

## Estudo de Possibilidades do Uso de Objetos Virtuais de Aprendizagem no Ensino de Cônicas por meio de um Exercício de Imaginação Pedagógica

### *Possibilities Study of Virtual Learning Objects Using in Conics Teaching through an Pedagogical Imagination Exercise*

Rosane Rossato Binotto<sup>1</sup>

Vitor José Petry<sup>2</sup>

Sandy Maria Gaio<sup>3</sup>

#### RESUMO

*Neste artigo, apresenta-se um estudo de possibilidades para o uso de objetos virtuais de aprendizagem (OVA), elaborados no GeoGebra, visando ao ensino de cônicas no Ensino Médio. O trabalho caracteriza-se como uma pesquisa de natureza qualitativa propositiva em que se realizou uma análise de possibilidades e potencialidades de interação e de abordagem de conceitos da Matemática, em dez OVA, por meio de um exercício de imaginação pedagógica desenvolvida pelos autores, na perspectiva de Skovsmose. Nesse exercício, elencaram-se conceitos, elementos e propriedades da elipse, da parábola e da hipérbole, que podem ser explorados, em especial a propriedade reflexiva, usada em diferentes aplicações. Destaca-se, também, a possibilidade de manipular elementos dos OVA, facilitando visualmente, aos estudantes, o entendimento de resultados matemáticos presentes nesses objetos. Espera-se que o material didático produzido seja utilizado pelos professores do Ensino Médio nas aulas de Matemática.*

**Palavras-chave:** *Elipse; Parábola; Hipérbole; GeoGebra; Ensino Médio.*

#### ABSTRACT

*This article presents a possibility study for the use of virtual learning objects (OVA), developed in GeoGebra, aiming conics teaching in High School. The work is characterized as a qualitative propositional research in which possibility and potential analysis of interaction and Mathematics concepts approach, in ten OVA, through a pedagogical imagination exercise, developed by the authors, from Skovsmose's perspective. In this exercise, concepts, elements and properties of the ellipse, the parabola and the hyperbola were listed, which can be explored, in particular the reflective property, used in different applications. It is also noteworthy the possibility of manipulating the OVA elements resulting a better viewing and understanding of mathematical*

---

<sup>1</sup> Doutora em Matemática pela UNICAMP. Docente do Curso de Licenciatura em Matemática e do PROFMAT na Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS - Campus Chapecó/SC. E-mail: rosane.binotto@uffs.edu.br

<sup>2</sup> Doutor em Matemática Aplicada pela UFRGS. Docente do Curso de Licenciatura em Matemática e do PROFMAT na Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS - Campus Chapecó/SC. E-mail: vitor.petry@uffs.edu.br

<sup>3</sup> Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS - Campus Chapecó. E-mail: sandymariagaio@gmail.com

*results by the students present in these objects. It is expected that the didactic material produced will be used by High School teachers in Mathematics classes.*

**Keywords:** *Ellipse; Parabola; Hyperbola; GeoGebra; High School.*

## **Introdução**

No Brasil, o uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC) nas aulas de Matemática iniciou a partir da primeira metade da década de 1990, quando muitos professores, estudantes e pesquisadores começaram a usar computadores para explorar possibilidades didáticas e pedagógicas, o que proporcionou o desenvolvimento de diversos softwares educacionais, com destaque para os softwares de geometria dinâmica (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015). De acordo com esses autores, em geometria dinâmica, há a possibilidade de “[...] utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015, p. 23).

O advento dessas tecnologias vem proporcionando mudanças no modelo pedagógico estático e restrito, adotado por alguns professores, para aulas mais dinâmicas e interativas. Com o intuito de contribuir com materiais digitais para as aulas de Matemática, apresenta-se uma sequência de atividades composta por dez objetos virtuais de aprendizagem (OVA), construídos no GeoGebra, para o ensino de cônicas no Ensino Médio. Segundo Audino e Nascimento (2010), um OVA é qualquer material digital que possa ser utilizado e reutilizado para dar suporte ao processo de ensino.

Além da proposição dos OVA, apresenta-se um estudo de possibilidades de uso desses objetos pelos estudantes, realizado pelos autores deste trabalho. Esse estudo ocorreu por meio de um exercício de imaginação pedagógica, na perspectiva proposta por Skovsmose. Conforme esse autor, a imaginação pedagógica, ou pesquisa de possibilidades em Matemática, “[...] inclui não somente um estudo de ‘o que é’ ou ‘o que é construído’, mas também um estudo de ‘o que não é’ e ‘o que poderia ser construído’” (SKOVSMOSE, 2015, p. 69-70). Para tanto, ele sugere que se considere uma situação imaginada ou uma situação arranjada para efetuar tal pesquisa, sendo esta situação arranjada o mais próximo possível da realidade a ser investigada.

A presente pesquisa teve como objetivo descrever possibilidades e potencialidades de interação, que podem ser realizadas por estudantes do Ensino Médio, com OVA sobre cônicas. Realizou-se uma pesquisa de abordagem qualitativa propositiva, em que foram propostos dez OVA, analisados por meio do exercício de imaginação pedagógica.

Diante do exposto, neste artigo, discorre-se sobre o marco teórico do trabalho com destaque para TIC, OVA e imaginação pedagógica. Na sequência, expõe-se o delineamento metodológico do trabalho. Em resultados e discussões, apresentam-se dez OVA sobre cônicas e realiza-se uma análise de possibilidades, para cada um deles, focada nas percepções dos autores deste trabalho. Por fim, explicitam-se as considerações finais.

## **Marco Teórico**

Numa sociedade em constante evolução tecnológica, é imprescindível que a comunidade escolar busque integrar-se às novas situações emergidas do avanço tecnológico. Observa-se o potencial das TIC nos mais diversos contextos da atividade humana, pela capacidade de permitir rápida transmissão e acesso às informações e ao conhecimento, o que pode favorecer seu uso no âmbito educacional. Isso seguramente passa por adequar as metodologias, métodos ou estratégias de ensino e aprendizagem a essa realidade, de forma que as TIC estejam presentes em diferentes abordagens dos objetos do conhecimento trabalhados com os estudantes.

De acordo com Oliveira, Moura e Sousa (2015), as TIC são “um conjunto de recursos tecnológicos integrados entre si, que proporcionam, por meio das funções de software e telecomunicações, a automação e comunicação dos processos de negócios, da pesquisa científica e de ensino e aprendizagem” (OLIVEIRA; MOURA; SOUSA, 2015, p. 4).

Kenski (2003) sugere que as TIC impulsionam novas formas de aprender, visto que:

Os atributos das novas tecnologias digitais tornam possível o uso das capacidades humanas em processos diferenciados de aprendizagem. A interação proporcionada por *softwares* especiais e pela Internet, por exemplo, permite a articulação das redes pessoais de conhecimentos com objetos técnicos, instituições, pessoas e múltiplas realidades [...] para a construção de espaços de inteligência pessoal e coletiva (KENSKI, 2003, p. 05).

Um aspecto a ser considerado sobre o uso das tecnologias em sala de aula consiste no fato de os educandos estarem cada vez mais imersos no mundo digital, por meio de jogos, redes sociais, vídeos ou qualquer outra atividade que lhes desperte curiosidade e proporcione satisfação. Assim, a interação com aplicativos, softwares, jogos ou qualquer tipo de mídia digital mostra-se uma alternativa promissora na tentativa de despertar o interesse e a motivação dos estudantes, visando aproximá-los dos conteúdos a serem trabalhados e romper barreiras de aprendizagem.

Contudo, o uso das TIC em sala de aula pode oferecer aos estudantes muitos caminhos a percorrer, podendo facilmente ocorrer o desvio da finalidade, que é o processo de ensino e aprendizagem. Por isso, é indispensável a presença mediadora do professor, pois é ele quem pode dinamizar todo esse processo por meio dos artefatos disponíveis, buscando explorá-los ao máximo com criatividade e objetivos bem definidos. Ponte (2003) salienta a relevância dos professores de Matemática no decorrer de suas aulas e a necessidade de estes dominarem as ferramentas das TIC, em especial softwares educacionais específicos da sua disciplina ou de educação, no âmbito geral.

Pesquisadores da área da Educação Matemática frequentemente propõem investigações que exploram o uso das TIC e suas potencialidades em sala de aula e, na maioria das vezes, com resultados promissores, considerando que as tecnologias viabilizam a experimentação e a rápida visualização de diferentes situações. Com isso, proporcionam maior tempo e melhores argumentos para discussões e reflexões sobre os problemas abordados em suas mais diversas formas, permitindo investigar, descobrir e desmistificar a Matemática. De acordo com Scheffer (2012, p. 31), “a incorporação de novos recursos tecnológicos na sala de aula de matemática resulta na criação de ambientes de aprendizagem que levam o estudante ao desenvolvimento de novos conceitos e à consolidação da aprendizagem”.

A importância do uso de artefatos tecnológicos em sala é evidenciada também nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Neles se aborda a necessidade “do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras” (BRASIL, 1998, p. 67).

O uso de tecnologias digitais também está previsto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que traz, nas competências e habilidades do Ensino Médio, a recomendação de se utilizar artefatos tecnológicos, como softwares ou aplicativos de álgebra e de geometria dinâmica, para o auxílio na aprendizagem. A importância da utilização de softwares que permitam visualizações dinâmicas está presente em diversos momentos do documento, como, por exemplo, na quinta competência específica da área de Matemática e suas Tecnologias:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 532).

Nesse sentido, o uso de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, por exemplo, é relevante, pela possibilidade de construção e representação algébrica e geométrica de inúmeros objetos de estudo. Isso permite a interação dinâmica e ágil dos estudantes em diferentes situações, possibilitando a percepção das mais diversas formas de visualização de objetos matemáticos e de propriedades relacionadas a esses objetos. Destaca-se, ainda, a importância do uso de aplicativos ou softwares de forma integrada, acompanhados de formalização dos conceitos matemáticos e suas aplicações. Considera-se fundamental a intervenção do professor como mediador no processo de ensino.

Ao se referir à inserção e uso de tecnologias nas aulas de Matemática, é fundamental apresentar opções aos professores que atuam na Educação Básica de forma a facilitar esse processo. Uma das possibilidades apontadas por diversos autores para o desenvolvimento de propostas metodológicas remete ao desenvolvimento e aplicação de OVA, como ferramenta auxiliar para o processo de ensino e aprendizagem, tendo como objetivo possibilitar diferentes formas de representação dos objetos de estudo. Conforme Hay e Knaack (2007), OVA são todas as ferramentas interativas, baseadas na *Web*, que apoiam o aprendizado de conceitos específicos, incrementando, ampliando ou orientando o processo cognitivo dos aprendizes. De acordo com Spinelli (2007, p. 7):

Um objeto virtual de aprendizagem é um recurso digital reutilizável que auxilie na aprendizagem de algum conceito e, ao mesmo tempo, estimule o desenvolvimento de capacidades pessoais, como, por exemplo, imaginação e criatividade. [...] Dessa forma, pode compor um percurso didático, envolvendo um conjunto de atividades e integrando a metodologia adotada para determinado trabalho.

Guarda e Petry (2020, p. 717), consideram que “os OVA constituem-se como elementos auxiliares no processo de aprendizagem de conteúdos da Matemática, contribuindo na motivação e interação dos estudantes, permitindo uma visualização gráfica/geométrica dos objetos estudados”. Ressaltam, porém, a necessidade de complementação dos estudos mediante sistematizações para o desenvolvimento de habilidades da representação descritiva desses objetos.

Ainda sobre os benefícios de se trabalhar com OVA, na interação entre professor e estudante, Alcântara (2015, p. 2), afirma que

Com a dinâmica dos Objetos Virtuais de Aprendizado - OVA, os alunos passam de sujeitos passivos que só copiam os conteúdos a sujeitos mais ativos que interagem com o novo, despertando um maior interesse pois são eles que manipulam o computador e não o professor, tornando o aprendizado mais dinâmico para ambos os lados, onde os alunos não recebem o aprendizado, bem pelo contrário, o constroem de forma que não esquecem assim tão facilmente, porque o apelo visual fica bem mais fácil do que algo totalmente escrito.

Além do desenvolvimento e disponibilização de OVA para auxiliar professores da Educação Básica na inserção das TIC nas aulas de Matemática, é importante que esses objetos sejam acompanhados de sugestões de sequências de atividades ou de análise de possibilidades e potencialidades de interação. Essa análise tem como objetivo sugerir ao professor uma gama de opções e perspectivas de abordagens de conceitos e conteúdos da Matemática e suas aplicações a partir da interação com os OVA disponibilizados.

A análise de possibilidades, conforme Skovsmose (2015), quando ela se refere à escolarização e à educação é denominada imaginação pedagógica. Segundo esse autor, “tal imaginação pode sugerir que práticas educativas alternativas são possíveis” (SKOVSMOSE, 2015, p. 76).

Ainda de acordo com esse autor, a imaginação pedagógica necessita de combustível e de recursos para ocorrer, sendo importante na busca de alternativas para o processo de ensino e aprendizagem. Esse exercício constitui-se em uma “pesquisa de possibilidades” através de um “raciocínio exploratório” com o relacionamento entre diferentes situações. Tem também a finalidade de “desenvolver uma compreensão mais profunda da situação imaginada [...] é por meio desse processo que a situação imaginada se torna fundamentada” (SKOVSMOSE, 2015, p. 79). Assim, sugere-se transformar a imaginação em alternativas mais acessíveis, estabelecendo novas possibilidades ou formas de abordagem dos conteúdos a serem trabalhados com os estudantes.

No que diz respeito aos OVA e à imaginação pedagógica, conforme Spinelli (2007), um OVA pode contribuir para o desenvolvimento da imaginação que, no contexto educacional, é entendida como uma situação matemática que pode ser explorada a partir da interação com o objeto. Segundo Lima (2021, p. 124), “a partir de uma situação imaginada, pode-se analisar as possibilidades de levá-la à situação corrente”, provocando reflexões na tentativa de responder a algumas questões, como “o que, de fato, pode ser

feito? O que pode ser organizado? Que ferramentas existem à disposição? Há algum entrave que impossibilite a implementação de algo?” (LIMA, 2021, p. 124).

### **Delineamento Metodológico**

Este trabalho consistiu-se em uma pesquisa de abordagem qualitativa propositiva. Insere-se na perspectiva qualitativa, pois pretende “[...] atingir aspectos do humano sem passar pelos crivos da mensuração, sem partir de métodos previamente definidos e, portanto, sem ficar preso a quantificadores e aos cálculos decorrentes” (BICUDO, 2019, p. 113). Ainda, de acordo com Bogdan e Biklen (1997, p. 209), os estudos de natureza qualitativa “devem revelar maior preocupação pelo processo e significado, e não pelas suas causas e efeitos”.

Trata-se em um estudo propositivo, pois nele, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 69), o pesquisador “não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica”.

Nessa perspectiva, propôs-se uma sequência de atividades definidas a partir da elaboração de OVA sobre cônicas. Desenvolveu-se uma pesquisa de possibilidades por meio de um exercício de imaginação pedagógica, na perspectiva proposta por Skovsmose (2015), considerando as percepções dos próprios autores do trabalho. Nesse exercício são apontados os principais conceitos e conteúdos relacionados ao estudo de cônicas que podem ser abordados a partir da interação de estudantes do Ensino Médio com os objetos.

### **Resultados e Discussões**

Nesta seção, apresentam-se os OVA e, para cada um deles, realiza-se uma breve descrição do objeto, seguido da análise de possibilidades e potencialidades de interação e de conceitos que possam ser explorados. A manipulação dos OVA pode ser realizada por professores e estudantes, mas o foco é o seu uso para a aprendizagem.

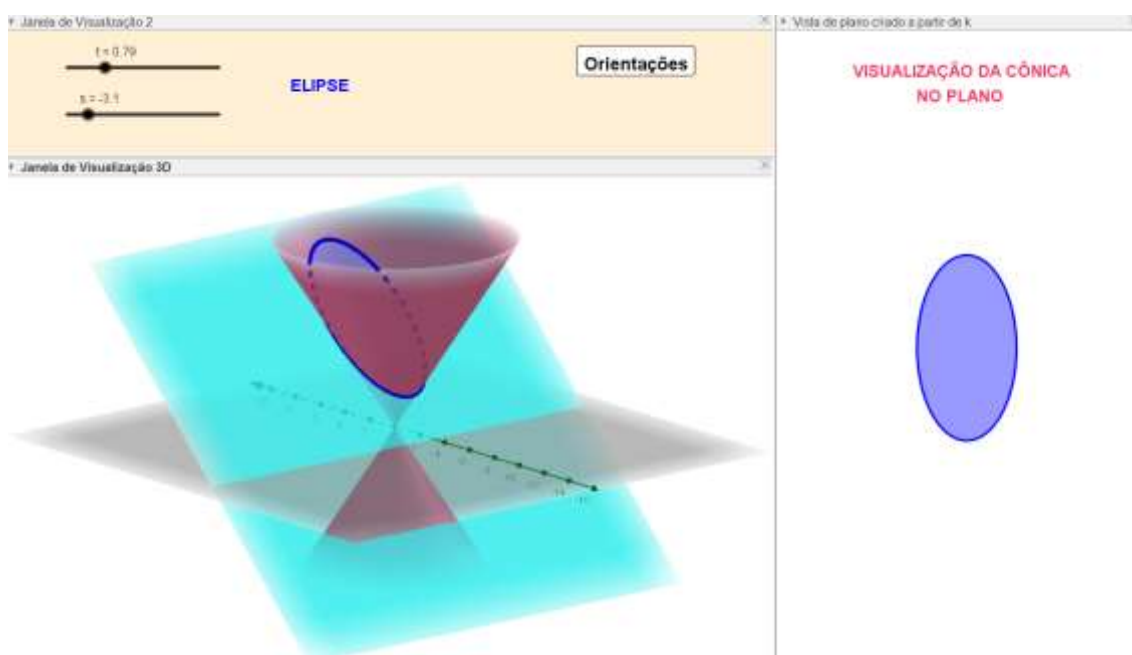
#### **Introdução ao estudo das cônicas**

Com a finalidade de introduzir o estudo das cônicas a partir da interseção de um plano com um cone circular reto de duas folhas, apresentam-se o OVA 1 e o OVA 2. As curvas obtidas nessas interseções são denominadas seções cônicas ou, simplesmente, cônicas,

que podem ser: parábolas, elipses e hipérbolas. Pode-se obter também as cônicas degeneradas: ponto, reta e um par de retas, não abordadas neste trabalho.

O OVA 1, em que um *print* do GeoGebra é ilustrado na Figura 1, apresenta um cone circular reto de duas folhas, um plano secante a ele, uma seção cônica (elipse) e sua representação no plano (ou da região determinada por ela). Além de controles deslizantes com números  $t$  e  $s$ , em que  $t$  representa o ângulo entre o plano secante ao cone e o eixo horizontal e  $s$  está associado à translação desse plano ao longo desse eixo.

Figura 1 – OVA 1: Seção cônica.



Fonte: Os Autores, 2021.

A partir das orientações especificadas, o estudante pode movimentar os controles deslizantes e observar a seção cônica obtida. Pela interação com o objeto, pode-se observar, por exemplo, que se mantendo o valor de  $t$  fixo e movendo-se o controle deslizante  $s$ , o tipo de cônica obtida é sempre o mesmo, para qualquer valor de  $s$  diferente de zero. Além disso, por meio da interação com o OVA, ao alterar os valores de  $t$ , pode-se observar que, uma vez fixado o cone, existe um número  $0 < a < \pi$  tal que: se  $t = 1$  ou  $t = a$  e  $s \neq 0$ , a cônica obtida é uma parábola; se  $0 < t < 1$  ou  $a < t < \pi$  e  $s \neq 0$ , a cônica obtida é uma elipse; se  $1 < t < a$  e  $s \neq 0$ , a cônica obtida é uma hipérbole. Para o cone utilizado neste OVA,  $a = 2,14$ . Quando  $s = 0$ , são obtidas as cônicas degeneradas.

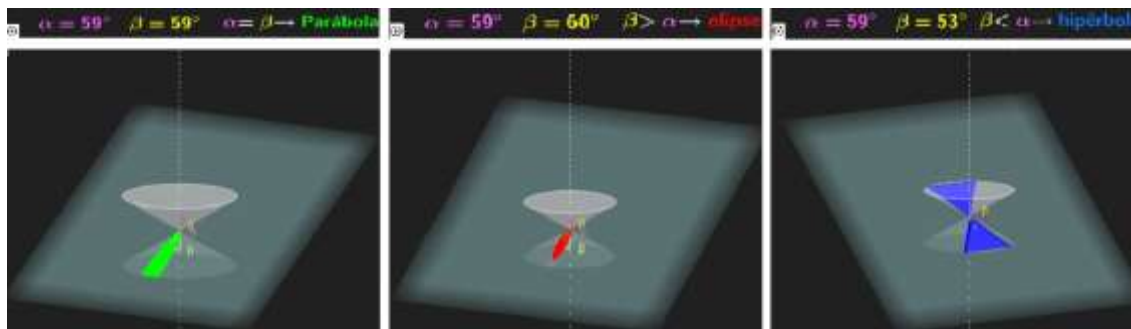
O OVA 2, em que *prints* do GeoGebra são apresentados na Figura 2, foi desenvolvido com o objetivo de caracterizar as cônicas a partir da identificação de relações entre os



ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , sendo  $\beta$  o ângulo determinado pelo plano secante ao cone e seu eixo central e  $\alpha$  o ângulo entre uma reta diretriz do cone e seu eixo central.

Ao clicar no *play* (localizado no canto esquerdo superior da tela do GeoGebra), o plano secante é animado, alterando o valor do ângulo  $\beta$  e tornando esse OVA interativo.

Figura 2 – OVA 2 em diferentes situações.



Fonte: Adaptado pelos Autores de *Conic Section - angles* – GeoGebra<sup>4</sup>, 2021.

Desse modo, os estudantes podem analisar a relação entre os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  e a respectiva cônica obtida, concluindo que: se  $\alpha = \beta$ , a cônica é uma parábola; se  $\alpha < \beta$ , a cônica é uma elipse; e se  $\alpha > \beta$ , a cônica é uma hipérbole, Figura 2.

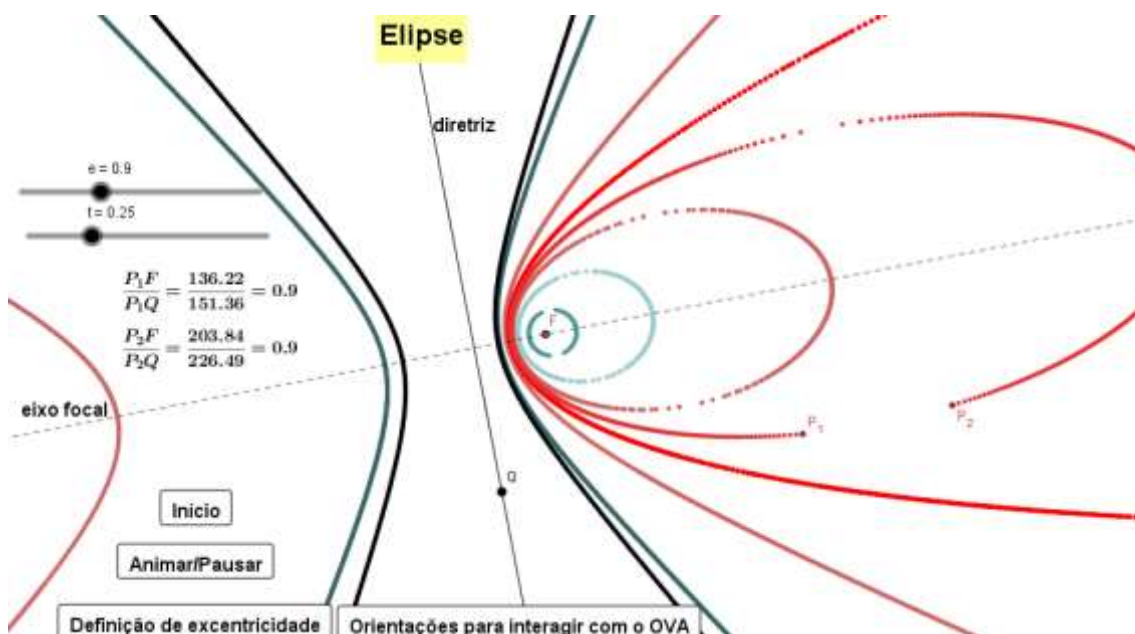
Com a finalidade de visualizar as diferentes cônicas que podem ser obtidas a partir de uma reta diretriz e um foco, elaborou-se o OVA 3, que possui um *print* do GeoGebra, ilustrado na Figura 3. Na tela inicial desse OVA, é dada uma reta diretriz e um foco  $F$ . Esses elementos podem ser livremente alterados por meio de manipulação, seguindo as orientações que aparecem na tela, ao acionar o botão específico. Esse OVA possui também um controle deslizante em que é possível escolher o valor da excentricidade para a representação do lugar geométrico correspondente à cônica.

A excentricidade pode ser definida como sendo a razão entre a distância de um ponto  $P$  qualquer da cônica até o foco e a distância desse ponto até a reta diretriz, ou seja,  $e = \frac{PF}{PQ}$ , sendo que  $e$  é a excentricidade e  $Q$  é a projeção ortogonal de  $P$  sobre a reta diretriz. Ao resolver esse problema para um ponto genérico  $P$  (que varia de acordo com as distâncias consideradas, mantendo a razão igual à constante  $e$ ), chega-se a uma equação polinomial de segundo grau, que poderá ter até duas raízes.

<sup>4</sup> Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/vw3kawyn>. Acesso em: 10 nov. 2021.

Assim, foram definidos dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ , de forma que, habilitados seus rastros, estes percorrem o lugar geométrico que representa a cônica a ser visualizada, ao ativar o botão Animar/Pausar.

Figura 3 – OVA 3: Definição das cônicas a partir da reta diretriz e um dos focos.



Fonte: Os Autores, 2021.

A imagem da Figura 3 mostra as cônicas geradas para distintos valores da excentricidade. Pela interação com o objeto, pode-se observar que, quando  $e < 1$ , a cônica obtida corresponde a uma elipse. No momento do *print* apresentado nesta figura, o valor da excentricidade era  $e = 0,9$  e os pontos  $P_1$  e  $P_2$  estavam ambos no mesmo semiplano (com origem na diretriz) que o ponto  $F$ . Nesse caso, as distâncias dos pontos da curva até o foco e até a diretriz, respectivamente, são limitadas, sendo que ao passar desses limites, a equação de segundo grau mencionada, não tem solução. Para dois valores específicos das referidas distâncias, a solução é única e, para valores abaixo desse limite, têm-se duas soluções, resultando em pontos distintos, conforme ilustrado na Figura 3. A união de todos os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , que mantém a razão entre as distâncias constantes, é que define o lugar geométrico da respectiva cônica.

Para o caso em que  $e = 1$ , tem-se  $\frac{PF}{PQ} = 1$  e, portanto,  $PF = PQ$ . Independente da distância considerada, a solução para a referida equação do segundo grau é única, de forma que os pontos  $P_1$  e  $P_2$  são coincidentes. Isso pode ser observado ao animar o OVA 3. Nesse caso, os pontos  $P_1$  e  $P_2$  (de forma coincidente) descrevem a parábola representada

em vermelho na Figura 3. Observa-se, também, nesse caso, que todos os pontos desse lugar geométrico estão no mesmo semiplano do ponto  $F$ .

Ao escolher um valor da excentricidade  $e > 1$ , é possível observar duas soluções para o ponto  $P$ , independente das distâncias consideradas, de forma que, nestes casos, sempre se tem  $P_1 \neq P_2$ , formando os dois ramos de uma hipérbole, que ficam em semiplanos opostos (em relação à reta diretriz).

A caixa de texto inserida nesse OVA, com as razões entre as distâncias, permite observar que, mesmo que as distâncias sejam diferentes entre os pontos considerados, ao animar o objeto as respectivas razões se mantêm constantes e iguais ao valor da excentricidade escolhida. É possível, por meio desse OVA, estabelecer uma relação entre o valor da excentricidade e o tipo de cônica obtida, bem como concluir que, quanto maior for o valor da excentricidade, maior será a curvatura da respectiva cônica.

Além da determinação das cônicas pela reta diretriz e um dos seus focos, de acordo com a excentricidade, como sugerido nesse OVA, existem outras formas equivalentes para defini-las. Essas formas são as mais usuais nos materiais didáticos disponíveis para o Ensino Médio e são exploradas em OVA apresentados na sequência. Também são exploradas propriedades de cada uma das cônicas abordadas, com o objetivo de auxiliar na compreensão de aplicações deste estudo em situações práticas.

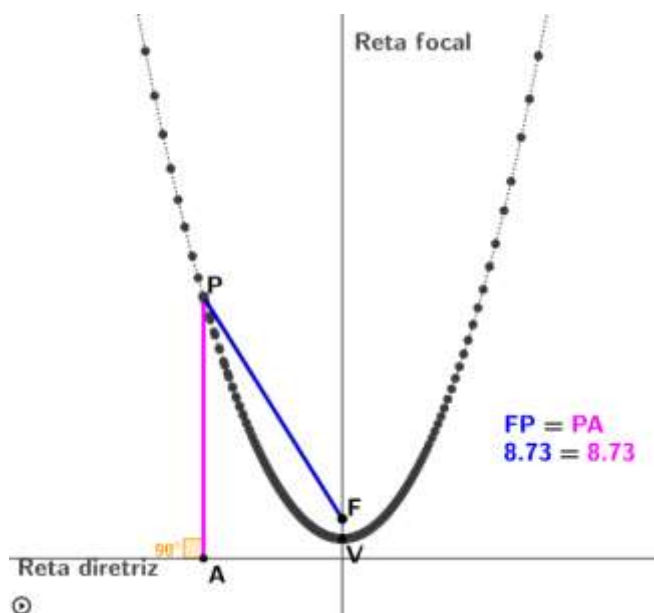
### **Parábola: definição, elementos e propriedade refletora**

Pretende-se, com o OVA 4, explorar a definição de parábola e identificar seus elementos. Nesse objeto, é possível animar o ponto  $P$  clicando no *play*, localizado no canto inferior esquerdo do objeto, como mostrado na Figura 4.

Animando o OVA 4, o ponto  $P$  percorre o lugar geométrico da parábola e, conseqüentemente, os comprimentos dos segmentos  $FP$  e  $PA$  alteram-se; contudo, mantém-se a igualdade entre eles, ou seja,  $FP = PA$ . Ao manipular esse OVA, os estudantes podem iniciar e parar a animação várias vezes com o intuito de verificar a veracidade dessa igualdade. Por outro lado, conforme  $P$  é animado, o rastro desse ponto permanece e, nesse sentido, espera-se que os estudantes percebam que todos os pontos que satisfazem à igualdade mencionada estão em uma parábola.

Com esse mesmo OVA, também pode-se abordar os elementos da parábola: foco ( $F$ ), vértice ( $V$ ), reta diretriz e reta focal (ou eixo focal). É possível, também, alterar a posição do foco, facilitando a compreensão entre as dependências desses elementos.

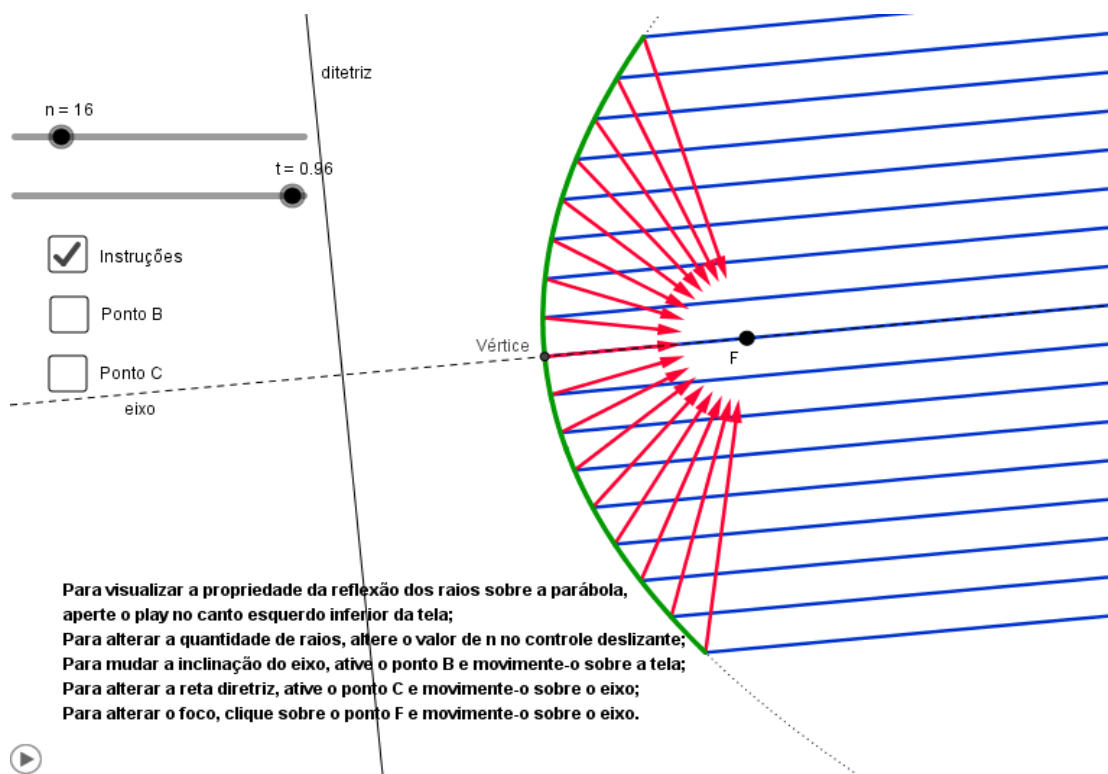
Figura 4 – OVA 4: Conceito de parábola.



Fonte: Os Autores, 2021.

Para ilustrar uma propriedade da parábola usada em aplicações, como antenas parabólicas, espelhos parabólicos usados em faróis de carros, dentre outras, desenvolveu-se o OVA 5, ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – OVA 5: Propriedade refletora da parábola.



Fonte: Os Autores, 2021.

Ao acionar o botão com as instruções, mostram-se as principais informações necessárias para sua manipulação e visualização da propriedade. Com esse OVA, espera-se que o estudante perceba que todos os raios incidentes sobre a parábola, paralelamente ao eixo focal, são refletidos para o seu foco, considerando a parábola uma curva sobre uma superfície espelhada.

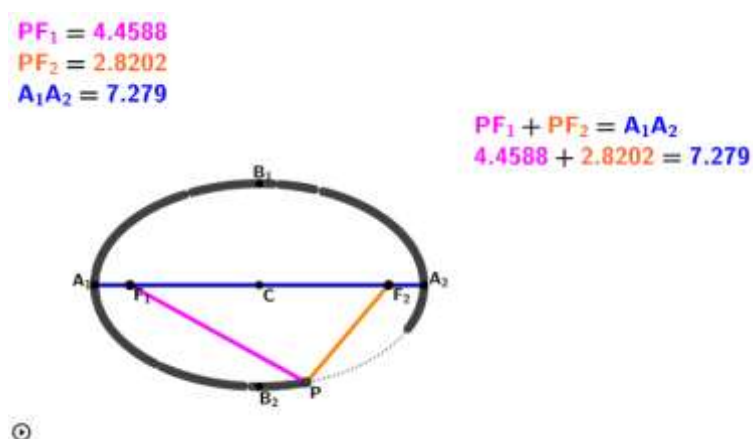
A possibilidade de alterar o foco, o eixo focal e a reta diretriz permite que o estudante compreenda que essa propriedade é válida para qualquer parábola, bastando que os raios incidentes sejam paralelos ao seu eixo focal.

### Elipse: definição, elementos e propriedade refletora

O OVA 6, ilustrado na Figura 6, tem como objetivo introduzir a definição de elipse e identificar alguns de seus elementos. Trata-se de um objeto interativo em que o ponto  $P$  pode ser animado, percorrendo o lugar geométrico da elipse.

Dado um ponto  $P$  na elipse, conforme sua posição no plano muda, os comprimentos dos segmentos  $F_1P$  e  $F_2P$  alteram-se; contudo, sua soma sempre resulta no valor do comprimento do segmento  $A_1A_2$ , ou seja,  $F_1P + F_2P = A_1A_2$ . Para verificar a veracidade dessa equação, para alguns casos, pode-se utilizar uma das possibilidades de manipulação desse OVA, que é iniciar e parar a animação, clicando no *play* e, assim, visualizar os resultados obtidos na equação apresentada no objeto.

Figura 6 - OVA 6: Definição de elipse.



Fonte: Os Autores, 2021.

Nesse objeto, também pode-se explorar os elementos da elipse, tais como focos ( $F_1$  e  $F_2$ ), vértices ( $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$ ), eixo maior ( $A_1A_2$ ), eixo menor ( $B_1B_2$ ) e centro ( $C$ ), Figura 6.

Pode-se manipular esse OVA alterando a posição dos focos, por exemplo, e com isso perceber que, conseqüentemente, os demais elementos também se alteram, possibilitando a compreensão das dependências entre eles. Também pode-se mover os focos da elipse para outras posições do plano e observar o que ocorre com a posição dos seus eixos, bem como de seus comprimentos.

Ainda no que diz respeito à elipse, ela possui uma propriedade, segundo a qual qualquer raio, emitido a partir de um dos seus focos em direção à curva determinada por ela, é refletido por esta em direção ao outro foco. Sua veracidade e validação do ponto de vista dos conceitos e propriedades da Matemática pode ser atestada a partir da manipulação de um OVA desenvolvido com essa finalidade, mas não apresentado neste artigo<sup>5</sup>.

Os argumentos matemáticos que o sustentam se baseiam em resultados relacionados à congruência de triângulos, propriedades do triângulo isósceles, de retas tangentes, propriedade do ângulo de incidência e de reflexão, além da própria definição do lugar geométrico da elipse. Dessa forma, ao abordá-lo, é possível e conveniente que o professor retome com os estudantes os conceitos envolvidos nessa validação.

Uma animação que ilustra a propriedade citada anteriormente pode ser verificada na interação com o OVA 7, mostrado na Figura 7. Ao interagir com esse objeto, os estudantes podem alterar os elementos da elipse e, independente da elipse obtida, a propriedade pode ser verificada.

Ao acionar a animação do OVA, é exibida uma sequência de vetores (representados na cor azul) com origem em um dos focos da elipse e extremidade variável sobre as semirretas com mesma origem. Em algum momento, cada um desses vetores intercepta a elipse. A partir desse ponto de interseção, traça-se um outro vetor (representado na cor vermelha), de modo que o ângulo de incidência (do vetor sobre a citada semirreta) sobre a curva seja congruente ao ângulo de reflexão. Esse segundo vetor, com origem em um ponto sobre a elipse, é refletido na direção do outro foco.

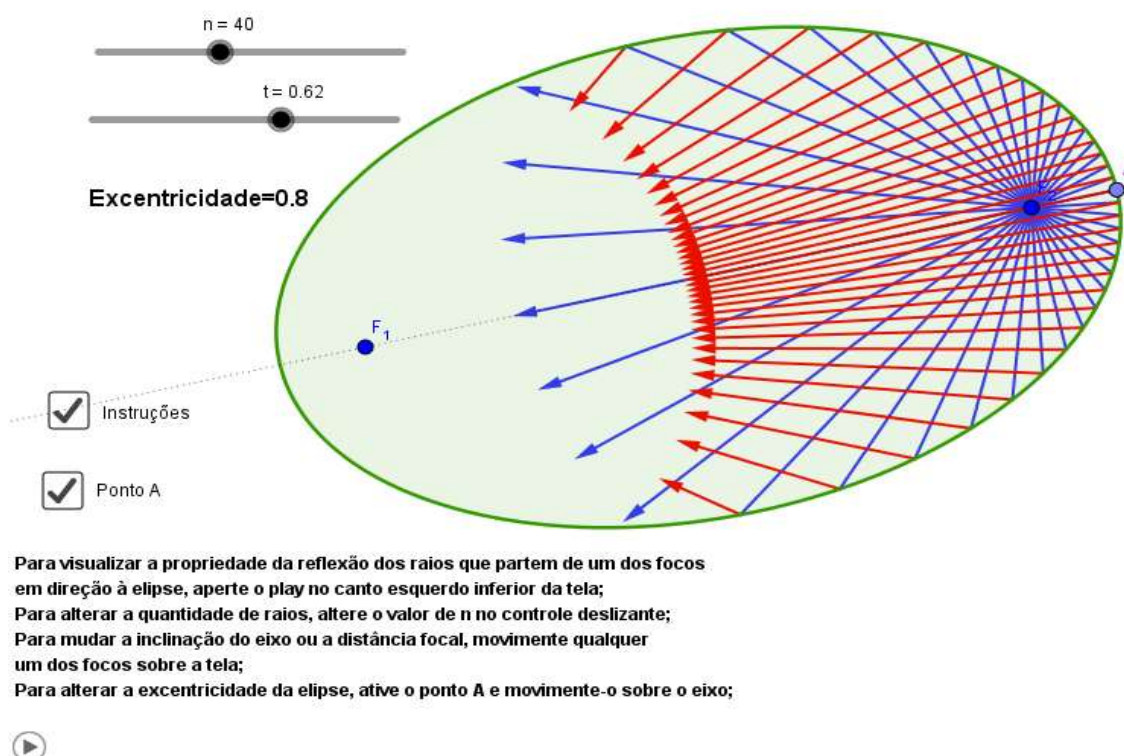
Essa propriedade está presente em diferentes aplicações, como, por exemplo, na confecção de espelhos elípticos, que servem para direcionar os raios de uma fonte luminosa para um ponto de interesse. Essa situação pode ser observada na iluminação usada em consultórios de dentistas (ou de mesas cirúrgicas), em que esta deve ser

---

<sup>5</sup> Este OVA está disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qccarw4u>. Acesso em: 30 ago. 2022.

direcionada para um ponto específico da boca (ou do corpo) do paciente, evitando atingir os olhos.

Figura 7 – OVA 7: Propriedade refletora da elipse.



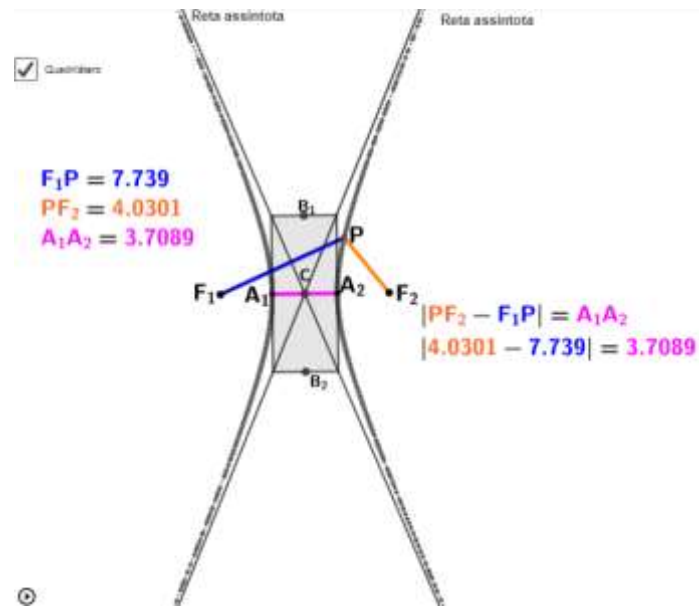
Fonte: Os Autores, 2021.

### Hipérbole: definição, elementos e propriedade refletora

O OVA 8, ilustrado na Figura 8, tem como finalidade explorar, de modo dinâmico e interativo, a definição de hipérbole e abordar alguns de seus elementos. Nesse objeto, o ponto  $P$  pode ser animado, percorrendo-se o lugar geométrico definido pela hipérbole. Assim, os comprimentos dos segmentos  $PF_2$  e  $F_1P$  alteram-se; contudo, o módulo da diferença desses comprimentos é sempre igual ao comprimento do segmento  $A_1A_2$ , ou seja,  $|PF_2 - F_1P| = A_1A_2$ . O estudante pode animar o ponto  $P$ , que pertence à hipérbole, e pausar a animação sempre que quiser. Ele pode verificar a validade dessa equação, visualizando o resultado obtido na equação apresentada no objeto.

Nesse OVA também podem ser explorados os elementos da hipérbole, tais como focos ( $F_1$  e  $F_2$ ), vértices ( $A_1$  e  $A_2$ ), eixo focal ( $A_1A_2$ ), eixo imaginário ( $B_1B_2$ ) e centro ( $C$ ). A distância focal é a medida do segmento  $F_1F_2$ . Além disso, destacam-se as retas assíntotas da hipérbole (Figura 8). Movendo-se, por exemplo, os focos e vértices da elipse, observa-se que, conseqüentemente, os demais elementos também se alteram, mostrando assim as dependências desses elementos.

Figura 8 – OVA 8: Definição e elementos de uma hipérbole.



Fonte: Os Autores, 2021.

Um outro elemento que se espera que o estudante perceba é o retângulo formado (Figura 8), que tangencia a hipérbole nos vértices, cujas diagonais estão nas assíntotas da hipérbole. Pode-se explorar características desse retângulo, de forma a chegar na relação  $(CF_2)^2 = (CA_2)^2 + (CB_1)^2$ .

Além disso, o estudante pode mover os focos ou os vértices da hipérbole para outras posições no plano e observar o que acontece com a posição da hipérbole e com o comprimento de seu eixo focal.

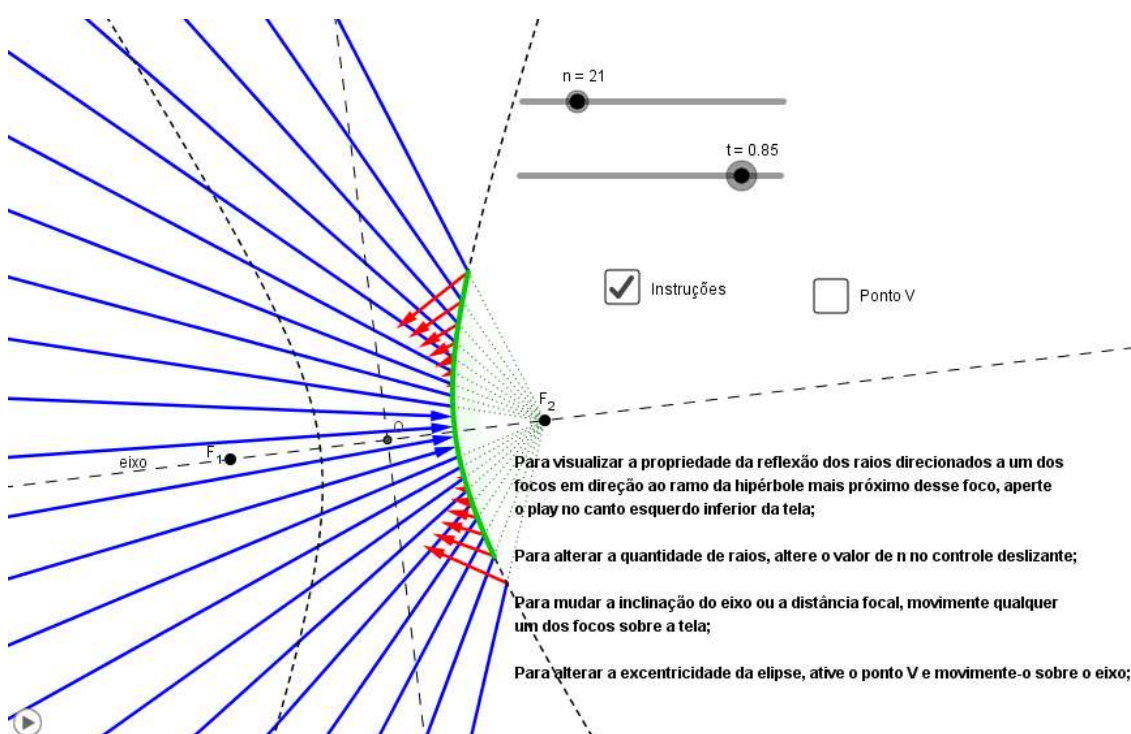
A interação da Geometria com a Álgebra, permitida no GeoGebra, destacada nas Figuras 4, 6 e 8, facilita a exibição da equação geral dessas cônicas. Contudo, considera-se necessário que o professor sistematize e formalize os conceitos de forma a construir com os estudantes essas equações a partir dos elementos conhecidos. Os autores elaboraram outros objetos mais específicos para essa finalidade, não disponibilizados neste artigo.

Uma propriedade da hipérbole, usada em diversas aplicações, consiste no fato de que, ao incidir um raio sobre um espelho convexo situado em um dos ramos da cônica direcionado para o foco localizado no interior da região convexa delimitada pelo respectivo ramo, este será refletido na direção do outro foco. Essa propriedade pode ser observada na interação com o OVA 9, cujo *print* do GeoGebra é mostrado na Figura 9. Ao interagir com esse objeto, é possível alterar os elementos da hipérbole, conforme orientações disponíveis no botão de instruções.



Ao acionar a animação do OVA 9, cria-se uma sequência de vetores (representados na cor azul) com origem em diferentes pontos do plano e extremidade variável sobre as semirretas com origem no ponto  $F_2$ . Em algum momento, cada um desses vetores intercepta o ramo da hipérbole que delimita uma região convexa contendo o ponto  $F_2$ . A partir desse ponto de interseção, traça-se um outro vetor (representado na cor vermelha), de modo que o ângulo de incidência (do vetor sobre a semirreta citada) sobre a curva seja congruente ao ângulo de reflexão. Esse segundo vetor, com origem em um ponto sobre o ramo da hipérbole, será refletido na direção do outro foco.

Figura 9 – OVA 9: Propriedade refletora da hipérbole.

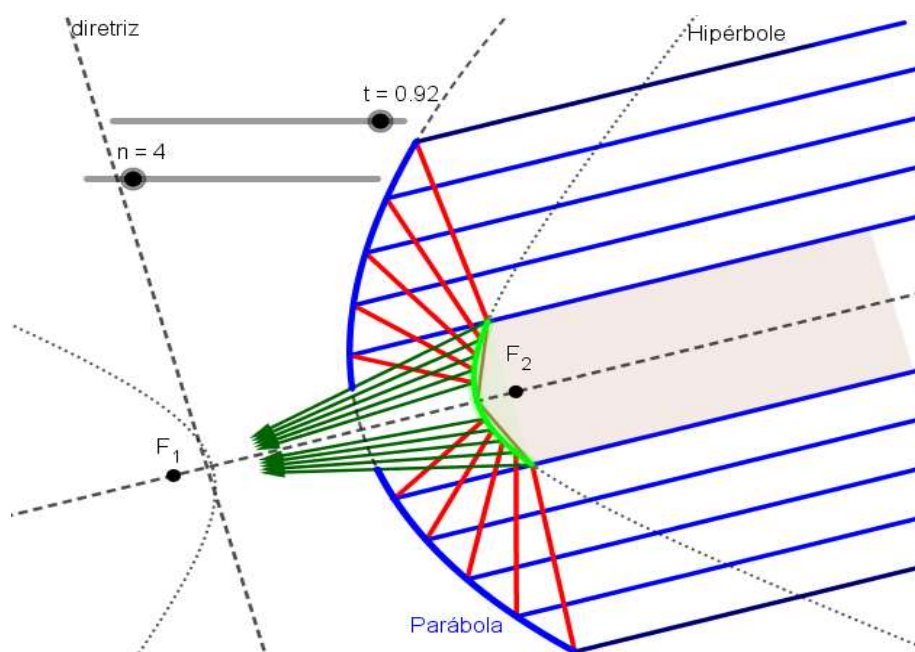


Fonte: Os Autores, 2021.

A veracidade e validação do ponto de vista dos conceitos e propriedades da Matemática pode ser atestada a partir da manipulação de um outro OVA desenvolvido com essa finalidade, usando argumentos matemáticos, principalmente geométricos, que os sustentam. Essa propriedade está presente em diferentes aplicações, como, por exemplo, em espelhos hiperbólicos, que servem para direcionar os raios para um ponto de interesse, como é o caso de um telescópio refletor. O funcionamento desse tipo de telescópio baseia-se em dois espelhos: um parabólico côncavo e um hiperbólico convexo, conforme esquema obtido na animação do OVA 10, mostrado na Figura 10. Nesse caso, o foco da parábola coincide com um dos focos da hipérbole ( $F_2$ ).

Dessa forma, de acordo com as propriedades da parábola verificadas no OVA 5, os raios incidem paralelamente ao eixo sobre o espelho parabólico (representados na cor azul no OVA 10) e são refletidos (em cor vermelha) para o seu foco, que também é foco do espelho hiperbólico. Assim, como os raios incidem sobre o espelho hiperbólico em direção ao foco  $F_2$ , estes são refletidos (com representação na cor verde) em direção ao outro foco ( $F_1$ ), de acordo com a propriedade verificada no OVA 9. Como consequência, a imagem é formada e pode ser visualizada no foco  $F_1$ .

Figura 10 – OVA 10: Funcionamento de um telescópio.



Fonte: Os Autores, 2021.

Ao propor a interação dos estudantes com esse OVA, é possível alterar os focos e a reta diretriz da parábola, de forma a obter diferentes tamanhos de espelhos ou mesmo distâncias focais, permitindo flexibilidade na montagem do refletor hiperbólico e, adequando-o, assim, às necessidades de cada situação a ser observada. Basta apenas observar a necessidade de coincidir o foco  $F_2$  do espelho hiperbólico com o foco do espelho parabólico, de modo a manter a validade das propriedades mencionadas.

### Considerações Finais

Neste trabalho, desenvolveu-se um estudo de possibilidades para o uso de OVA, elaborados no GeoGebra, visando ao ensino de cônicas, no Ensino Médio, por meio de um exercício de imaginação pedagógica. Indicaram-se possibilidades e potencialidades

que podem ser exploradas neste estudo. Dentre os tópicos que podem ser abordados a partir da interação dos estudantes com os OVA desenvolvidos neste trabalho, destacam-se a obtenção de diferentes lugares geométricos ao seccionar um cone circular reto de duas folhas por um plano, dando origem a diferentes seções cônicas. Abordaram-se, também conceitos, elementos e propriedades, do ponto de vista geométrico, da parábola, da elipse e da hipérbole. Explorou-se, também, a obtenção da representação do lugar geométrico determinado por essas cônicas, no plano, a partir da determinação de uma reta diretriz e de um foco, em função de sua excentricidade. Ainda, apresentaram-se OVA que permitem explorar as definições usualmente apontadas em materiais didáticos para o estudo das cônicas no Ensino Médio, acompanhados de OVA que permitem visualizar algumas de suas propriedades usadas em aplicações práticas.

Ao desenvolver a análise das possibilidades, sugere-se que a interação dos estudantes com os objetos possa contribuir para a aprendizagem de conceitos matemáticos, bem como para a compreensão da importância de suas propriedades em aplicações para a projeção de equipamentos usados em situações práticas. Acredita-se que o fato de estarem acompanhados de um exercício de imaginação pedagógica que aponta algumas possibilidades e potencialidades de exploração e manipulação do material desenvolvido favoreça sua utilização. Isso corrobora com as proposições de Skovsmose (2015) quando sugere que esse exercício permite transformar a imaginação em alternativas mais acessíveis, estabelecendo novas possibilidades ou formas de abordagem dos conteúdos a serem trabalhados com os estudantes.

Vale ressaltar que as possibilidades não se esgotam na análise explicitada neste trabalho, podendo este exercício ser ampliado por professores e até mesmo por estudantes aos interagirem com os OVA. Ao refazer o seu próprio exercício de imaginação pedagógica, o professor pode avaliar a melhor forma de usar os OVA no momento de abordar esses objetos de estudos com seus estudantes.

Apesar das inúmeras possibilidades de TIC disponíveis aos professores de Matemática, como, por exemplo, o GeoGebra ou outros softwares dinâmicos, identificam-se com frequência muitos desafios, dificuldades e barreiras que ainda trazem resistência para sua inserção nas aulas. Um fator a ser considerado nesse sentido refere-se à demanda de tempo (muitas vezes não disponibilizada dentro da jornada normal de trabalho do professor) necessária para a preparação de OVA com atividades interativas. Essa demanda é ainda maior para aqueles professores que apresentam certa dificuldade de interação com tecnologias, que, em muitos casos, não estavam acessíveis no momento

de sua formação profissional. Isso reforça a importância do desenvolvimento e disponibilização de OVA aos professores, principalmente aqueles objetos que exigem um conhecimento mais aprofundado dos softwares, pois

a apropriação dessas tecnologias para fins pedagógicos requer um amplo conhecimento de suas especificidades tecnológicas e comunicacionais e que devem ser aliadas ao conhecimento profundo das metodologias de ensino e dos processos de aprendizagem. Não é possível pensar que o simples conhecimento da maneira de uso do suporte (ligar a televisão ou o vídeo ou saber usar o computador e navegar na Internet) já qualifica o professor para a utilização desses suportes de forma pedagogicamente eficiente em atividades educacionais (KENSKI, 2003, p. 05).

A disponibilidade de diferentes OVA, acompanhados das respectivas sugestões de uso, pode minimizar as dificuldades trazidas por esses professores, motivando-os e encorajando-os para o uso das TIC em sua prática docente. Entende-se que a universidade, em seus grupos de pesquisa, juntamente com os professores de Matemática em formação, seja um espaço adequado para esse desenvolvimento.

Por fim, entende-se que OVA são elementos auxiliares importantes no processo de aprendizagem de conteúdos da Matemática, principalmente por permitirem visualizações geométricas (e algébricas) dos objetos estudados, de forma rápida e dinâmica, permitindo comparar suas diferentes perspectivas. Isso permite a elaboração de conjecturas referentes às propriedades, levando os estudantes a uma melhor compreensão dos conceitos abordados. Ressalta-se, porém, a necessidade da constante intervenção mediadora do professor, com objetivos bem definidos, visando melhor explorar as potencialidades dos objetos utilizados, bem como uma complementação mediante sistematizações e da formalização dos conceitos neles abordados.

### **Agradecimento**

A pesquisa apresentada neste trabalho teve apoio financeiro da UFFS por meio de projeto PES-2020-0299, aprovado no Edital N° 270/GR/UFFS/2020.

Recebido em: 10/03/2022  
Aprovado em: 06/09/2022

## Referências

ALCÂNTARA, R. L. Utilização dos OVAs (Objetos Virtuais de Aprendizagem) no processo de aprendizagem de alunos desde as séries iniciais utilizando Power Point. **Revista Eletrônica Argentina-Brasil de Tecnologias da Informação e da Comunicação**, v. 1, n. 3, 2015. Disponível em: <https://revistas.setrem.com.br/index.php/reabtic/article/view/79>. Acesso em: 08 dez. 2021.

AUDINO, D. F.; NASCIMENTO, R. S. Objetos de aprendizagem – diálogos entre conceitos: uma nova proposição aplicada à educação. **Revista Contemporânea de Educação**, v. 5, n. 10, p. 128-148, 2010. Disponível em <https://revistas.ufrj.br/index.php/rce/article/view/1620/1468>. Acesso em: 08. nov. 2021

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. São Paulo: Autêntica, 2019, p. 107-119.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1997.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e Internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Orientações didáticas. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/UNDIME, 2018.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2012.

GUARDA, S. M.; PETRY, V. J. Uso de Objetos Virtuais de Aprendizagem Visando a Compreensão e a Representação de Elementos da Geometria Analítica. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v. 33, n. 1, p. 707-7017, 2020.

HAY, R. H.; KNAACK, L. Evaluating the learning in learning objects. **Open Learning: The Journal of Open and Distance Education**, v. 22, n. 1, p. 5-28, 2007.

KENSKI, V. M. Aprendizagem Mediada pela Tecnologia. **Revista Diálogo Educacional**, v. 4, n. 10, p. 47-56, 2003.

LIMA, P. C. Imaginação pedagógica, educação matemática e inclusão: em busca de possibilidades para as aulas de Matemática. **Intermaths**. v. 2, n. 1, p. 121-137, 2021. Disponível em: <https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/download/8595/5927>. Acesso em: 19 set. 2021.

OLIVEIRA, C.; MOURA, S. P.; SOUSA, E. R. TIC'S na educação: a utilização das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem do aluno. **Pedagogia em Ação**, v. 7, n. 1, p. 1-21, 2015.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, v. 2, p. 93-169, 2003.

SCHEFFER, N. F. A argumentação em matemática na interação com tecnologias. **Ciência e Natura**, v. 34, p. 23-38, 2012.

SKOVSMOSE, O. Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: D'AMBROSIO, U.; LOPES, C. E. (Org.). **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2015, p. 63-90.

SPINELLI, W. **Os Objetos Virtuais de Aprendizagem**: ação, criação e conhecimento. s/d. Disponível em: <http://www.lapef.fe.usp.br/rived/textoscomplementares/textoImodulo5.pdf>. Acesso em: 28 jul. 2021.