes : « Relations de comparaison : cas *des suites* », « *Relations de comparaison: cas des fonctions* », « *Développements limités* » et « *Exemples de développements asymptotiques* ».

Dans l'introduction générale, les concepteurs du programme soulignent que « L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. ». L'entrainement et l'exercice pratique sont à privilégier dans cette partie de cours. Les aspects théoriques sont de moindre importance. En effet, les concepteurs marquent que la priorité doit être donnée à « …la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de *propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison*. ».

En ce qui concerne les fonctions, les relations de comparaison (Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence) sont des relations qui permettent d'étudier et de comparer la vitesse de croissance d'une fonction à celle d'une autre fonction considérée comme plus « simple » au voisinage d'un point ou à l'infini. Ces relations de comparaison font intervenir, comme indiqué dans le programme, les notations $f = O(g), f = o(g)$ et $f \sim g$. Les étudiants rencontrent pour la première fois ces notations dans ce chapitre. Bien qu'elles soient syntaxiquement « simples », elles sont sémantiquement complexes comme nous l'avons souligné plus haut. Ne pas attirer l'attention des enseignants pour s'attarder sur l'analyse des propriétés élémentaires relatives à ces relations de comparaison laisse penser qu'elles sont transparentes. Nous mettons l'hypothèse que ces notations qui sont fortement utilisées dans la formule de Taylor-Young et dans les développements limités en général, ne sont pas suffisamment claires pour les étudiants.

[8] Ce chapitre est programmé à être enseigné en 14h.

La formule de Taylor-Young apparait dans le programme après l'introduction de la définition d'un développement limité ainsi que les propriétés (unicité des coefficients, la troncature du développement, le développement en 0 des fonctions paires et impaires) et les opérations (combinaison linéaire, produit, quotient, composée9) relatives à un développement limité.

Comme attendu, cette formule est présentée comme moyen permettant de donner un développement limité en un point lorsque la fonction f est de classe C^n. Or comme nous l'avons expliqué plus haut, exiger que la fonction f soit de classe C^n est excessif : la formule de Taylor-Young ne demande en fait de la fonction f que d'être n-fois dérivable en un point x_0. Le développement limité à tout ordre en 0 est particulièrement indiqué pour les fonctions $exp(x)$, $sin(x), cos(x), sh(x), ch(x), ln(1 + x)$, $(1 + x)^\alpha$ et $Arctan(x)$. Pour la fonction $tan(x)$, il est recommandé de ne pas demander son développement au voisinage de 0 au-delà de l'ordre 3.

Nous remarquons que les concepteurs du programme ont manqué de souligner que la formule de Taylor-Young est locale. Attirer l'attention des étudiants sur cet aspect est très important. En effet, les étudiants doivent connaitre que cette formule ne donne des informations sur la fonction f que lorsque le réel x est au voisinage du point x_0. Ainsi, elle ne sert que pour résoudre des problèmes locaux comme la détermination de limites ou l'étude locale de la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point M_0 de coordonnées (x_0,$f(x_0)$).

Dans l'introduction du chapitre, les concepteurs ont précisé que « Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir rapidement mener à bien des calculs asymptotiques simples ». Ainsi, et en analysant de plus près ce chapitre nous remarquons que les aspects syntaxiques du développement sont privilégiés au détriment des aspects sémantiques, comme l'interprétation graphique locale du développement en terme de voisinage et en terme d'ordre du développement, donnant du sens aux objets mathématiques en jeu dans la formule de Taylor-Young. Ceci nous laisse penser que pour les concepteurs du programme cette formule, est suffisamment transparente, qu'elle va de soi et donc ne nécessite pas un arrêt pour l'analyser et discuter de ses particularités. Pourtant dans l'introduction générale du programme, les concepteurs ont attiré l'attention sur la nécessité d'étudier les aspects locaux et globaux des phénomènes mathématiques. Ils ont aussi explicitement mentionné, dans la première grande compétence visée par le programme, l'importance « d'identifier des particularités ». Ce qui n'a pas été marqué à l'occasion de cette formule.

Il faut noter que dans l'introduction du chapitre « *Dérivation* » dans lequel est enseignée la formule de Taylor-Lagrange, les concepteurs du programme, ont souligné que « Dans de nombreuses

[9] Les concepteurs du programme font remarquer que « *Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible* ».

questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures » (IPEIEM, 2016, p. 24).

Ceci montre l'intérêt que semble donner les concepteurs au rôle du graphique pour travailler les aspects sémantiques servant à comprendre les phénomènes mathématiques et la signification des notions en jeu, au delà des aspects syntaxiques. Mais, paradoxalement, rien de cela n'est souligné aussi bien pour la formule de Taylor-Young que pour celle de Taylor-Lagrange. Par contre, les concepteurs ont spécifiquement rappelé l'importance de l'interprétation graphique pour la notion de « *dérivabilité en un point, nombre dérivé* », pour l'« *égalité des accroissements finis* », et pour le « *Théorème de la limite de la dérivée* ».

La formule de Taylor-Young à travers le polycopié de référence de la première année de l'IPEIM section Mathématiques-Physique

A l'université, en Tunisie, il n'y a pas de manuels universitaires officiels. Les enseignants ont la liberté de concevoir et construire leurs cours comme ils le perçoivent en se référant aux grandes lignes des programmes validés au niveau du ministère de l'Enseignement Supérieur par les Commissions Nationales Sectorielles (CNS) formées par des enseignants universitaires nommés par le ministère.

Le polycopié de cours de mathématiques que nous analyserons dans ce travail de recherche du point de vue de la formule de Taylor-Young est le fruit d'une initiative et d'une collaboration entre enseignants de mathématiques qui exercent à l'Institut Préparatoire des Etudes d'Ingénieurs d'El Manar (IPEIEM) rattaché à l'Université de Tunis el Manar (Tunisie). Certes il n'est pas une référence didactique officielle, mais les enseignants et notamment les nouveaux parmi eux peuvent le consulter pour une meilleure visibilité du programme officiel surtout que la formation dans les Instituts Préparatoires est couronnée par un concours national d'accès aux écoles d'ingénieurs. L'un des objectifs de cette initiative est d'essayer de rapprocher et de minimiser les écarts entre les pratiques enseignantes. Il faut noter aussi que ce document ne constitue pour l'enseignant qu'un des éléments de la situation de la classe. Il ne détermine pas les conditions et la manière d'utilisation de cette documentation si jamais il y a eu utilisation.

Il faut noter aussi qu'il n'est pas toujours possible d'avoir accès à l'université aux documents sur lesquels s'appui l'enseignant universitaire pour conduire sa classe de mathématiques. Le polycopié que nous analyserons représente, pour nous, une opportunité permettant d'étudier comment la transposition didactique interne de la formule de Taylor-Young s'est faite par un certain nombre d'enseignants de mathématiques exerçant à l'IPEIM. Ce projet de cours s'inscrit dans ce que Ravel (2003) appelle « savoir apprêté » en distinguant dans le processus de transposition interne deux étapes : du « savoir à enseigner » au « savoir apprêté » et du « savoir apprêté » au « savoir enseigné ». Au sujet du « savoir apprêté », elle note que ce savoir est :

> [...] Le résultat des choix didactiques et mathématiques faits par un enseignant en vue d'enseigner un objet de savoir mathématique donné. Notons que pour un enseignant, ce savoir « apprêté » s'identifie au projet de cours et que ce savoir est nécessairement autre que le savoir enseigné [...]. Le projet de cours de l'enseignant constitue donc pour nous une étape intermédiaire dans le processus de transposition didactique interne qui mène du savoir à enseigner au savoir enseigné (RAVEL, 2003, p. 19).

L'analyse du polycopié va nous permettre donc d'avoir une idée sur le rapport aux savoirs de certains enseignants de l'IPEIM aux sujets de la formule de Taylor-Young bien qu'ils sont obligés, malgré tout, de rester sous l'emprise des revendications du programme officiel.

En adéquation avec les instructions du programme officiel, la formule de Taylor-Young apparait dans le chapitre « analyse asymptotique »[10] après l'introduction de la notion de développement limité et d'un certain nombre de propriétés relatives au fonctionnement de cette notion. Les relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence sont introduites[11] avant l'introduction de la définition d'un développement limité.

Comme nous l'avons souligné et prévu plus haut, la formule de Taylor-Young est donnée, dans le polycopié, sous la forme d'une propriété au service de la notion de développement limité et ceci pour une fonction f de classe C^n :

Formule de Taylor-Young et développements limités usuels

Propriété 21 (Formule de Taylor-Young)

Soient $n \in IN$ et $f : I \to IK$ de classe C^n sur I. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en tout point a de I qui est :

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$lorsque $x \to a$ »

Dans cette propriété la fonction f est de classe C^n. Or, nous avons expliqué, plus haut, que le fait que f soit de C^nest excessif puisque qu'il suffit que la fonction f soit n-fois dérivable au point a pour que la formule soit valide. Cette formule n'a pas été démontrée dans ce chapitre. Les auteurs ont plutôt renvoyé explicitement le lecteur vers le chapitre « Intégration » pour découvrir la démonstration de ce résultat. En analysons ce chapitre (« Intégration ») nous n'avons pas trouvé la démonstration en question. Ce que nous avons trouvé est plutôt la démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral[12] suite à l'introduction de cette formule. Cette démonstration ne peut pas

[10] Il s'agit d'un chapitre de 22 pages dans lequel sont traitées successivement les notions suivantes :

1. Relations de comparaison : cas des suites (Relations de domination, de négligeabilité, Relation d'´equivalence).
2. Relations de comparaison : cas des fonctions (Relation de domination, de négligeabilité, Relation d'équivalence).
3. Développements limités (Généralités, Formule de Taylor-Young et Développements limités usuels, Dérivabilité et développement limité, Opérations sur les développements limités.
4. Applications des développements limités (Recherche de limites et d'´equivalents, Etude locale d'une fonction, Application `a l'étude d'asymptotes obliques).

[11] Nous ne discuterons pas ici de la problématique liée aux notations de Landau. Elle fera l'objet d'un article en cours de construction qui sera publié prochainement.

[12]Ce résultat est démontré par un raisonnement par récurrence et en faisant appel à la notion d'intégration par parties.

s'appliquer pour valider la formule de Taylor-Young puisque ni les hypothèses ni le reste ne sont les mêmes. La formule de Taylor-Young nécessite une fonction n-fois dérivable alors que la formule de Taylor avec reste intégral exige que f soit de classe C^{n+1}. La démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral telle qu'elle est présentée dans le polycopié implique la notion d'intégrale qui n'est pas encore enseignée quand la formule de Taylor-Young l'est déjà. Ceci pourrait expliquer pourquoi la formule de Taylor-Young n'est pas démontrée juste après l'introduction de la formule.

Les aspects locaux et globaux qui sont si important comme nous l'avons vu plus haut et comme ils sont mis en avant dans le programme officiel ne sont pas discutés en profondeur dans ce cours à l'occasion de la formule de Taylor-Young. Les auteurs du polycopié, à l'occasion d'une remarque donnent l'exemple solitaire de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour noter que cette fonction peut être approximée au voisinage de 0 par les parties régulières de son développement limité en 0. Ils donnent les polynômes $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + x^2$ et $P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ représentant les parties régulières de son développement limité pour les ordres $1{,}2\ et\ 3$. Ils illustrent l'idée d'approximation locale de la fonction f par les polynômes P_1, P_2 et P_3 en faisant appel à un simple graphique et notent juste après « *...que les parties régulières (polynômes de Taylor) ne sont de bonnes approximations de f qu'au voisinage de* 0. *Un développement limité n'a donc d'intérêt qu'au voisinage de* a. ». Nous trouvons que le graphique tel qu'il est proposé dans le polycopié ne semble pas jouer un rôle central pour une meilleure conceptualisation de la notion d'approximation et de ce qui en découle de cette approximation : le lien entre l'ordre du développement et la qualité de l'approximation de la fonction f, la signification et la traduction du reste d'un point de vue graphique… sont totalement absents. Le travail mathématique dans le registre graphique, qui est très pertinent dans le cas de la formule de Taylor-Young, ne semble pas tenir une place privilégiée pour les enseignants qui ont construit ce polycopié.

Le bref passage, concernant la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ne peut à lui seul clarifier les rapports entre les aspects locaux et globaux de la formule de Taylor et la traduction de ces rapports en termes de quantificateurs. Nous pensons que les concepteurs du polycopié ont raté une bonne occasion pour mettre un peu plus au clair la complexité du rapport entre local et global qui s'impose dans le travail mathématique à l'université et ce, à plusieurs occasions notamment en géométrie, en analyse ou encore en topologie. Nous mettons l'hypothèse que la compréhension des aspects locaux et globaux dans les énoncés mathématiques n'est pas immédiate et pose de vrais problèmes aux étudiants en général et particulièrement à ceux des instituts préparatoires aux études d'ingénieurs.

Nous remarquons aussi, dans ce chapitre, que les aspects calculatoires du développement sont privilégiés au détriment des aspects qualitatifs donnant du sens à la formule de Taylor-Young. L'interprétation graphique du développement et la mise en avant de l'aspect local du développement, du rôle de l'ordre du développement en relation avec l'erreur commise localement entre la fonction et son polynôme de Taylor sont tous absents.

Il faut noter que le reste dans la formule de Taylor-Young est proposé avec une expression impliquant la notation « petit *o* » de Landau. L'expression du reste impliquant les epsilons est dévoilée rapidement sous forme de remarque comme si le rapport entre elle et l'expression engageant la notation « petit *o* » est suffisamment transparent permettant de saisir et de faire le passage de l'une vers l'autre sans difficultés. Or nous avons souligné plus haut que la notation « petit *o* » n'est pas aussi transparente comme elle peut le paraître. Nous pensons que l'expression de la notion de négligeabilité en ayant recours aux epsilons est plus signifiante et moins problématique pour les étudiants[13].

Il faut noter que paradoxalement la formule de Taylor-Lagrange qui devrait figurer dans le chapitre « *Dérivation* » est absente. Elle est totalement absente dans ce polycopié.

Nous pouvons expliquer cette absence par la liberté que se donnent certains enseignants universitaires dans la construction de leur cours. Ce qui les conduit parfois à faire des dépassements et à imposer leurs propres avis sur ce qui est important à enseigner de ce qui est de moindre importance et voir même ce qui est sans importance. En tant qu'enseignant universitaire nous avons toujours assisté à des discussions pareilles entre les collègues.

L'écart didactique entre les pratiques de classe des enseignants d'une part, et les revendications du programme et la réalité de la classe d'autre part, au niveau du lycée, a conduit Ravel (2003), à souligner dans l'introduction de sa thèse que :

> Si un observateur curieux ouvre la porte de différentes salles de classe et observe plusieurs professeurs faire un cours sur un même objet mathématique à un niveau scolaire donné, il est fort probable, qu'en refermant les portes, il n'ait pas l'impression d'avoir observé exactement le même objet mathématique dans toutes les classes. Et si ce même observateur, pour essayer de s'expliquer ce phénomène, va ensuite consulter le programme scolaire –première référence à laquelle sont liés les professeurs pour construire leurs cours–, il risque également d'être surpris de constater qu'il existe un écart entre l'objet mathématique présent dans le programme et celui observé dans les classes (RAVEL, 2003, p. 16).

Si la situation est telle au lycée où les enseignants sont habituellement attachés aux documents officiels (programmes et manuels scolaires) que dire alors de la situation à l'université où les enseignants possèdent, malgré tout, une grande liberté dans l'exercice de leur métier.

Il faut cependant remarquer que dans la partie introductive « Définition de la dérivabilité », les auteurs du polycopié, ont introduit la définition d'un développement limité à l'ordre 1 en un point a d'une fonction f définie sur un intervalle I et ont énoncé et démontré juste après, la « propriété » qui lie la notion de dérivabilité en un point avec la notion de développement limité à l'ordre 1 en ce même

[13] Cette hypothèse est soumise à vérification dans un travail de recherche en cours de réalisation.

point[14]. Ils ont, également, fait appel à cette notion de développement limité à l'ordre 1 en un point a pour démontrer le fameux résultat : « *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a* ».

Aucune interprétation géométrique n'est développée à cette occasion. Le travail est fait exclusivement dans un registre algébrique. Or une interprétation géométrique du lien entre la notion de dérivabilité en un point et le développement limité à l'ordre 1 en ce point nous paraît importante pour une meilleure conceptualisation de la notion de dérivabilité et pour une bonne préparation à la compréhension de la notion de développement limité pour des ordres plus élevés. Le jeu entre les registres algébrique, numérique et géométrique permet d'avoir un meilleur accès à ces deux notions difficiles à visualiser et à comprendre pour un non expert. Il faut remarquer tout de même que les auteurs ont fait une brève interprétation géométrique du lien entre la dérivabilité au point a et la notion de tangente à la courbe C_f au point $A(a, f(a)$ mais cela reste insuffisant selon nous.

L'étude curriculaire que nous avons mené autour de la formule de Taylor-Young montre la dominance de l'approche syntaxique par rapport à l'approche sémantique. L'analyse graphique, si importante selon nous, de la formule semble être secondaire aussi bien dans le programme que dans le polycopié. L'approche de la formule de Taylor-Young du point de vue numérique est totalement absente. Tout ceci, montre la résistance des enseignants aux changements souvent recommandés les incitant à faire appel à au moins deux registres différents et à ne pas rester emprisonner dans le cadre algébrique souvent mobilisé solitairement dans la classe de mathématique. A ce sujet Arslan (2005) souligne la dominance de l'approche algébrique dans l'activité de l'enseignant et :

> Confirme que la prégnance historique de la résolution algébrique persiste à peser dans l'enseignement actuel français mais aussi au plan international. D'ailleurs cette tendance reste confirmée dans l'analyse des manuels et des programmes que nous avons faite dans la partie B de cette thèse (ARSLAN, 2005, p. 19).

Conclusion

Dans ce travail de recherche nous avons essayé d'étudier pour, des fins didactiques, les aspects mathématiques et sémiotiques relatives à la formule de Taylor-Young. Nous avons mené aussi une étude curriculaire au niveau des programmes officiels de l'enseignement de l'analyse de la première année de l'IPEIM section Mathématiques-Physique que nous avons complété par une analyse d'un polycopié rédigé par un groupe d'enseignants universitaires.

[14]« *Propriété : Soit* $f: I \to R$ *et* $a \in I$.
f *est dérivable en* a *si et seulement si* f *admet un développement limité à l'ordre* 1 *en* a, *et ce développement limité est alors nécessairement :*

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\mathcal{E}(x).$$ " (p. 3)

Il nous semble que ce travail de recherche a pu mettre en évidence que même si le contrôle syntaxique, à lui seul, permet d'aboutir à un développement de Taylor mathématiquement valide dans la majorité des cas, on ne peut pas faire l'économie d'un contrôle sémantique de la validité du développement de Taylor-Young, dans certains cas, surtout lorsqu'on applique ce développement pour faire un calcul numérique approché.

Pour une conceptualisation adéquate de la formule de Taylor-Young nous avons montré, en adéquation avec le point vue de Duval (1993), l'intérêt d'approcher ce développement en le convertissant du registre algébrique au registre des représentations graphiques en insistant sur les notions de voisinage, d'ordre du développement et de la signification sémantique du reste du développement et donc de l'erreur commise à chaque développement.

L'analyse du programme officiel a montré que les concepteurs incitent, en générale, les enseignants à étudier les problèmes mathématiques selon la double approche qualitative/quantitative. Cependant, et en ce qui concerne la formule de Taylor-Young, ils n'ont pas particulièrement insisté sur l'importance de ce double regard. L'analyse a montré aussi que l'approche graphique du développement de Taylor est presque absente et que là l'approche calculatoire algébrique est, par contre, dominante.

Nous avons remarqué que, tout comme les concepteurs du programme, les enseignants du polycopié ont privilégié et de loin les aspects calculatoires pour les développements de Taylor. Si le jeu entre les registres algébrique et graphique est quasi-absent, il est totalement manquant entre le registre numérique d'une part, et les registres algébrique et graphique, d'autre part. Or ce jeu entre les différents registres, comme nous l'avons montré tout au long de cet article, est très important pour une bonne conceptualisation de la formule de Taylor-Young.

Ce travail de recherche demande à être complété sur de nombreux points, notamment l'observation des étudiants en situations réelles appelant l'usage de la formule de Taylor-Young dans les différents registres algébrique, graphique et numérique. Une étude des pratiques des enseignants de mathématiques et de physique dans des classes ordinaires ne peut que nous éclairer davantage sur les difficultés réelles relatives à l'enseignement et l'apprentissage de cette formule. Il est tout aussi intéressant de mener une recherche didactique sur les notations de Landau qui sont parfois porteuses d'ambiguïtés pour un non averti.

Recebido em:02/03/2022

Aprovado em: 22/05/2022

Références

ARSLAN, S. **L'approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale S:** Est-elle viable? Quels sont les enjeux et les conséquences ?. Thèse. Université Joseph Fourier, Grenoble, 2005.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et de validation. **Educational Studies in Matematics**, Dordrecht, v. 18, p.147-176, 1987.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.7, n.2,p. 33-115, 1986.

BRUNEAU, O. **Pour une biographie intellectuelle de Colin Mac-Laurin (1698-1746)** : ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien. Thèse. Université de Nantes, Nantes, 2005.

BURKHADART, H ; WIRTINGER, W. **Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées**, Tome II, Premier volume, Fonctions de variables réelles, éd. françaiseréd. Et publ. d'après l'éd. allemande sous la dir. de Jules Molk, 1909.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p.5-32.

DOUADY, R. Tool, Object, Setting, Window: Elements for Analysing and Constructing Didactical Situations in Mathematics. *In* : BISHOP, A.-J. MELLIN-OLSEN, S.; VAN DORMOLEN, J. (Eds.). **Mathematical Knowledge**: Its Growth Through Teaching (p. 107-130). Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

.
DURAND-GUERRIER, V ; BEN KILANI, I. Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire tunisien, **Les Cahiers du Français Contemporain**, Lyon, v.9, p. 29-55, 2004.

DURAND-GUERRIER, V.; ARSAC, G. An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.60, n.2, p. 149-172, 2005.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v.5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 61, n.1, p. 103-131, 2006.

GRENIER, D. et. al. Introduction aux limites de fonction et de suite : adaptation de deux ingénieries. *In* : THEIS, L. (Ed.). **Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015** (p. 666-676). Alger : Université des Sciences et des Techniques Houari Boumedien, 2015.

INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEURS EL MANAR. **Classes préparatoires MP**: Programme de mathématiques première année, 2016. http://www.ipeiem.rnu.tn/sites/default/files/Prog Maths MP 1ère année.pdf.

KOUKI, R. ; GRIFFITHS, B.J. Introducing Taylor Series an Local Approximations using Historical and Semiotic Approach. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, n. 2, em0573, 2020.

KOUKI, R. **Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire** : entre syntaxe et sémantique. Thèse. Université de Lyon 1, Université de Tunis, Lyon-Tunis, 2008.

MARTIN, J. Differences between experts 'and students' conceptual images of mathematical structure of Taylor series convergence. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n.2, p.267-283, 2013.

MASCHIETTO, M. **L'enseignement de l'Analyse au lycée** : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices. Thèse de doctorat. Université Paris 7-Denis Diderot, Paris, 2002.

RASMUSSEN, C. ; WAWRO, M. Post-calculus research in undergraduate mathematics education. *In* : CAI, J. (Ed.). **The compendium for research in mathematics education**. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2017.

RAVEL, L. **Des programmes à la classe** : Etude de la transposition didactique interne : Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique. Thèse. Laboratoire Leibniz-IMAG, Grenoble, 2003.

TALL, D. ; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.12, p. 151-169, 1981.

WEBER, K. ; ALCOCK, L. Semantic and syntactic proof production. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.56, p. 209-234, 2004.