Olhares síntático e semântico sobre a fórmula de Taylor-Young

Syntactic and semantic views on the Taylor-Young formula

Rahim Kouki[1]

Imed Kilani[2]

Traduzido do francês para o português
Por Sonia Igliori

RESUMO

A fórmula de Taylor-Young é objeto de um ensino explicito realizado entre estudantes de um ciclo preparatórios para o acesso à engenharia na Tunísia. Esta pesquisa tem como objetivo analisá-lo sob o ângulo matemático e didático. Ela permitiu evidenciar a ilusão de transparência dessa fórmula e revelou sua complexidade sintática. Evidenciou, sobretudo, o interesse de abordá-lo semanticamente tanto do ponto de vista gráfico quanto do ponto de vista digital. A análise curricular que realizamos mostrou a pouca preocupação, tanto no programa oficial quanto nos "trabalhos preparados" pelos professores, da real consideração dos aspectos semânticos que a fórmula de Taylor-Young oculta..
***Palavras- chave** : Fórmule de Taylor-Young. Sintaxe e semântica. Material para o ensino.*

ABSTRACT

The Taylor-Young formula is the subject of explicit instruction in analysis upon entering university and particularly in preparatory classes for Tunisian engineering studies. This research aims to analyze it from both mathematical and didactic angles. It allowed to show the illusion of transparency of this formula and revealed its syntactic complexity. It has shown, above all, the value of approaching it semantically both from a graphic point of view and from a numerical point of view.The curricularа nalysis we carried out showed the lightness, both in the official program and in the "prepared knowledge" of the teachers, of the real taking into account of the semantic aspects concealed by the Taylor-Young formula.
***Keywords** : Taylor-Young formula. Syntax and semantic. Prepared knowledge.*

Introdução

A pesquisa que apresentamos neste artigo se inscreve na problemática da articulação de dois pontos de vista, o sintático e o semântico na abordagem das aproximações locais, mais precisamente da fórmula de Taylor-Young. Essa fórmula situa-se na base da noção de desenvolvimento limitado. De fato, se a função f é n-vezes derivável em uma vizinhanças de um ponto x_0, então f admite un desenvolvimento limitado no point x_0, o que decorre da fórmula de Taylor-Young. Essa fórmula desempenha, na realidade, um papel muito importante no domínio da análise matemática, pois ela permite as aproximações locais de funções complexas; a determinação simplemente de limites de funções; o estudo dos comportamentos assintóticos de funções nas vizinhnças do infinito ; o estudo local e posições de curvas com relação às suas tangentes etc.

1 rahim.kouki@ipeiem.utm.tn; https://orcid.org/0000-0002-8664-731X

2. Université Virtuelle de Tunis, Institut Supérieur de l'Education et la Formation Continue, ECOTID ; kilanis2006@yahoo.fr; https://orcid.org/0000-0001-9549-5250

Vários pesquisadores como Tall e Vinner (1981), Martin (2013), Rasmussen e Wawro (2017) e Kouki e Griffits (2020), ja tinham conduzido investigações no domínio das aproximações locais de funções. No entanto, uma pesquisa didática, para estudar particularmente a articulação dos dois pontos de vista sintático e semântico sobre a fórmula de Taylor-Young, por meio dos registros gráfico e digital não ocorreu, ao menos que seja de nosso conhecimento. Nesta pesquisa, nós partimos de uma constatação frequentemente levantada, por colegas universitários da física que destacam que seus estudantes do primeiro ano universitáiro dos Institutos Preparatórios aos Estudos de Ingenharia tunisianos, chegam ao meio de seus cursos de física com conhecimentos vagos em relação à fórmula de Taylor-Young. Segundo eles, os estudantes são certamente capazes de realizar um desenvolvimento de Taylor-Young sintaticamente correto, mas com muita frequência são incapazes de dar significado às relações que existem entre os objetos matemáticos em jogo na fórmula. Portanto no curso de análise, do primeiro ano universitário dos Institutos Preparatórios aos Estudos de engenheiros tunisianos, essa fórmula se torna o objeto de um ensino explicito à ocasião do estudo da noção de desenvolvimento limitado.

Na mesma visão que a de Duval (1993), levantamos a hipótese que o domínio da conversão da fórmula de Taylor-Young, entre os registros algébrico, gráfico e digital é necessário, para os estudantes, para uma boa conceituação que satisfaça tanto as exigências da atividade matemática que as de física e da informática. Nós consideramos que uma investigação de natureza matemática e didática dessa fórmula permite dar conta melhor das insuficiências que podem aparecer na conceituação da fórmula, no processo de sua transposição didática. Na primeira parte desse artigo, analisaremos os aspectos matemáticos da fórmula de Taylor-Young para esclarecer suas especificidades. A segunda parte será dedicada a um estudo semiótico, dessa fórmula no sentido de Duval (1993, 2006).

Essas análises, enriquecidas pelos conjuntos de enquadramentos introduzidos e desenvolvidos por Douady (1986, 1991), levam-nos a realizar um estudo em termos da transposição didáctica do programa oficial e dos "conhecimentos preparados" relativos a essa fórmula ensinada no área da análise matemática do primeiro ano da seção Matemática-Física (MP) do ciclo preparatório para estudos de engenharia.

Abordagem matemática-sintática da fórmula de Taylor-Young

A análise matemática, segundo uma abordagem sintática consiste em estudar a formação de expressões matemáticas e provas de acordo com um olhar puramente sintático. Trata da forma como um conjunto de conhecimentos reconhecidos matematicamente válidos (definições, teoremas, propriedades etc.) permite, por si só, construir novos conhecimentos matemáticos respeitando as regras do raciocínio e da lógica formal. Para Weber & Alcock (2004) uma produção de prova é qualificada como sintática quando é realizada sem recurso a gráficos ou outras representações intuitivas e não formais de noções matemáticas:

> Definimos uma produção de prova sintática como aquela que é escrita unicamente pela manipulação de definições corretamente declaradas e outros fatos relevantes de uma maneira logicamente permissível. Em uma produção de prova sintática, o provador não faz uso de diagramas ou outras representações intuitivas e não formais de conceitos matemáticos. Na comunidade matemática, uma produção de prova sintática pode ser coloquialmente definida como uma prova em que tudo o que se faz é "desembrulhar as definições" e "empurrar símbolos". (WEBER; ALCOCK, 2004, p. 210).

Analisar a fórmula de Taylor de acordo com uma abordagem sintática consiste, para nós, em considerá-la apenas como uma expressão formal que envolve uma função n-vezes diferenciável nas vizinhanças de um ponto x_0 e que permite que essa função seja substituída localmente por um polinômio P_n de grau n cujos coeficientes dependem apenas das derivadas da função nesse ponto. Isso é chamado de polinômio de Taylor de ordem n. Por razões de rigor matemático, injetamos uma função indeterminada denotada $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$, que é localmente negligenciada para $(x - x_0)^n$ desde que x tenda a x_0, para legitimizar a igualdade local seguinte:

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

Em sua obra *Methodus incrementorum directa et inversa*, publicada em 1715, B. Taylor antecipa a relação que segue, composta de um número infinito de termos:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

A propósito dessa expressão, Burkhadart. H et Wirtinger.W. (1909) destacam:

> […] Que ele (Taylor) considerou como caso limite de uma relação análoga, composta de um número n determinado de termos relativos ao x acréscimos finitos de ordem 1, 2, …, n-1 de uma função dada qualquer $f(x)$; B Taylor não estava aliás nada preocupado com o significado preciso do desenvolvimento
>
> $$f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$
>
> que figura no segundo membro da relação…» (Burkhadart. H & Wirtinger.W, 1909, p. 298).

Eles acrescentam, logo após, que essa mesma relação apareceu também em Euler, que também ele não estava preocupado, com as condições de sua validade. Foi destacada mais a importância de suas aplicações.

Além da importância desse resultado e seu impacto no campo da análise matemática, muitos matemáticos da época, dando importância ao rigor matemático, analisaram esse resultado buscando validá-lo matematicamente. Burkhadart. H & Wirtinger.W. (1909, p. 299-300) explicam que em sua obra editada em 1797 com o título *Théorie des fonctions analytiques*, Lagrange, retoma os n primeiros termos da relação de Taylor, substitui x por a $(x = a)$ e h por $b - a$ $(h = b - a)$ e escreve a expressão R_n que segue, que representa o que nós hoje chamamos resto de Lagrange :

$$R_n = f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!}f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) - \cdots \ldots\ldots. - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

Ele mostra rigorosamente, sob condições que f seja n - vezes derivável e que sua derivada de ordem n seja contínua, que R_n é exatamente igual à : $R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^n(t)dt$

Assim pela primeira vez, Lagrange torna preciso com exatidão o erro cometido, confrontando o valor da função com o que chamamos hoje o polinômio de Taylor de ordem n. Ele demonstra dessa formao teorema de Taylor com o resto integral.

A fórmula de Taylor-Young se enuncia habitualmente como segue:

Seja I um intervalo aberto não vazio de IRe seja $x_0$um ponto de I.

Seja $f: I \to IR$ una função e n um inteiro positivo. Se fé n-vezes derivável em I então, existe uma função

$\varepsilon(x)$definida em I, que tende a 0 quando x tende a x_0, tal que para todo $x \in V(x_0)\backslash\{x_0\}$ tem-se :

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

Essa fórmula tem uma extensão « local[3] » pois ela dá informações sobre a função f unicamente desde que o real x pertença à visinhança do ponto x_0 :

Se consideramos $P_n(x)$ o desenvolvimento de Taylor na ordem n en x_0, a fórmula de Taylor-Young pode se exprimir como segue:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma visinhamça $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ de x_0 para a qual

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon|x - x_0|^n$$

Se não se tem necessidade de informações precisas sobre o resto do desenvolvimento, essa fórmula é muito útil. É certo, ela não permite nem estimar e nem majorar o erro cometido na aproximação, mas ela permite resolver problemas locais como a determinação de limites ou o estudo da posição de uma curva com relação à sua tangente em um ponto M_0 de coordenadas $(x_0, f(x_0))$.

Essa fórmula é comumente usada para determinar desenvolvimentos limitados. Para isso, dá uma condição suficiente para que uma função f admita um desenvolvimento limitado na ordem n, na vizinhança de x_0: bastando que ela seja n-vezes diferenciável na vizinhança de x_0.

Em alguns trabalhos matemáticos e em muitos trabalhos acadêmicos, o enunciado da fórmula de Taylor-Young assume que a função f é de classe C^n, enquanto uma função n-vezes diferenciável no ponto x_0 é considerado suficiente. Por que então pedir mais uma hipótese?

[3] Em sua tése, Maschietto (2002) explica que fazer um estudo local coloca em jogo a noção de intervalo pela problemática de sua existencia. Ela ilustra essas propostas pela definição seguinte: *«...seja uma função $f: I \subset IR \to IR$, com I=$[a, b]$ e um ponto escolhido $x_0 \in]a, b[$. « fazer um estudo local da função f na vizinhamça de x_0 corresponde a procurar um intervalo (aberto e centrado em x_0), no qual uma propriedade é verdadeira* » (MASCHIETTO, 2002, p. 66).

Parecia que essa condição é imposta pela escolha da prova adotada para demonstrar o teorema de Taylor-Young a partir do teorema de Taylor-Lagrange que impõe que a derivada de ordem n seja contínua. A fórmula de Taylor-Young não é um corolário da fórmula de Taylor-Lagrange, como pode parecer. Esse é um resultado separado que pode ser demonstrado, por exemplo, via raciocínio de indução com a suposição de que f é stricto sensu n- vezes diferenciável, nem mais nem menos.

Com efeito, se considerarmos:

$$R_n(x) = f(x) - (f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n)$$

Para $n = 1$,

$$R_1 = f(x) - f(x_0) - f^{(1)}(x_0)(x - x_0)$$

Como f é derivável em x_0, então $\lim\limits_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f^{(1)}(x_0)$ o que equivale à

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{(1)}(x_0) + \varepsilon(\mathrm{x})$ com $\varepsilon(\mathrm{x})$ uma função real que tende a 0 qd x tende a x_0

Então

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f^{(1)}(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(\mathrm{x})$$

De onde $R_1 = f(x) - f(x_0) - f^{(1)}(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)\varepsilon(\mathrm{x})$

Aassim

$$R_1 = (x - x_0)\varepsilon(\mathrm{x})$$

Supomos agora que o resultado seja verdadeiro na ordem $(n - 1)$

$$P_n(x) = (f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n)$$

Portanto

$$P_n'(x) = (f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n)'$$

$$P_n'(x) = f^{(1)}(x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f'^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

$$R'_n(x) = f'(x) - P_n'(x) = (x - x_0)^{n-1}\varepsilon(x)$$

$$\int_{x_0}^{x} R_n'(t)dt = \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n-1}\,\varepsilon(t)dt$$

$$R_n(\mathrm{x}) = \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n-1}\,\varepsilon(t)dt$$

Tomemos $\varepsilon_1(x) = \frac{1}{|x-x_0|^n}\int_{x_0}^{x}(t - x)^{n-1}\,\varepsilon(t)dt$ com $\varepsilon_1(x_0) = 0$

Montramos que $\varepsilon_1(x)$ tende a 0 quando x tende a x_0.

Seja $\varepsilon_2 > 0$, como $\varepsilon(x)$ tende a 0 quando x tende a x_0, $\exists\ \eta > 0 / |t - x_0| \prec \eta \Rightarrow |\varepsilon(t)| \prec \varepsilon_2$.

Se supomos que $|x - x_0| \prec \eta$ temos $|\varepsilon_1(x)| \prec \varepsilon_2 \frac{1}{|x-x_0|^n}\left|\int_{x_0}^{x}(t - x_0)^{n-1}\,dt\right|$

Portanto $|\varepsilon_1(x)| \prec \frac{\varepsilon_2}{n}$

Nós deduzimos que para $|x - x_0| \prec \eta$ temos $|\varepsilon_1(x)| \prec \frac{\varepsilon_2}{n}$ quer dizer que $\varepsilon_1(x)$ tende a 0 quando x tende a x_0. Portanto $R_n(x) = |x - x_0|^n \varepsilon_1(x)$ com $\varepsilon_1(x)$ tende a 0 quando x tende a x_0. De onde o resultado.

Essa prova mostra que não precisamos da continuidade da derivada n^ésima de f e que a hipótese que consiste a impor que f seja de classe C^n é «forte». Temos justamente a necessidade de considerar que f seja n-vezes derivável em uma vizinhança de x_0.

Isso mostra que existe uma lacuna didática, ao nível dos pressupostos da fórmula de Taylor-Young, entre o conhecimento puramente matemático aprendido e o conhecimento matemático proposto para ser ensinado. Essa diferença não tem, em nossa opinião, legitimidade matemática, mas talvez didática no caso em que a fórmula de Taylor-Young aparece no decorrer da análise antes de iniciar o capítulo de integração. De fato, a prova da fórmula implica a noção de integral que é naturalmente evitada. No entanto, essa escolha tem um custo que consiste em impor uma condição adicional, nomeadamente a continuidade da derivada n^ésima da função f.

O resto na fórmula de Taylor ($(x - x_0)^n \varepsilon(x)$) se apresenta, com frequência, sob a forma de $o((x - x_0)^n)$ conhecida pela «notação de Landau ». Essa notação, correntemente utilizada hoje em análise, deve se entender querendo dizer que $o((x - x_0)^n)$ é uma função negligenciável perante $(x - x_0)^n$ desde que x tenda a x_0. O que se traduz por $\lim_{x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Assim, a fórmula de Taylor-Young pode se apresentar sob a escrita seguinte:

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Essa notação, que historicamente remonta ao matemático alemão Paul Bachmann, que foi amplamente utilizada nos escritos de seu aluno Edmund Landau desde o início do século XX, levanta um certo número de problemas aos quais um didático não pode ficar indiferente. É certo que foi introduzido para facilitar os cálculos e a apresentação dos resultados, mas exige que o profissional tenha muita atenção ao manuseá-lo. Dizer que f=o(g) deve ser entendido como significando que f ϵ o(g), ou seja, que f é um elemento entre outros que são desprezíveis em relação à função g. Dizer também que o(g) - o(g) = o(g) não pode ser desprezado porque essa propriedade carece de rigor, clareza e até “viola” a semântica clássica dos símbolos de subtração e igualdade: «$-$» e « $=$ ». Essa propriedade deve ser lida usando um idioma em termos de conjuntos: seja $A = o(g)$ o conjunto das funções negligenciáveis diante$g$ e seja $B = A - A = o(g) - o(g)$ o conjunto das diferenças de duas funções de $A, B = A - A = A$ significa que B está contido em A. Acreditamos que o uso dessa notação nas aulas de matemática, física ou informática está longe de ser transparente para os alunos, mesmo que as coisas possam passar despercebidas. Um estudo didático relativo a essa notação pode, em nossa opinião, apenas conscientizar professores e alunos sobre o alcance semântico e sintático particular dessa notação.

Observe que, quando a fórmula de Taylor-Young se aplica à vizinhança de $x_0=0$, obtemos a chamada fórmula de Mac-Laurin explicada por:

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Mas é preciso saber que essa fórmula vista por esse ângulo sugere que esse matemático só tem o mérito de aplicar a fórmula de Taylor-Lagrange em uma determinada vizinhança de importância estratégica. Mas isso está incorreto. De fato, Mac-Laurin demonstrou essa fórmula de maneira diferente e chegou ao mesmo resultado que o de Taylor.

Em seu livro *Treatise of Fluxions* publicado em 1742, ele expõe sua demonstração e reconhece a de Taylor:

> Hoje, para muitos, o nome Mac-Laurin está associado principalmente à chamada fórmula Taylor-Mac-Laurin. Não vamos contar a história dessa fórmula, mas simplesmente dar a demonstração do nosso autor (Mac-Laurin). Essa fórmula aparece no Methodus Incremenrum direta et Inversa de Taylor, publicado em 1715, que Mac-Laurin reconhece em seu Traite des Fluxions. A demonstração encontra-se no livro II, artigo 751 (BRUNEAU, 2005, p. 352).

Um estudo didático da fórmula de Taylor-Young não pode, em nossa opinião, prescindir de uma análise semântica além da análise sintática que é muito desenvolvida na matemática, principalmente na universidade. Este é o assunto do próximo parágrafo.

Abordagem matemática-semântica da fórmula de Taylor-Young

A fórmula de Taylor-Young tem um enunciado com um vocabulário e uma sintaxe que sugere ser transparente, sem ambiguidades e que permite, através do seu formalismo e da sua própria sintaxe, um foco mecânico no seu significado, eliminando assim qualquer lugar no controlo e interpretação que são da ordem da semântica. No entanto, como Brousseau (1986) aponta: “Para evitar erros, não basta aplicar axiomas, é preciso saber do que se está falando e conhecer os paradoxos ligados a certos usos para evitá-los. Essa verificação é bem diferente da verificação matemática usual, que é mais "sintática"(BROUSSEAU, 1986, p. 43).

Como desenvolvemos acima, a fórmula de Taylor-Young é uma expressão expressa em uma linguagem formal e simbólica utilizando, sob condições, uma determinada função f bem como suas sucessivas derivadas. Encontrar o polinômio de Taylor associado a f na vizinhança de um ponto x_0 equivale a aplicar um algoritmo de cálculo “bastante simples”, desde que as derivadas sucessivas sejam fáceis de encontrar. Também pode ser uma questão de aplicar de forma “bastante mecânica” as habituais expansões limitadas para determinar o polinômio de Taylor associado à função f em questão. No entanto, trabalhar sob um controle exclusivamente sintático pode, em certos casos, levar a resultados “estranhos”. Balacheff (1987), como Brousseau (1986), adverte contra o trabalho exclusivamente sintático entre aprendizes. Sobre este assunto ele diz:

> É também o caso de situações em que o aluno tem de executar algoritmos, ordenar sequências, ou implementar práticas regidas por hábitos para as quais não se colocam questões de validade e consistência. (...) Essas situações não exigem controle de produções, além de qualquer erro contingente de execução, porque a situação diz respeito *a priori* "bons objetos", "boas relações", segundo um contrato que dispensa o exame das condições de validade da ação (BALACHEFF, 1987, p. 152).

Brousseau e Ballacheff destacam assim, a importância de não se limitar a um olhar puramente sintático manipulando noções matemáticas e produzindo provas. Em acordo com esse ponto de vista, Kouki (2008), Durand-Guerrier (2005), Durand-Guerrier e Ben Kilani (2004) também mostraram a necessidade de se ter uma visão semântica das noções matemáticas e não se limitar a uma abordagem sintática para um melhor controle das noções envolvidas na atividade matemática. Subscrevemos essa perspectiva para analisar a fórmula de Taylor-Young.

Conceituar adequadamente essa fórmula requer abordá-la de acordo com várias representações semióticas. Segundo Duval (1993), a diversificação das representações semióticas de um objeto matemático é um “ponto estratégico para a compreensão da matemática” (DUVAL, 1993, p. 37).

Um gráfico, uma fórmula algébrica, uma figura geométrica, uma afirmação em linguagem natural, um símbolo paramatemático podem ser representações semióticas para o mesmo objeto matemático. Ele (Ibid, p. 51) enfatiza a necessidade de apelar a pelo menos a dois registros semióticos diferentes e é preciso ser capaz de os coordenar entre si. A coordenação entre dois registros semióticos diferentes pressupõe a possibilidade de conversão de um para o outro. Duval (1993) enfatiza que ao converter um registro para outro, o objeto matemático deve manter a referência da representação inicial, mas deve permitir que a unidade de representação seja alterada, para acessar outras propriedades do objeto no registro de entrada . Segundo Duval, os aprendizes que não têm meios para fazer essa conversão não conseguem conceber bem o objeto conceitual e até terão dificuldade em manuseá-lo, corretamente, de acordo com as diferentes facetas das noções a ele associadas.

Não vamos discutir, neste artigo, a questão da congruência entre os registros para os objetos matemáticos envolvidos na fórmula de Taylor-Young. O que nos interessa aqui é mais o que poderia nos trazer, em termos de conceituação, a representação desses objetos em um registro em relação a outro.

Os registros disponíveis para uma boa conceituação da fórmula de Taylor-Young são *a priori*:

- registro algébrico: esse registro envolve as noções de funções e suas derivadas, polinômios e funções negligenciáveis;
- o registro da escrita formal e simbólica: ele envolve as notações $f, f^{(n)}$, «o pequeno», $n!$.
- o registro digital: ele envolve os cálculos aproximados.
- o registro gráfico: ele apela às representações em um sistema das curvas das funções e dos polinõmios de aproximação de Taylor.

Esses registros possuem diferentes funcionalidades de representação dos objetos matemáticos envolvidos na fórmula de Taylor-Young. Cada um permite que certas propriedades sejam visíveis e que outros não permitem diretamente.

A fórmula de Taylor-Young é um concentrado de objetos matemáticos inter-relacionados. A mudança de registro então não se referirá a um único objeto matemático, mas sim a um conjunto de objetos matemáticos emaranhados. Nesta pesquisa, estudaremos as conversões de objetos matemáticos inter-relacionados na fórmula de Taylor-Young entre os três registros: o de representações algébricas, o de representações gráficas e o de representações digitais.

A fórmula de Taylor-Young por meio dos registros algébrico e gráfica

A transição do registro algébrico para o registro gráfico e vice-versa requer o uso de diferentes processos cognitivos e marca uma distância cognitiva relativa a cada uma das passagens.

Conceituar adequadamente a fórmula de Taylor-Young é ser capaz, entre outras coisas, de fazer uma correspondência semântica dos elementos significativos envolvidos na fórmula, do registro algébrico ao registro gráfico e vice-versa.

Assim, combinar a ordem da expansão de Taylor na vizinhança de um ponto x_0 de uma função f e a “qualidade” da aproximação no registro gráfico, estabelece uma congruência entre os dois registros algébricos e gráficos.

Seja f uma função n-vezes deriváveis na vizinhança de x_0, então

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$$

com $P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ o polinõmio de Taylor de grau n na vizinhança de x_0.

$o((x - x_0)^n)$ é uma função indeterminada negligenciável para $(x - x_0)^n$quando x tende a x_0.

Por exemplo:

- $P_0(x) = f(x_0)$ é un polinômio de grau 0. Ele representa uma aproximação à ordem 0 da função f *na vizinhança* de x_0;
- $P_1(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0)$ é un polinômio de grau 1. Ele representa uma outra aproximação linear à ordem 1 da função f na vizinhança de x_0 ;

- $P_2(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$ é um polinômio de grau 2. Ele representa uma outra aproximação quadrática da função f na vizinhança de x_0.

  E assim sucessivamente...

  $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$…$P_n(x)$ são todos polinômios que reprsentam aproximações da função $f(x)$ na vizinhança de x_0. Mas $P_i(x)$ dá uma aproximação melhor que aquelas obtidas pelos polinômios $P_k(x)$ qualquer que seja o inteiro natural i superior estritamente ao inteiro natural k.

Vejamos um exemplo. Seja o desenvolvimento de Taylor-Young da função $f(x) = \exp(x)$ na vizinhança de 0 respectivamente à ordem 1 et 2:

$$f(x) = \exp(x) = 1 + x + o(x)$$

$$f(x) = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

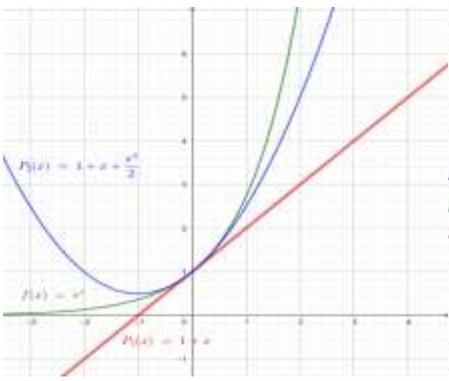
À ordem 1, $\mathrm{f(x)} - P_1(x) = \exp(x) - (1 + x) = o(x)$ (1)

À ordem 2, $f(x) - P_2(x) = \exp(x) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) = o(x^2)$ (2)

P_1 et P_2 são polinômios que aproximam em uma vizinhança de 0 a mesma função $f(\mathrm{x}) = \exp(x)$. Mas, a curva representativa de P_2 aproxima melhor que a curva representativa de P_1 o gráfico da função f fornecendo assim aproximações polinomiais de melhores qualidades, em função da ordem do desenvolvimento. A diferença entre a função f e seu polinômio de Taylor na vizinaça de 0 se exprime no primeiro caso por $o(x)$ e no segundo caso por $o(x^2)$. Para um valor x fixado vizinho de 0 o valor de $o(x^2)$ é menor que o valor de $o(x)$ (ver gráfico 2 abaixo). Isso dá uma aproximação de qualidade melhor entre f e o polinômio de Taylor de ordem 2 em relação à aproximação obtida entre f e o polinômio de Taylor de ordem 1.

No gráfico 1 abaixo são representados, em uma vizinhança de 0, a curva da função $f(x) = \exp(x)$e as curvas relativas aos polinômios de Taylor $P_1(x) = 1 + x$ e $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$.

O gráfico 2 permite ver localmente como a qualidade da aproximação depende da ordem do desenvolvimento, isto é do grau do polinômio de Taylor associado à função f.



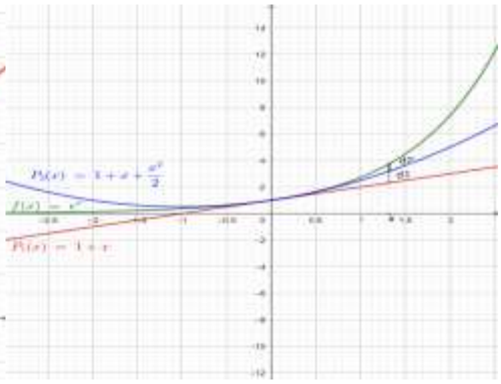


Gráfico 1 : Vista global do gráfico da função $f(x) = \exp(x)$ conjuntamente com os polinômios de Taylor associados à ordem 1 e 2 na vizinahnca de 0.

Gráfico 2 : Vista local do gráfico da função $f(x) = \exp(x)$ conjuntamente com os polinômios de Taylor associados à ordem 1 e 2 na vizinahnca de 0. $d_1$representa $o(x)$ e d_2 representa $o(x^2)$ para x fixado vizinho de 0.

Deve-se notar que quando a ordem i é fixa, ou seja, que o polinômio Pi(x), quanto mais se afasta de 0, mais aumenta a diferença entre a função f e os polinômios Pi. Assim, quanto mais se afasta de 0, mais a aproximação local será de má qualidade.

Sejam x_1, x_2 e x_3 três números reais estritamente positivos, próximos de 0 tais que, x1>x2>x3. Notamos, no gráfico 3 abaixo, que a diferença d1 entre $\exp(x_1)$ e P_1 (x_1) é maior que a diferença d_2 entre $\exp(x_2)$ e P_1 (x_2), e é ainda maior que a diferença d_3 entre $\exp(x_3)$ e P_1 (x_3). Assim, quanto mais próximo de 0, melhor será a aproximação entre a função e seus polinômios de Taylor. Achamos muito interessante, para uma melhor conceituação das noções envolvidas na fórmula de Taylor, ilustrar, para os alunos, seus detalhes de ordens semânticas usando *softwares* de geometria dinâmica como o GeoGebra . Seu interesse reside no fato de permitir criar animações e visualizar todas as etapas da construção gráfica realizada. Também permite ampliar e assim ver a precisão e qualidade da aproximação da função, de acordo com o polinômio de aproximação e, portanto, de acordo com a ordem do desenvolvimento.

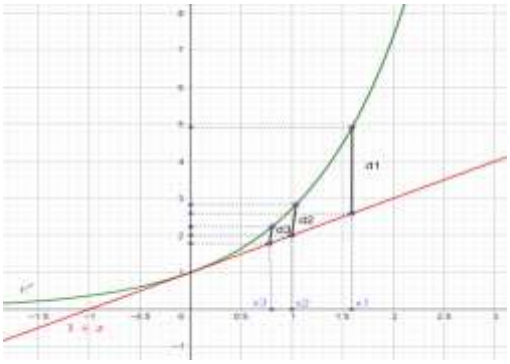


Gráfico 3: Gráfico de $f(x) = e^x$ conjuntamente comc o gráfico do polinômio de Taylor associado a $P_1(x) = 1 + x$, na vizinhança de 0. d_i representa o erro da aproximação entre $f\ et\ P_1$ em função de x_i onde $i \in \{1,2,3\}$.

A fórmula de Taylor-Young por meio dos registros algébrico, digital e gráfico

A transição do registro algébrico para o registro digital da fórmula de Taylor-Young nos confronta com o raciocínio relativo às aproximações digitais geralmente chamadas de cálculo aproximado. Essa passagem geralmente é transparente, mas em alguns casos não é. O exemplo a seguir pode destacar a necessidade de controle semântico e não depender apenas do processamento sintático.

Consideremos a função $g(x) = (1 + \mathrm{x})^{97}$. g é n-vezes derivável na vizinhança de 0. A fórmula de Taylor-Young aplicada à g na vizinhança de 0 na ordem 1 dá o polinômio de Taylor $Q_1(x) = 1 + 97x$, portanto na vizinhança de 0, $(1 + \mathrm{x})^{97} \sim 1 + 97x$.

Essa expressão permite encontrar um valor aproximado da função, quando um valor próximo de 0 é atribuído a x. Estar próximo de 0 já traz um problema semântico de saber a partir de qual valor x é considerado próximo de zero? Essa questão é crucial, para aproximações locais, quando se quer passar do registro algébrico para o registro digital, algo que o físico pratica com bastante frequência.

No site de ciências do futuro[4], um estudante (lolo299) lançou uma discussão[5] sobre a determinação do valor aproximado do número $(0{,}95)^{97}$. Ele declara que ao resolver um exercício de probabilidade, ele se depara com esse número. Não tendo uma calculadora disponível, ele usa uma expansão Taylor-Young da função$(1 + x)^{97}$. Ele ressalta que se tomarmos x= - 0,05, essa expansão de ordem 1 leva os cálculos a um valor aproximado de $(0{,}95)^{97}$ "inaceitável". Perplexo, ele então se perguntou de que ordem o restante do desenvolvimento é desprezível para poder usar o desenvolvimento e, assim, calcular valores numéricos aproximados no campo da física. Outro forumista (Garnet) disse a ele que em física paramos o desenvolvimento no primeiro termo diferente de zero. Afirmando, não entendendo sua resposta, lolo299, três horas depois, reafirma seu problema novamente, explicando sua consternação:

> Minha questão é saber se existe uma técnica que permite saber a partir de qual ordem pode-se explorar o desenvolvimento limitado de uma função em física, se não isso não serve a nada, não?
> Eu tenho grande dúvida das aproximações de primeira ordem que se pode fazer em física sem verdadeira justificativa (por exemplo a equação do movimento de um pêndulo faz intervir sen(x) que nós substituimos por x sem saber se isso será suficiente para corresponder "digitalmente" ao seno).

Não tendo tido resposta para sua verdadeira pergunta e ainda pensando que sua dificuldade se devia à sua incapacidade de determinar a ordem do desenvolvimento necessário, ele escreveu meia hora depois:

> Existe uma técnica que possibilite saber a partir de qual ordem se pode explorar a expansão limitada de uma função na física para que ela fique "numericamente" próxima da função. Voltando ao meu exemplo, quero uma precisão de 0,0001, por exemplo, como posso deduzir a ordem necessária?

Meia hora depois, ele recebe uma resposta de um usuário do fórum (Hamb) dizendo:

> Na verdade, o que você quer é determinar a diferença entre sua função e a expansão limitada que você usa, para isso você pode usar a desigualdade de Taylor-Lagrange que é declarada aqui.

Seis minutos depois, Garnet retorna e informa que "Matematicamente é preciso utilizar a fórmula de Taylor permanecendo integral".

Três minutos depois, lolo299 agradece a Hamb e diz a ele que "é exatamente o que eu queria!! ".

Mas, as trocas foram interrompidas e lolo299 não recebeu uma resposta explicativa para seu problema. Lolo299 pensava que o valor aproximado de $(0{,}95)^{97}$« inaceitável » que ele havia

---

[4] www.futura-sciences.com

[5] https://forums.futura-sciences.com/mathematiques-superieur/265480-developpement-limite-physique.html

encontrado ($(0{,}95)^{97} \approx -3{,}85$) depende da ordem inadequada de seu desenvolvimento e que basta encontrar a ordem certa para encontrar um valor aproximado com uma precisão da ordem de 10^{-4}, como ele havia dito.

Analisemos a problemática de lolo299.

Lolo299 estava consciente que havia um problema com o valor que ele tinha encontrado após a aplicação de um desenvolvimento de Taylor-Young na ordem 1, na vizinhança de 0 da função $\mathrm{g(x)} = (1 + \mathrm{x})^{97}$. Tratando-se de um estudante de nível secundário, ele sabia que $(0{,}95)^{97}$é um número muito inferior a 1 ($(0{,}95)^{97} \approx 0{,}0069$). Ele se pergunta então como seu cálculo aproximado dá o valor $(1 + 97.(-0{,}05)) = -3{,}85$. Essa diferença «monumental», o levou a colocar em dúvida «a exploração» do desenvolvimento limitado, no registro digital e físico. Sem ser categórico, ele tenta explicar as razões dessa discrepância. Ele então acaba se convencendo de que basta encontrar a ordem correta da expansão Taylor-Young para que essa lacuna se torne fisicamente aceitável. Pergunta então, no fórum, se por acaso existe uma pessoa que conheça uma técnica que permita encontrar essa boa ordem. Lolo299 cuidou da ordem do desenvolvimento, mas não se preocupou nem com a escolha do valor de x=-0,05 nem com as características matemáticas da função $\mathrm{g(x)} = (1 + \mathrm{x})^{97}$.

A situação embaraçosa em que lolo299 se encontrava nem sempre surge. Muitas vezes a fórmula de Taylor-Young permite encontrar um cálculo aproximado "aceitável" sem realmente se preocupar com a ordem do desenvolvimento (em geral, em física, raramente vamos além da ordem de três) e sem se preocupar com o valor escolhido na vizinhança do ponto x_0 (o valor escolhido é considerado próximo de x_0 intuitivamente). Por exemplo, se aplicarmos uma expansão de Taylor-Young de ordem 1 à função$f(x) = sen\,(x)$ e substituirmos x pelo mesmo valor $(-0{,}05)$, encontramos que $\mathrm{sen}(-0{,}05) \approx (-0{,}05)$. A calculadora apresenta para $\mathrm{sen}(-0{,}05) \approx -0{,}04997$. O polinômio de Taylor na ordem 1 permite, dessa vez, uma «boa» aproximação do valor de $\mathrm{sen}(-0{,}05)$.

Como se pode, então, explicar a adequação entre o valor afixado pela calculadora e o valor encontrado via o polinômio de Taylor para a função $f(x) = sen(x)$ para $x = -0{,}05$? E como se pode explicar a diferença «impressionante» entre o valor anunciado pela calculadora e o valor encontrado via o polinômio de Taylor para a função $g(x) = (1 + x)^{97}$ para o mesmo valor $x = -0{,}05$?

Uma visão puramente sintática dificulta o esclarecimento de um não especialista nessa questão. Acreditamos que não podemos prescindir de uma verificação semântica sobre a questão.

Matematicamente, o polinômio de Taylor de ordem n é uma aproximação da função $f(x)$ em torno de x_0 que desde que o resto de Taylor $o((x - x_0)^n)$ é desprezível diante $(x - x_0)^n$ isto é desde que $\frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}$ tenda a 0 quando x tende a x_0.

No entanto, o resto não permite controlar o erro cometido na aproximação. Tudo o que sabemos é que é possível tornar nulo localmente o polinômio de Taylor Pn na função f em torno de x_0, desde que x seja o mais próximo que queremos de x_0. A particularidade do x, aqui, é que ele representa uma quantidade variável, tão variável quanto se queira em torno do valor x_0. É essa variabilidade de x que sempre nos permitirá aproximar a função f pelo seu polinômio de Taylor. Assim podemos sempre encontrar uma vizinhança $V(x_0)$ tal que para todo x nessa vizinhança, a diferença em valor absoluto entre f(x) e Pn(x) seja tolerável, de acordo com a precisão desejada. Matematicamente, podemos traduzir esta última frase da seguinte forma:

Para todo «entorno de tolerância» ε>0, pode-se encontrar «entorno de garantia » $\eta(\varepsilon, f, n) > 0$ tais que, desde que x esteja próximo de x_0 a menos de $\eta(\varepsilon, f, n)$, então $f(x)$ está próximo de $P_n(x)$ a menos de ε. Insistimos muito no fato de que η é um valor que depende ao mesmo tempo de ε, da função f e da ordem n da expansão de Taylor. Essa correlação é muitas vezes negligenciada nas definições propostas da noção de limite finito de uma função real. O fato de η depender de ε, de f e de n mostra que para cada “valor de tolerância” ε, segue-se um “valor de garantia” η. Ou seja, a vizinhança $V(x_0)$ não pode ser escolhida livremente. Depende da precisão buscada na diferença em valor absoluto entre f(x) e Pn(x).

Nos exemplos acima, procuramos determinar um valor aproximado de $\operatorname{sen}(-0{,}05)$ e um valor aproximado de$(0{,}95)^{97}$ aplicando a fórmula de Taylor-Young na ordem 1 na vizinhança de 0 para a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ et $g(x) = (1 + \mathrm{x})^{97}$. Ao fazê-lo, consideramos que $(-0{,}05)$ está suficientemente próximo de zéro e portanto que ele se encontra em uma « boa » vizinhança de 0 permetindo via o polinômio de Taylor de encontrar um « bom » valor aproximado dos números $\operatorname{sen}(-0{,}05)$ e $(0{,}95)^{97}$. Essa abordagem da noção de vizinhança e de limite de uma função é muito intuitiva. É tão intuitiva que mesmo os matemáticos não olharam para uma definição rigorosa das noções de vizinhança e limite até pouco tempo. Weierstrass, no século 19 foi o primeiro matemático que propôs a definição de limite como é conhecido hoje. Nos currículos atuais do ensino médio, na França, por exemplo, essa abordagem intuitiva do limite de uma função é predominante, como apontado por (GRENIER et al., 2015):

> O ponto de vista analítico (do limite de uma função) está ausente: o infinitamente pequeno ou infinitamente grande, apenas evocado por expressões como "tão próximo quanto" ou "tão grande quanto" não são trabalhados, mesmo que haja um alguns exercícios de “álibis”. Desenho técnico: Os livros didáticos oferecem um grande número de "teoremas" ou propriedades que consistem apenas em uma lista de limites prontos, ou regras algébricas sobre limites. Como esses "teoremas" não são demonstrados e o aluno é encaminhado à intuição para entendê-los (e até justificá-los!), o ciclo se fecha (GRENIER et al., 2015, p. 670).

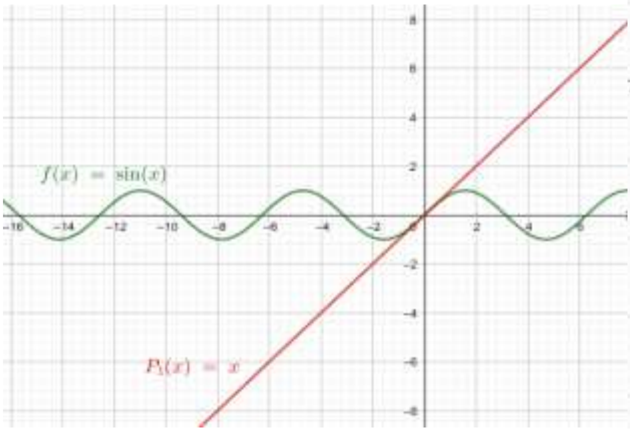
Eles resumem, logo em seguida, as deficiências, nos programas atuais, atribuíveis a essa abordagem intuitiva, que deve ser integrada para:

> […] Sensibilizar os alunos para os desafios da análise real na universidade de forma a promover uma entrada no ponto de vista conceitual necessário para uma apropriação da noção de limite […]
> • uma abordagem qualitativa do conceito de limite de função;
> • um trabalho introdutório sobre aproximações numéricas. Por exemplo: o que devo escolher para x para que f(x) seja menor em valor absoluto do que uma dada potência de 10 (para uma função limite zero).
> • problemas reais que vinculariam cálculos de aproximação e representações de bairros (por bandas) com o objetivo de dar sentido a expressões como "estar próximo" ou "ser maior que", etc.; ., preliminares às utilizadas para os limites (GRENIER et al., p. 670-671).

Nós apoiamos, plenamente, as recomendações propostas por esses autores porque permitem que os alunos, em nossa opinião, desde o ingresso na universidade, não só tenham acesso a uma visão conceitual necessária para uma apropriação da noção de limite, mas também possuam as ferramentas necessárias para uma conceituação apropriada da fórmula de Taylor-Young. Voltemos às análises feitas acima em relação aos valores aproximados de $\mathrm{sen}(-0{,}05)$ e de $(0{,}95)^{97}$.

Tomando-se o valor $x = -0{,}05$ e fixando o desenvolvimento de ordem 1 nós não verificamos, para cada um dos valores $f(x)$ e $g(x)$, se eles permitem obter valores aproximados de $\mathrm{sen}(-0{,}05)$ e de $(0{,}95)^{97}$ a menos de 10^{-4} , por exemplo. Apesar dessa falha nós pudemos chegar a um « bom » valor aproximado de $\mathrm{sen}(-0{,}05)$ mas nós tivemos ao mesmo tempo um « bem ruim » valor aproximado de $(0{,}95)^{97}$. Essa diferença foi devida às especificidades próprias de cada uma das funções $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ et $g(x) = (1 + \mathrm{x})^{97}$. De fato, a derivada da função f no zero é igual a 1 ($f'(0) = 1$), e a derivada da função g no zero é igual a 97 ($g'(0)$=97). Ora $f'(0)$ corresponde ao coeficiente angular da tangente de aproximação de f no ponto $(0, f(0))$ de equação $y = x$ e $g'(0)$ ao coeficiente angular da tangente de aproximação de g no ponto (0, $g(0)$) de equação $y = 97x + 1$. Localmente a tangente se confunde com a curva. Mas para a função f a inclinação da tangente é crescente « moderadamente», enquanto que para a função g a inclinação da tangente cresce de maneira bastante acentuada. Esses fatos têm por consequência que ao se distanciar um pouquinho de 0, a distância entre a curva representativa de f e sua tangente permanece pequena (ver os gráficos 4 e 5 abaixo). Em contraposição, desde que se dostancie um pouquinho de 0, a distância entre a curva representativa de g e sua tangente permanece « grande » (ver os gráfico 6 e 7 abaixo). Isso explica, graficamente, as raisons da adequação entre o valor afixado pela calculadora e o valor encontrado via o polinômio de Taylor para a função $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ para $x = -0{,}05$ e explica também a diferença importante entre o valor anunciado pela calculadora e o valor encontrado via o polinômio de Taylor para a função $g(x) = (1 + x)^{97}$ para o mesmo valor $x = -0{,}05$. As seguintes representações gráficas, em torno de 0, das funções f e g, bem como suas tangentes, ilustram seus detalhes de ordens semânticas.

A escolha da função g permite mostrar o interesse e a relevância de se ter um olhar semântico sobre a questão colocada e de não se limitar a um processamento sintático mecânico. O trabalho no registro digital levantou, neste caso, questões que podem não ter tido a ocasião de se manifester se o processamento da fórmula de Taylor-Young permaneceu stricto sensu no registro algébrico. Isso mostra um caso real da importância da mudança de registro, de algébrico para numérico, para controlar a validade da atividade matemática, procedimentos e raciocínio, pela força do controle semântico sobre a situação a ser resolvida.



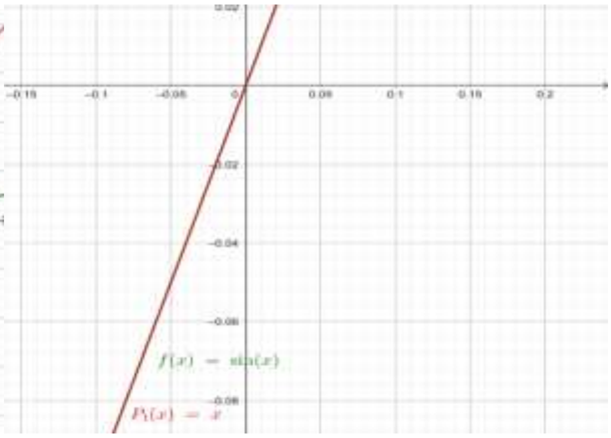
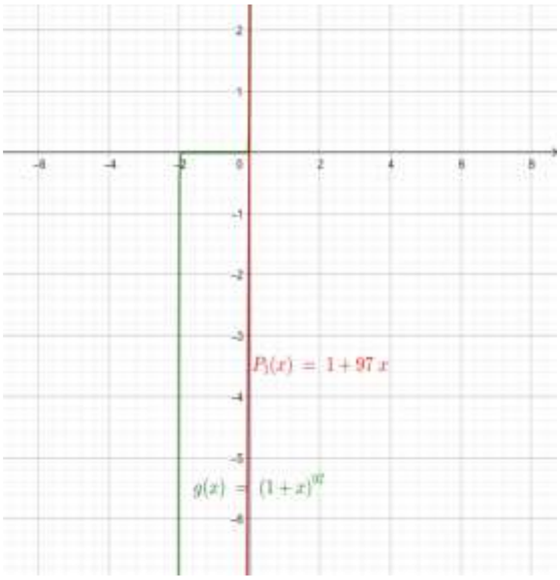


Gráfico 4 : Vista global do gráfico de $f(x) = \text{sen}(\text{x})$ conjuntamente com o do polinômio de Taylor associado $P_1(x) = x$, na vizinhança de 0.

Gráfico 5 : Vista local em zoom do entorno de $x_0 = -0{,}05$ do gráfico de $f(x) = \text{sen}(\text{x})$ conjuntamente com o do polinômio de Taylor associado $P_1(x) = x$, na vizinhança de 0.



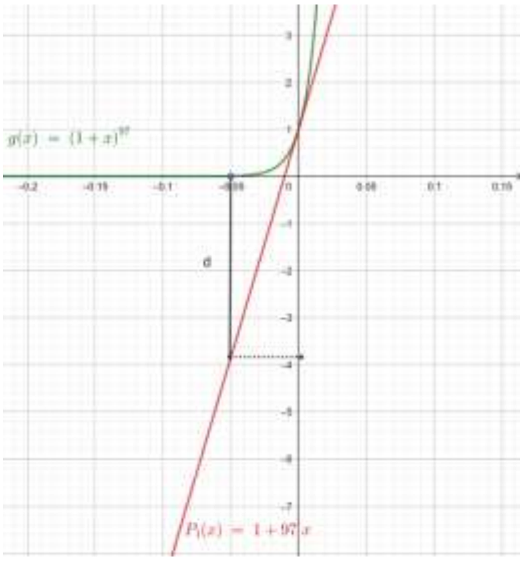


Gráfico 6 : Vista global do gráfico de $f(x) = (1 + \text{x})^{97}$ conjuntamente com o do polinômio de Taylor associado $P_1(x) = 1 + 97x$, na vizinhança de 0.

Gráfico 7 : : Vista local em zoom do entorno de x_0=-0,05 do gráfico de $f(x) = (1 + \text{x})^{97}$ conjuntamente com o do polinômio de Taylor associado $P_1(x) = 1 + 97x$, na vizinhança de 0.

Nós pensamos que se o aluno lolo299 assim como os outros dois forumistas, que estiveram na origem de todas essas análises, não souberam explicar as razões do valor aproximado "inaceitável" que lolo299 encontrou de$(0{,}95)^{97}$, é porque eles se limitaram a abordar a fórmula de Taylor-Young de um ponto de vista puramente sintático. Somando-se a esse ponto de vista, um olhar semântico levando em consideração os diferentes objetos matemáticos envolvidos na fórmula pode, em nossa opinião, ajudar a conceituar melhor a fórmula de Taylor-Young. O registro gráfico é, de fato, um bom registro para o estudo semântico de questões relativas a essa fórmula.

Não conhecemos os alunos que moderaram o fórum de discussão sobre a questão do valor aproximado de $(0{,}95)^{97}$. Mas, por meio de suas dificuldades, reconhecemos as observações de colegas da física, universitários, que notam as dificuldades de seus alunos em dar sentido às conexões que existem entre os objetos matemáticos envolvidos na fórmula de Taylor-Young. Isso nos levou a estudar, por meio da análise dos programas de matemática dos Institutos Preparatórios para Estudos de Engenharia, o lugar dos aspectos semânticos no ensino dessa fórmula.

Por sorte, no IPEIM[6], um certo número de professores de matemática elaborou, coletivamente, uma apostila de matemática de referência para uso de todos os professores. A partir dessa apostila, também analisaremos o lugar dado aos aspectos semânticos relativos à fórmula de Taylor-Young.

Análise curricular da fórmula de Taylor-Young

A seguir apresentamos as análises que realizamos, primeiro ao nível do programa oficial de matemática e depois da apostila de matemática do IPEIM, no que diz respeito à fórmula de Taylor-Young.

A fórmula de Taylor-Young no programa de matemática dos IPEI[7]

As aulas preparatórias para os estudos de engenharia, na Tunísia, incluem dois anos de estudos coroados por um concurso nacional de acesso às escolas de engenharia. Para a seção matemática-física, o programa de matemática do primeiro ano é dividido em dois semestres durante os quais os alunos seguirão, separadamente, um curso de álgebra e um curso de análise.

Segundo os projetistas, o programa de matemática "…é projetado para levar gradualmente todos os alunos ao nível necessário para cursar com sucesso um curso como engenheiro, pesquisador, professor ou cientista" (IPEIEM, 2016, p. 2) .

Para atingir esse objetivo, o programa especifica que o trabalho, com os alunos, deve ser feito em torno de atividades matemáticas destinadas a desenvolver "seis habilidades principais":

> – empreender pesquisas, implementar estratégias: descobrir um problema, analisá-lo, transformá-lo ou simplificá-lo, experimentar exemplos, formular hipóteses, identificar particularidades ou analogias;

[6] Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El Manar.

[7] Les Instituts Préparatoires aux Etudes d'Ingénieurs

> – modelo: extrair um problema de seu contexto para traduzi-lo em linguagem matemática, comparar um modelo com a realidade, validá-lo, criticá-lo;
> – representar: escolher o quadro (numérico, algébrico, geométrico, etc.) mais adequado para lidar com um problema ou representar um objeto matemático, alternando de um modo de representação para outro, mudando de registro;
> – raciocinar, argumentar: fazer inferências indutivas e dedutivas, realizar uma demonstração, confirmar ou invalidar uma conjectura;
> – calcular, usar linguagem simbólica: manipular expressões contendo símbolos, organizar as diferentes etapas de um cálculo complexo, realizar um cálculo automatizável manualmente ou usando um instrumento (calculadora, software, etc.), monitorar resultados;
> – comunicar por escrito e oralmente: compreender afirmações matemáticas escritas por outros, redigir uma solução rigorosa, apresentar e defender um trabalho matemático (IPEIEM, 2016, p. 2).

O programa de análise está centrado em dois conceitos fundamentais, o de funções e o de sequências. Os projetistas observam, na introdução geral, a importância de trabalhar os problemas matemáticos usando uma abordagem dupla: qualitativa e quantitativa. No que diz respeito às funções (o que nos interessa aqui), eles dão ênfase ao interesse de estudar, ao mesmo tempo, seus comportamentos globais e locais ou assintóticos. Isso os leva a fornecer, no programa, todo um capítulo específico que trata dos métodos de análise assintótica. Sublinham que esse capítulo será explorado posteriormente no estudo da série.

Cada capítulo é apresentado na forma de uma tabela com duas colunas: coluna de "CONTEÚDOS" e coluna de "CAPACIDADES & COMENTÁRIOS". No primeiro, os projetistas especificam as diferentes noções a serem ensinadas relacionadas a esse capítulo. Na segunda, eles anotam suas observações, a serem levadas em consideração, relativas a cada conceito.

A fórmula de Taylor-Young é ensinada explicitamente no curso de análise por volta da semana 12, três semanas depois que a fórmula de Taylor-Lagrange é ensinada. Paralelamente ao curso de álgebra do primeiro semestre, e por volta da nona semana de ensino, a "Fórmula Polinomial de Taylor" é objeto de ensino explícito em um grande capítulo intitulado "Polinômios e frações racionais". Observe que a fórmula de Taylor com resto integral é ensinada no início do segundo semestre no curso de análise no final do primeiro capítulo "Integração".

A fórmula de Taylor-Young, é ensinada, no último capítulo intitulado "Análise assintótica"[8] no subcapítulo "Desenvolvimentos limitados". Nesse capítulo, os alunos estudarão sucessivamente as seguintes noções matemáticas: "Relações de comparação: *caso de sequências*", "Relações de comparação: *caso de funções*", "*Expansões limitadas*" e "*Exemplos de expansões assintóticas*".

Na introdução geral, os projetistas do programa destacam que "O objetivo desse capítulo é familiarizar os alunos com técnicas assintóticas básicas, nos quadros discreto e contínuo. ". Treinamento e exercícios práticos devem ser preferidos nessa parte do curso. Os aspectos teóricos

[8] Esse capítulo está programado a ser ensinado em 14h.

são de menor importância. Com efeito, os projetistas salientam que deve ser dada prioridade "… à prática de exercícios em vez da verificação de *propriedades elementares relativas às relações de comparação*. ".

No que diz respeito às funções, as relações de comparação (relações de dominação, nigligenciabilidade, equivalência) são relações que permitem estudar e comparar a velocidade de crescimento de uma função com a de outra função considerada como "mais simples" perto de uma ponto ou no infinito. Essas relações de comparação envolvem, como indicado no programa, as notações $f = O(g), f = o(g)$ e $f \sim g$. Os alunos encontram essas notações pela primeira vez nesse capítulo. Apesar de serem sintaticamente "simples", são semanticamente complexas como apontamos acima. Não chamar a atenção dos professores para se deter na análise das propriedades elementares relativas a essas relações de comparação sugere que elas sejam transparentes. Nossa hipótese é que essas notações, que são amplamente utilizadas na fórmula de Taylor-Young e em expansões limitadas em geral, não são suficientemente claras para os alunos.

A fórmula de Taylor-Young aparece no programa após a introdução da definição de uma expansão limitada, bem como das propriedades (unicidade dos coeficientes, truncamento da expansão, expansão em 0 das funções par e ímpar) e as operações (combinação linear, produto, quocieente, composto[9]) relativo a um desenvolvimento limitado.

Como esperado, essa fórmula é apresentada como uma forma de dar uma expansão pontual quando a função f é da classe C^n. No entanto, como explicamos acima, exigir que a função f seja de classe C^n é excessivo: a fórmula de Taylor-Young na verdade exige apenas que a função f seja n-vezes diferenciável em um ponto x_0. A expansão limitada a qualquer ordem em 0 é ,particularmente, indicada para funções $exp(x)$, $sen(x), cos(x), sh(x), ch(x), ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}$ e $Arctan(x)$. Para a função $tan(x)$, recomenda-se não buscar seu desenvolvimento na vizinhança de 0 além da ordem 3.

Notamos que os projetistas do programa falharam em apontar que a fórmula de Taylor-Young é local. Chamar a atenção dos alunos para esse aspecto é muito importante. De fato, os alunos devem saber que essa fórmula fornece informações sobre a função f apenas quando o x real está na vizinhança do ponto x_0. Assim, ela é usada apenas para resolver problemas locais, como a determinação de limites ou o estudo local da posição de uma curva em relação à sua tangente em um ponto M_0 de coordenadas (x_0,$f(x_0)$).

Na introdução do capítulo, os projetistas especificaram que "os alunos devem conhecer as expansões limitadas usuais e saber como realizar cálculos assintóticos simples rapidamente". Assim,

[9] Os projetistas do programa destacaram que « Os estudantes devem saber determinar em exemplos simples o desenvolvimento limitado de uma composição, mas nenhum resultado geral é exigido».

e analisando mais de perto esse capítulo, notamos que os aspectos sintáticos do empreendimento são privilegiados em detrimento dos aspectos semânticos, como a interpretação gráfica local do empreendimento em termos de vizinhança e em termos de ordem do desenvolvimento, dando sentido aos objetos matemáticos envolvidos na fórmula de Taylor-Young. Isso nos permite pensar que, para os projetistas do programa, essa fórmula é suficientemente transparente, é evidente e, portanto, não requer uma parada para analisá-la e discutir suas particularidades. No entanto, na introdução geral do programa, os projetistas chamaram a atenção para a necessidade de estudar os aspectos locais e globais dos fenômenos matemáticos. Também mencionaram explicitamente, na primeira grande habilidade visada pelo programa, a importância de "identificar particularidades". O que não foi marcado por ocasião dessa fórmula.

Deve-se notar que na introdução ao capítulo "Derivação" em que a fórmula de Taylor-Lagrange é ensinada, os projetistas do programa enfatizaram que "Em muitas questões de natureza qualitativa, uma função é visualizada pelo seu gráfico. Vale ressaltar esse aspecto geométrico por meio de muitas figuras" (IPEIEM, 2016, p. 24).

Isso mostra o interesse que os projetistas parecem dar ao papel dos gráficos em trabalhar os aspectos semânticos usados para entender os fenômenos matemáticos e o significado dos conceitos envolvidos, além dos aspectos sintáticos. Mas, paradoxalmente, nada disso é sublinhado tão bem para a fórmula de Taylor-Young quanto para a de Taylor-Lagrange. Por outro lado, os designers lembraram especificamente a importância da interpretação gráfica para a noção de "diferenciabilidade em um ponto, número derivado", para a "igualdade de incrementos finitos" e para o "Teorema do limite da derivada".

A fórmula de Taylor-Young pela apostila de referência do primeiro ano da seção de Matemática-Física do IPEIM

Na universidade, na Tunísia, não há livros universitários oficiais. Os professores têm a liberdade de conceber e construir os seus cursos tal como o vêem, referindo-se ao esboço dos programas validados ao nível do Ministério do Ensino Superior pelas Comissões Setoriais Nacionais (CNS) formadas por professores universitários nomeados pelo Ministério.

A apostila de aulas de matemática que analisaremos neste trabalho de pesquisa do ponto de vista da fórmula de Taylor-Young é o resultado de uma iniciativa e colaboração entre professores de matemática que trabalham no Instituto Preparatório de Engenheiros de El Manar (IPEIEM) anexo à Universidade de Tunis el Manar (Tunísia). É certo que não é uma referência didática oficial, mas os professores e em particular os recém-chegados podem consultá-lo para melhor visibilidade do programa oficial, tanto mais que a formação nos Institutos Preparatórios é coroada por um concurso nacional de acesso às escolas de engenheiros. Um dos objetivos dessa iniciativa é tentar conciliar e minimizar as lacunas entre as práticas docentes. Note-se também que esse documento constitui para o professor apenas um dos elementos da situação da turma. Não determina as condições e a forma de uso dessa documentação se alguma vez houve uso.

Deve-se notar também que nem sempre é possível ter acesso na universidade aos documentos de que o professor universitário se baseia para conduzir sua aula de matemática. A apostila que analisaremos representa, para nós, uma oportunidade de estudar como foi feita a transposição didática interna da fórmula de Taylor-Young por um certo número de professores de matemática que atuam no IPEIM. Este projeto de curso faz parte do que Ravel (2003) chama de “conhecimento preparado” ao distinguir duas etapas no processo de transposição interna: a do “conhecimento a ser ensinado” ao ao “conhecimento preparado” e do“conhecimento preparado” “conhecimento a ser ensinado” . . ensina ". Sobre o tema “conhecimento preparado”, ela observa que esse conhecimento é:

> [...] O resultado das escolhas didáticas e matemáticas feitas por um professor para ensinar um determinado objeto de conhecimento matemático. Note-se que para um professor, esse saber "preparado" se identifica com o projeto do curso e que esse saber é necessariamente outro que o saber ensinado [...]. O projeto de curso do professor constitui, portanto, para nós, uma etapa intermediária no processo de transposição didática interna que conduz do conhecimento a ser ensinado ao conhecimento ensinado. (RAVEL, 2003, p. 19).

A análise da apostila permitirá, portanto, ter uma ideia da relação com o conhecimento de certos professores do IPEIM sobre as disciplinas da fórmula Taylor-Young, embora sejam obrigados, apesar de tudo, a permanecer sob o domínio das reivindicações do programa oficial.

De acordo com as instruções do programa oficial, a fórmula de Taylor-Young aparece no capítulo "análise assintótica"[10] após a introdução da noção de desenvolvimento limitado e um certo número de propriedades relativas ao funcionamento dessa noção. As relações de dominação, negligenciabilidade e equivalência são introduzidas[11] antes da introdução da definição de desenvolvimento limitado.

Como sublinhamos e previmos acima, a fórmula de Taylor-Young é dada, na apostila, na forma de uma propriedade a serviço da noção de expansão limitada e isso para uma função f de classeC^n :

---

[10] Trata-se de um capítulo de 22 páginas nas quais são tratadas sucessivamente as noções seguintes:

1. Relações de comparação: caso das sequências (Relação de dominação, de negligenciabilidade, Relação d´´equivalência).
2. Relação de comparação: caso das funções (Relação de dominação, de negligenciabilidade, Relação de equivalência).
3. Desenvolvimentos limitados (Generalidades, fórmula de Taylor-Young e Desenvolvimentos limitados usuais, Derivabilidade e desenvolvimento limitado, Operações sobre os desenvolvimentos limitados.
4. Aplicações dos desenvolvimentos limitados (Pesquisa de limite e de equivalentes, Estudo local de uma função, Aplicação ao estudo de assíntotas oblíquas).

[11] Nós não discutiremos aqui a problemática ligada às notações de Landau. Ela será objeto de um artigo em curso de construção que será publicado proximamente

Fórmula de Taylor-Young e expansões limitadas usuais

Propriété 21 (Fórmula de Taylor-Young)

Sejam $n \in IN$ e $f : I \rightarrow IK$ de classe C^n sobre I. Então f admite um desenvolvimento limitado na ordem n em todo ponto a de I tal que :

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$ desde que $x \to a$ »

Nessa propriedade a função f é de classe C^n. Ora, nós explicamos, em páginas anteriores, que o fato de que f seja C^n é excessivo pois é suficiente que a função f seja n-vezes derivável no ponto a para que a fórmula seja válida. Esta fórmula não foi provada nesse capítulo. Em vez disso, os autores encaminharam, explicitamente, o leitor ao capítulo “Integração” para descobrir a demonstração desse resultado. Ao analisar esse capítulo (“Integração”) não encontramos a demonstração em questão. O que encontramos é mais a prova da fórmula de Taylor com resto integral após a introdução dessa fórmula. Essa demonstração não pode ser aplicada para validar a fórmula de Taylor-Young, pois nem as suposições nem as demais são as mesmas. A fórmula de Taylor-Young requer uma função diferenciável n vezes enquanto a fórmula de Taylor com resto integral[12] requer que f seja da classeC^{n+1}. A prova da fórmula de Taylor com resto integral como é apresentada na apostila implica a noção de integral que ainda não é ensinada quando a fórmula de Taylor-Young já o é. Isso poderia explicar por que a fórmula de Taylor-Young não é demonstrada logo após a introdução da fórmula.

Os aspectos locais e globais que são tão importantes como vimos acima e como são apresentados no programa oficial não são discutidos, em profundidade, nesse curso por ocasião da fórmula Taylor-Young. Os autores do folheto, por ocasião de uma observação, dão o exemplo solitário da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para indicar que essa função pode ser approximada em uma vizinhança de 0 pelas partes regulares de seu desenvolvimento limitado em 0. Elas fornecem os polinômios $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + x^2$ e $P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ représentando partes regulares de seu desenvolvimento limitado para as ordens $1,2 \; e \; 3$. Eles ilustram a ideia de aproximação local da função f pelos polinômios P1, P2 e P3 usando um gráfico simples e notam logo após "...que as partes regulares (polinômios de Taylor) não são boas aproximações de f apenas na vizinhança de 0. Uma expansão limitada é, portanto, de interesse apenas na vizinhança de a. ". Constatamos que o gráfico proposto na apostila não parece desempenhar um papel central para uma melhor conceituação da noção de aproximação e do que decorre dessa aproximação: a ligação entre a ordem do desenvolvimento e a qualidade do aproximação da função f, o significado e a tradução do resto do ponto de vista gráfico… estão totalmente ausentes. O trabalho matemático no registro gráfico, muito

[12]Esse resultado está demonstrado por um raciocínio por recorrência e utilizando a noção de integração por partes

relevante no caso da fórmula de Taylor-Young, não parece ocupar um lugar privilegiado para os professores que construíram essa apostila.

A breve passagem, concernente à função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ não ppode por ele só clarificar as relações entre os aspectos locais e globais da fórmula de Taylor e a tradução dessas relações em termos de quantificadores. Acreditamos que os idealizadores da apostila perderam uma boa oportunidade de lançar um pouco mais de luz sobre a complexidade da relação entre local e global que é essencial no trabalho matemático na universidade e isso, em várias ocasiões, notadamente na geometria, na análise ou em topologia. Nossa hipótese é que a compreensão de aspectos locais e globais em declarações matemáticas não é imediata e apresenta problemas reais para estudantes em geral e particularmente para aqueles em institutos preparatórios para estudos de engenharia.

Nós destacamos também, nesse capítulo, que os aspectos computacionais do desenvolvimento são privilegiados em detrimento dos aspectos qualitativos que dão sentido à fórmula de Taylor-Young. A interpretação gráfica da expansão e o destaque do aspecto local da expansão, do papel da ordem da expansão em relação ao erro cometido localmente entre a função e seu polinômio de Taylor estão todos ausentes.

Observe que o resto na fórmula de Taylor-Young é fornecido com uma expressão envolvendo a notação “pequeno o” de Landau. A expressão do resto envolvendo os épsilons revela-se rapidamente sob a forma de uma observação como se a relação entre ela e a expressão envolvendo a notação "pequeno o" fosse suficientemente transparente para nos permitir captar e fazer a passagem de um a outro sem dificuldade. No entanto, destacamos acima que a notação “small o” não é tão transparente quanto parece. Acreditamos que expressar a noção de negligibilidade usando épsilons é mais significativo e menos problemático para os alunos.[13].

Observe que o resto na fórmula de Taylor-Young é fornecido com uma expressão envolvendo a notação “o pequeno” de Landau. A expressão do resto envolvendo os épsilons revela-se rapidamente sob a forma de uma observação como se a relação entre ela e a expressão envolvendo a notação "o pequeno" fosse suficientemente transparente para nos permitir captar e fazer a passagem de um a outro sem dificuldade. No entanto, destacamos acima que a notação “o pequeno ” não é tão transparente quanto parece. Acreditamos que expressar a noção de negligibilidade usando épsilons é mais significativo e menos problemático para os alunos.:

> Se um observador curioso abre as portas de diferentes salas de aula e observa vários professores dando uma aula sobre o mesmo objeto matemático em uma determinada série, é muito provável que, ao fechar as portas, ele não tenha a impressão de ter observado exatamente o mesmo objeto matemático em todas as classes. E se esse mesmo observador, na tentativa de explicar esse fenômeno, for consultar o programa escolar – a primeira referência a que os professores são obrigados a construir suas aulas – também corre o risco

[13] Essa hipótese foi assumida para verificação em um trabalho de pesquisa em curso de realização.

> de se surpreender ao constatar que há uma discrepância entre os objetos presentes no programa e aquele observado nas aulas (RAVEL, 2003, p. 16).

Se a situação é tal no ensino médio, em que os professores geralmente são atrelados a documentos oficiais (programas escolares e livros didáticos), o que então se pode dizer da situação na universidade onde os professores têm, apesar de tudo, grande liberdade no exercício de sua profissão?

No entanto, deve-se notar que na parte introdutória "Definição de diferenciabilidade", os autores da apostila introduziram a definição de uma expansão limitada de ordem 1 em um ponto a de uma função f definida em um intervalo I e afirmaram e demonstraram logo em seguida, a “propriedade” que liga a noção de diferenciabilidade em um ponto com a noção de expansão limitada de ordem 1 nesse mesmo ponto. Eles também recorreram a essa noção de desenvolvimento limitado de ordem 1 em um ponto a para demonstrar o famoso resultado: “Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a”.

Nenhuma interpretação geométrica é desenvolvida nessa ocasião. O trabalho é feito, exclusivamente, em um registro algébrico. No entanto, uma interpretação geométrica da ligação entre a noção de diferenciabilidade em um ponto e o desenvolvimento limitado de ordem 1 neste ponto, nos parece importante para uma melhor conceituação da noção de diferenciabilidade e para uma boa preparação para a compreensão da noção de diferenciabilidade limitada., desenvolvimento para ordens superiores. O jogo entre registros algébricos, numéricos e geométricos permite ter um melhor acesso a esses dois conceitos de difícil visualização e compreensão para um não especialista. Deve-se notar, no entanto, que os autores fizeram uma breve interpretação geométrica da ligação entre a derivabilidade no ponto a e a notação de tangente à curva C_f no ponto $A(a, f(a))$ mas isso foi insuficiente por nós.

O estudo curricular que realizamos em torno da fórmula de Taylor-Young mostra a dominância da abordagem sintática em relação à abordagem semântica. A análise gráfica, tão importante em nossa opinião, da fórmula parece ser secundária tanto no programa quanto na apostila. A abordagem da fórmula de Taylor-Young do ponto de vista digital está completamente ausente. Tudo isso mostra a resistência dos professores às mudanças muitas vezes recomendadas incentivando-os a usar pelo menos dois registros diferentes e não ficarem presos no quadro algébrico muitas vezes mobilizado sozinho na aula de matemática. Sobre este assunto Arslan (2005) enfatiza o domínio da abordagem algébrica na atividade do professor e:

> Confirma que o significado histórico da resolução algébrica continua a pesar na educação francesa atual, mas também internacionalmente. Além disso, essa tendência continua

> confirmada na análise de livros didáticos e programas que realizamos na parte B desta tese (ARSLAN, 2005, p. 19).[14]

Conclusão

Neste trabalho de investigação procuramos estudar, para fins didáticos, os aspectos matemáticos e semióticos relativos à fórmula de Taylor-Young. Realizamos ainda um estudo curricular ao nível dos programas oficiais do ensino da análise do primeiro ano da secção Matemática-Física do IPEIM que completamos com a análise de uma apostila escrita por um grupo de docentes.

Parece-nos que este trabalho de pesquisa foi capaz de mostrar que mesmo que o controle sintático, por si só, permita chegar a uma expansão de Taylor matematicamente válida na maioria dos casos, não se pode economizar tempo da validade da expansão de Taylor-Young, em certos casos, principalmente quando essa expansão é aplicada para fazer um cálculo numérico aproximado.

Para uma adequada conceituação da fórmula de Taylor-Young mostramos, em acordo ao ponto de vista de Duval (1993), o interesse de abordar esse desenvolvimento convertendo-o do registro algébrico para o registro das representações gráficas, insistindo na noções de proximidade, da ordem do desenvolvimento e do significado semântico do resto do desenvolvimento e, portanto, do erro cometido com cada desenvolvimento. A análise do programa oficial mostrou que os projetistas geralmente incentivam os professores a estudar problemas matemáticos de acordo com a dupla abordagem qualitativa/quantitativa. No entanto, e no que diz respeito à fórmula Taylor-Young, não insistiram particularmente na importância desse duplo olhar. A análise também mostrou que a abordagem gráfica da expansão de Taylor está quase ausente e que a abordagem computacional algébrica é, por outro lado, dominante.

Nós percebemos que, assim como os projetistas do programa, os professores da apostila privilegiaram em muito os aspectos computacionais para os desenvolvimentos de Taylor. Se o jogo entre os registros algébrico e gráfico está quase ausente, está totalmente ausente entre o registro digital, por um lado os registros algébrico e por outro o gráfico,. No entanto, esse jogo entre os diferentes registros, como mostramos ao longo deste artigo, é muito importante para uma boa conceituação da fórmula de Taylor-Young.

Este trabalho de investigação carece de ser completado em muitos pontos, nomeadamente na observação dos alunos em situações reais que exigem a utilização da fórmula de Taylor-Young nos vários registos algébricos, gráficos e digitais. Um estudo das práticas dos professores de matemática e física nas aulas ordinárias só pode lançar mais luz sobre as reais dificuldades relacionadas ao ensino

---

f é derivável se e somente se f admite um desenvolvimento limitado na ordem 1 em a, e esse desenvolvimento limitado é então necessariamente: $\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$.” (p. 3) e aprendizagem dessa fórmula. É igualmente interessante fazer uma pesquisa didática sobre as notações de Landau que às vezes são ambíguas para os desinformados..

Recebido em:02/03/2022

Aprovado em: 22/05/2022

Références

ARSLAN, S. **L'approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale S:** Est-elle viable? Quels sont les enjeux et les conséquences ?. Thèse. Université Joseph Fourier, Grenoble, 2005.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et de validation. **Educational Studies in Matematics**, Dordrecht, v. 18, p.147-176, 1987.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.7, n.2,p. 33-115, 1986.

BRUNEAU, O. **Pour une biographie intellectuelle de Colin Mac-Laurin (1698-1746)** : ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien. Thèse. Université de Nantes, Nantes, 2005.

BURKHADART, H ; WIRTINGER, W. **Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées**, Tome II, Premier volume, Fonctions de variables réelles, éd. françaiseréd. Et publ. d'après l'éd. allemande sous la dir. de Jules Molk, 1909.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p.5-32.

DOUADY, R. Tool, Object, Setting, Window: Elements for Analysing and Constructing Didactical Situations in Mathematics. *In* : BISHOP, A.-J. MELLIN-OLSEN, S.; VAN DORMOLEN, J. (Eds.). **Mathematical Knowledge**: Its Growth Through Teaching (p. 107-130). Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

.
DURAND-GUERRIER, V ; BEN KILANI, I. Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire tunisien, **Les Cahiers du Français Contemporain**, Lyon, v.9, p. 29-55, 2004.

DURAND-GUERRIER, V.; ARSAC, G. An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.60, n.2, p. 149-172, 2005.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v.5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 61, n.1, p. 103-131, 2006.

GRENIER, D. et. al. Introduction aux limites de fonction et de suite : adaptation de deux ingénieries. *In* : THEIS, L. (Ed.). **Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015** (p. 666-676). Alger : Université des Sciences et des Techniques Houari Boumedien, 2015.

INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEURS EL MANAR. **Classes préparatoires MP**: Programme de mathématiques première année, 2016. http://www.ipeiem.rnu.tn/sites/default/files/Prog Maths MP 1ère année.pdf.

KOUKI, R. ; GRIFFITHS, B.J. Introducing Taylor Series an Local Approximations using Historical and Semiotic Approach. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, n. 2, em0573, 2020.

KOUKI, R. **Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire** : entre syntaxe et sémantique. Thèse. Université de Lyon 1, Université de Tunis, Lyon-Tunis, 2008.

MARTIN, J. Differences between experts 'and students' conceptual images of mathematical structure of Taylor series convergence. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n.2, p.267-283, 2013.

MASCHIETTO, M. **L'enseignement de l'Analyse au lycée** : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices. Thèse de doctorat. Université Paris 7-Denis Diderot, Paris, 2002.

RASMUSSEN, C. ; WAWRO, M. Post-calculus research in undergraduate mathematics education. *In* : CAI, J. (Ed.). **The compendium for research in mathematics education**. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2017.

RAVEL, L. **Des programmes à la classe** : Etude de la transposition didactique interne : Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique. Thèse. Laboratoire Leibniz-IMAG, Grenoble, 2003.

TALL, D. ; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.12, p. 151-169, 1981.

WEBER, K. ; ALCOCK, L. Semantic and syntactic proof production. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.56, p. 209-234, 2004.