emd Ensino da Matemática em Debate

Ensino de Matemática através da Arte: uma proposta de sequência didática com roteiros para a construção de cônicas com a técnica *string art*

Teaching Math through Art: a didactic sequence proposal with scripts *for the construction of conics by the string art technique*

Evando Santos Araújo[1]

Carlos Yure Barbosa Oliveira[2]

Renato de Brito Mota[3]

RESUMO

A interdisciplinaridade no ensino de Matemática com Artes torna essa articulação uma fonte geradora do conhecimento abrangente e significativo para ambas as áreas, com possibilidade de se explorar a ludicidade e a criatividade com objetivo educacional. Nesse contexto, a técnica de arte com cordas (do inglês, string art), que consiste em construir figuras diversas como resultado da manipulação ordenada de cordas sobre pontos fixados em uma superfície sólida, se mostra como recurso didático potencial para o desenvolvimento de metodologias que possam melhorar aspectos do ensino-aprendizagem de figuras geométricas planas e de suas propriedades, como é o caso das formas cônicas (pouco exploradas em relação a outras formas geométricas). A exploração da técnica pode auxiliar o docente no processo de ensino de Geometria Analítica, por meio de aulas dinâmicas com emprego de materiais manipuláveis, com a possibilidade de se obter melhores resultados de aprendizagem. Nesse sentido, o presente trabalho explora o contexto da interdisciplinaridade entre Matemática e Arte e propõe uma sequência didática direcionada ao ensino de seções cônicas no Ensino Médio, com o apoio da técnica artística string art. A sequência didática evidencia uma metodologia orientada à participação dos alunos como ativos na construção do próprio conhecimento, a partir das orientações de construção das formas planas pelo professor mediador. No âmbito profissional, o objetivo da sequência didática é auxiliar o docente na construção de novas metodologias de ensino que contribuam para aperfeiçoar os conhecimentos do aluno sobre cônicas, a fim de obter resultados satisfatórios no ensino de Geometria e superar dificuldades observadas na prática em sala de aula.

Palavras-chave: *Ensino-aprendizagem de Matemática; Interdisciplinaridade; Matemática e Arte; Arte com cordas; Seções cônicas.*

ABSTRACT

The interdisciplinary studies in the teaching of mathematics through art makes this articulation a source that generates comprehensive and significant knowledge for both areas, with the possibility of exploring playfulness and creativity for educational purposes. In this context, the string art technique (which consists of building different figures as a result of the orderly manipulation of strings on points fixed on a solid surface) is shown as a potential didactic resource for the development of methodologies that can improve aspects of teaching and learning of geometric figures and their properties, such as conical sections (little explored in relation to other

[1]. Professor dos Programas de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e de Pós-graduação em Ciência dos Materiais (CPGCM) da Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF). E-mail: evando.araujo@univasf.edu.br.

[2]. Professor do Departamento de Botânica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). E-mail: yure.oliveira@ufsc.br.

[3]. Professor da Rede Estadual de Ensino de Pernambuco (Secretaria de Educação e Esportes - PE). E-mail: renatobrittomat@hotmail.com.

geometric shapes). The exploration of the technique can help the teacher in the teaching process of Analytical Geometry, through dynamic classes using manipulative materials, with the possibility of obtaining better learning results. In this sense, the present work explores the context of interdisciplinary between Mathematics and Arts and proposes a didactic sequence directed to the teaching of conic sections in High School, with string art. The didactic sequence evidences a methodology oriented to the participation of students as active in the construction of their own knowledge, based on the guidelines for the construction of geometric figures by the mediator teacher. In the professional perspective, the objective of the didactic sequence (product of this work) is to help the teacher in the construction of new teaching methodologies that contribute to improve the student's knowledge about conics, in order to obtain satisfactory results in the teaching of Geometry and overcome difficulties observed in classroom practice.

Keywords*: Mathematics teaching and learning; Interdisciplinary; Mathematics and Art; String art; Conic sections.*

Introdução

A Matemática é uma das disciplinas com menores índices de aprendizagem no Ensino Básico brasileiro, muitas vezes associados às dificuldades do aluno em reconhecer, compreender e relacionar conceitos algébricos e geométricos e de aplicá-los na discussão e solução de situações-problema (OLIVEIRA; BIANCHINI; REIS, 2019). Nesse contexto, descreve-se que muitos alunos do Ensino Básico apresentam dificuldades no reconhecimento e/ ou no esboço de formas geométricas planas, a partir de suas propriedades e elementos geométricos constituintes (NOVAIS, 2019). Isso inclui as seções cônicas (formas geométricas originadas da intersecção entre um cone circular reto e um plano), em especial, a elipse, a hipérbole e a parábola.

A importância de se conhecer as seções cônicas e suas propriedades geométricas envolve suas diversas aplicações científicas e tecnológicas (CHEN, 2013), tais como na modelagem de órbitas de planetas, movimentos de satélites e trajetória de partículas, em arquitetura, no desenvolvimento de algoritmos computacionais, na avaliação da capacidade térmica de solos e até mesmo para o estudo de cinética molecular em materiais a partir da interação com a luz (LEPAGE *et al.*, 2012; CHEN, 2013; CHERNOV; WIJEWICKREMA, 2013; SAMPER; GONZÁLEZ; HERRERA, 2017; BOUGHANMI *et al*., 2017).

Dadas as demandas emergentes para a melhoria do ensino de Matemática no Brasil, metodologias alternativas, tais como a resolução de problemas, o uso de jogos e de materiais concretos e da interdisciplinaridade, vêm sendo desenvolvidas para se buscar um aprendizado mais interativo e significativo (AMARAL, 2020). O uso de materiais concretos nas aulas de Matemática possibilita a representação semiótica de um conceito estudado e pode auxiliar na melhoria do ensino de Matemática, estimulando a curiosidade e o raciocínio geométrico dos aprendizes, além de tornar as aulas mais dinâmicas e compreensíveis (DUVAL, 2009; LEIVAS; FOGAÇA, 2017). Em particular, a representação semiótica está estritamente relacionada às diversas manifestações artísticas que podem ser trabalhadas no meio educacional (PINTO, 2019).

A interdisciplinaridade entre Geometria e Arte se insere nesse contexto, possibilitando o uso de materiais concretos viáveis à significação dos atos de educar, de ensinar e de aprender Matemática (SANTOS; BICUDO, 2015). Além disso, a manipulação desses objetos pode tornar as aulas de Geometria mais interessantes, agradáveis e compreensíveis aos alunos. A relação entre Geometria e Arte ainda permite o uso de produtos educacionais que promovam o desenvolvimento de habilidades definidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017, p. 533), tal como a habilidade EM13MAT105, que traz referência a "utilizar as noções de transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)".

Algumas atividades artísticas como, por exemplo, pintura em tela (BARROS, 2017), dobraduras (SILVA, 2016; BEZERRA; LOPES, 2016) e construção de maquetes (FLUGSEDER; VARGAS, 2021), proporcionam utilizar materiais manipuláveis para o ensino interdisciplinar de Matemática com Arte no Ensino Básico. Esses autores mostram que a exploração de conceitos de Geometria Plana para formar desenhos e ou outros elementos geométricos de interesse, através da observação e da confecção dessas figuras, é uma proposta pedagógica viável que retorna excelentes resultados de aprendizagem (SANTOS; BICUDO, 2015).

Nessa perspectiva, a técnica denominada de arte com cordas (do inglês, *string art*), permite a abordagem de atividades alternativas para a criação de obras de arte (como as telas artísticas) a partir da manipulação ordenada de cordas sobre pinos fixados em uma superfície (BIRSAK *et al.*, 2018). A *string art* ainda pode ser definida como a visualização final de uma imagem construída com pinos, linhas e barbantes (ou outro elemento elástico), possibilitando diversas concepções de arte, incluindo as que utilizam formas geométricas bem definidas (LA HAYE, 2016). Essa técnica artística, intimamente próxima da Matemática, permite a realização de tarefas sequenciais como mecanismo de aprendizagem do aluno, basicamente a partir da construção de figuras geométricas que demandam o conhecimento de outros conceitos geométricos mais simples. Utilizando a *string art*, os mediadores podem estimular a construção de cenários geométricos e/ou algébricos com alunos, potencializando a aprendizagem matemática a partir da prática lúdica.

Baseado nesses pressupostos, esse trabalho tem como objetivos: i) apresentar a técnica artística *string art*, destacando conceitos e potencialidades para o seu uso como ferramenta auxiliar no ensino interdisciplinar de Matemática através da Arte; ii) propor uma sequência didática com roteiros para o ensino de conceitos básicos das seções cônicas elipse, hipérbole e parábola, no 3.° Ano do Ensino Médio, a partir da confecção dessas formas geométricas em telas artísticas com *string art*. Para atingir os objetivos, escolheu-se desenvolver uma revisão bibliográfica descritiva, de caráter exploratório, a partir das etapas de investigação e de análise explicativa das soluções e de síntese integradora (LIMA; MIOTO, 2007; MARCONI; LAKATOS, 2003). O passo-a-passo para a construção das cônicas com *string art* foi adaptado de técnicas já conhecidas de desenho geométrico com materiais concretos (MOREIRA, 2017).

A técnica artística *string art*

As primeiras abordagens sobre a técnica *string art* datam do final do século XIX, com a matemática inglesa Mary Everest Boole (1832-1916). A técnica surgiu como uma ferramenta para ensinar Matemática de forma lúdica para crianças, a partir da confecção de desenhos geométricos planos sobre tábuas de madeira, usando-se pinos e linhas (INNES, 2004). Essa técnica passou a ser mais difundida a partir da década de 1960, com sua relação direta no desenvolvimento das curvas de Bézier (curvas polinomiais determinadas por meio de interpolação linear, bastante utilizadas em computação gráfica) e na confecção de mandalas com cordas (desenhos geométricos baseados no princípio matemático de uma curva cardioide) (YAN, S.; CAI; YAN, B., 2020).

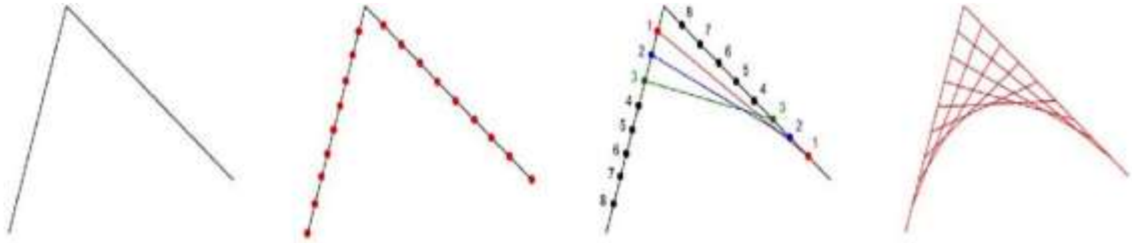
Trabalhos mais atuais descrevem a *string art* como uma técnica artística a qual se utiliza linhas e pinos dispostos sobre uma superfície para fazer esculturas (SOUZA, 2021). Em sua grande maioria, essas expressões artísticas são produzidas manualmente, contando com a criatividade e a habilidade do artista. A *string art* também pode ser definida como uma técnica para a criação de obras de arte visuais onde as imagens emergem de um conjunto de cordas estendidas entre pinos (BIRSAK *et al.*, 2018).

Já outros autores afirmam que a arte com cordas é um arranjo de pinos em uma placa com fios amarrados entre esses pinos para formar belos padrões geométricos (LEBOUTHILLIER; SAJNA, 2020). Ainda se destaca a *string art* como uma técnica artística intimamente relacionada com a Matemática, utilizada para se produzir imagens geométricas ou imagens da vida cotidiana (ZRINSCAK, 2019). Nessa perspectiva, o autor destaca que a noção matemática de posição relativa de uma reta como tangente a uma curva é essencial para que se obtenha sucesso na confecção das imagens.

Em geral, pinos (pregos, agulhas, etc.) são fixados em posições previamente planejadas em uma base sólida (de papel ou madeira, por exemplo) e, em seguida, linhas (barbantes, etc., e de diferentes cores, por exemplo) são entrelaçadas de um pino a outro (que podem estar numerados para facilitar a execução da tarefa) com um padrão geométrico, até que a imagem pré-definida seja formada na tela (Fig. 1).

A principal característica que define a *string art* é a sua singularidade acessível, aliada à robustez das imagens que são confeccionadas (por exemplo, com formas sobrepostas). Em especial, a sobreposição de cores das linhas que entrelaçam os pinos pode proporcionar efeitos de textura e de ilusões de ótica nas formas produzidas. De forma geral, existem três tipos de arte contemporânea com *string art*, a saber, a de tela com cordas, de escultura contendo cordas e de instalação espacial (Fig. 2).

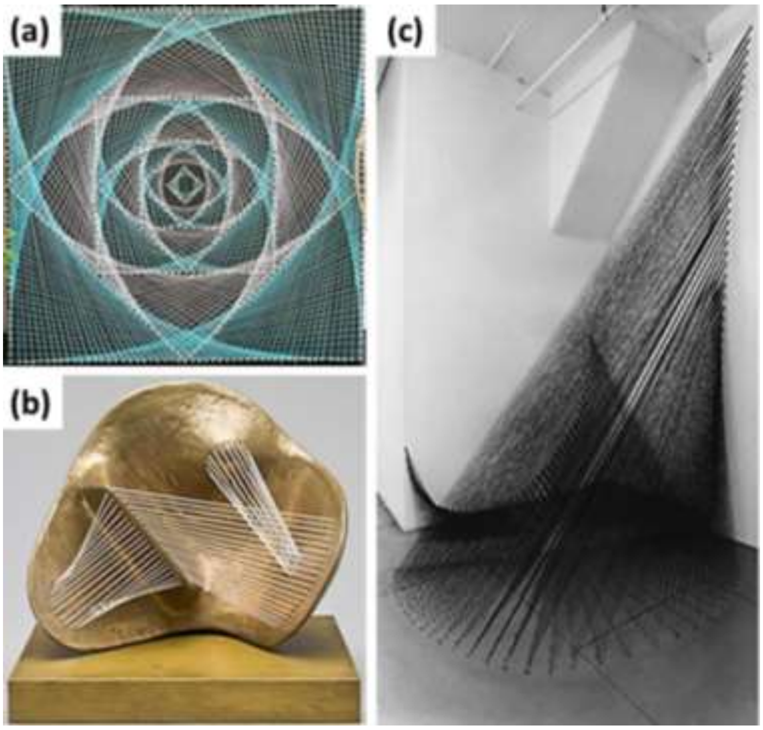
Figura 1 - Ilustração de passo a passo para a confecção de figura geométrica usando *String Art*.



Fonte: (ZRINSCAK, 2019, p. 1).

A do tipo tela com cordas (Fig. 2a) se caracteriza com as definições de *string art* dadas anteriormente e é a mais difundida. A imagem formada é majoritariamente bidimensional, mas podem se aproximar de um aspecto visual tridimensional devido à sobreposição de formas (geralmente com diferentes cores) e/ou à interação com luz e sombra no ambiente.

Figura 2 - Exemplos de arte contemporânea com *string art*. (a) tela com cordas; (b) escultura contendo barbantes; (c) instalação espacial.



Fonte: (ZRINŠČAK, 2019, p. 6-7).

No caso das esculturas contendo cordas, espécies de barbantes são usadas para compor estruturas primárias elaboradas com outros materiais (Fig. 2b). Já para as instalações espaciais (Fig. 2c), são projetadas estruturas tridimensionais, interagindo diretamente com o espaço expositivo.

Diversos trabalhos na literatura são dedicados à discussão das relações entre *string art* e seus aspectos matemáticos, apresentando roteiros para aplicações da temática em ensino de Matemática e no desenvolvimento de novas tecnologias em ciências aplicadas.

Uma pesquisa recente mostrou que um modelo simples de *string art* pode ser usado como material manipulável para discutir conceitos de geometria plana (LEBOUTHILLIER; SAJNA, 2020). Inicialmente, pregos foram colocados igualmente espaçados sobre dois eixos perpendiculares, dispostos sobre uma placa de madeira. Um segmento de corda foi usado para unir o prego na primeira posição em um dos eixos ao prego na última posição no outro eixo; o segundo prego do eixo horizontal foi ligado ao penúltimo prego no eixo vertical; e assim por diante, seguindo essa sequência. O padrão formado é de uma figura com retas entrelaçadas, formando uma rede de quadriláteros e triângulos. Os autores usam o material para mostrar que existem subconjuntos de quadriláteros e de triângulos com áreas iguais em regiões específicas da rede; que essas propriedades são preservadas mesmo com variações no ângulo entre os eixos, mantendo-se a mesma distância entre os pinos; e que a borda superior dessa coleção de retas se aproxima de uma parábola.

Em outro estudo, a técnica de *string art* foi aplicada para determinar equações de famílias de retas e curvas parametrizadas que solucionam uma série de problemas matemáticos, tais como: determinar as retas no plano que interceptam o eixo x e y formando triângulos com esses eixos, com hipotenusas, perímetros ou áreas constantes; verificar que a hipoelipse é a curva cuja soma das cotas x e y de intersecções de suas retas tangentes com os eixos cartesianos é sempre constante; e em Teoria dos Jogos (quando um jogo é jogado um grande número de vezes por dois jogadores), determinar a probabilidade de uma dada estratégia ser usada pelos jogadores, para assim prever jogadas futuras (QUENELL, 2009).

Outra pesquisa utilizou a *string art* com alunos de um curso de Cálculo, no primeiro ano de graduação (LA HAYE, 2016). Ao invés de iniciar a disciplina com tópicos de Pré-Cálculo de forma tradicional (aula expositiva com auxílio do quadro), ele usou *string art* para significar equações e conceitos geométricos envolvidos no esboço de curvas planas e nas posições relativas entre reta e curva. O objetivo foi inspirar os alunos a aplicar os conhecimentos de Pré-Cálculo na discussão de aspectos fundamentais do Cálculo, como na definição de derivada.

Uma aplicação tecnológica da técnica envolveu o desenvolvimento de um algoritmo matemático para a proteção de direitos autorais e do uso ilegal de imagens produzidas com *string art* (YAN S., CAI; YAN B., 2020). O algoritmo é capaz de transformar a imagem real em sua forma de *string art* digital, mapeando os posicionamentos e a sequência das linhas utilizadas para confeccionar a figura, de pino a pino. Os dados são criptografados como uma marca única à figura e assim podem ser utilizados para detectar possíveis fraudes e plágios das obras artísticas. Outro trabalho também empregou algoritmos de *string art* em engenharia para projetar materiais compósitos com propriedades mecânicas melhoradas (OSTANIN, 2020). A ideia foi trabalhada no exemplo de um caso bastante usual de homogeneização de material compósito bifásico. Foi demonstrado que os padrões gerados por *string art* reproduzem a elasticidade ótima para essas estruturas.

Uma variação da técnica é a *string art* circular, a qual os pinos usados na confecção das figuras são dispostos de forma circular na base. Por exemplo, abordou-se o desenvolvimento de um *software* que origina padrões (ou réplicas) de imagens/ fotos reais em *string art* circular, com boa usabilidade e reprodutibilidade (SOUZA, 2021). Nessa perspectiva, *softwares* com algoritmos de tecelagem vêm sendo desenvolvidos para retornar a sequência de ligações a serem realizadas com as cordas, pino a pino, necessárias para a geração da imagem real na forma artística de *string art* circular (KREMER *et al*., 2014; BONE, 2022).

Essas abordagens abrem muitas oportunidades para artistas autônomos e grandes empresas/ indústrias do ramo de moda e decoração, além de estimular a curiosidade e o interesse das pessoas em criar telas de *string art* personalizadas. Essa diversidade de possibilidades faz da *string art* uma potencial ferramenta para a proposição de atividades de ensino interdisciplinar de Matemática através da Arte.

Produto educacional - proposta de sequência didática para o ensino de seções cônicas com *string art*

Informações iniciais

Este produto educacional inclui uma sequência didática para a introdução de conceitos e construção das seções cônicas, no 3.º ano do Ensino Médio, com o auxílio da técnica artística *string art*. Sugere-se que a proposta seja executada após a aula inicial de apresentação dos conceitos básicos das seções cônicas. As informações básicas do produto educacional estão disponíveis no Quadro 1.

Quadro 1 - Informações básicas sobre o produto educacional proposto.

Sequência didática para o ensino de cônicas com *string art*	
Temática	Cônicas: elipse, hipérbole e parábola.
Público-alvo	Alunos do 3º ano do Ensino Médio.
Duração	Cinco encontros (cada um deles com 100 minutos).

Objetivos de aprendizagem	- Conhecer as formas geométricas cônicas; - Identificar elementos geométricos das cônicas; - Relacionar elementos geométricos das cônicas com cada forma cônica específica; - Construir cônicas com o uso da técnica artística *string art*; - Reconhecer os elementos geométricos das cônicas que serão importantes para o desenvolvimento de suas equações.

Fonte: Arquivos dos autores (2023).

O cronograma de atividades foi projetado com cinco encontros de 100 minutos de duração, cada um. O Quadro 2 mostra a descrição das ações a serem executadas em cada encontro.

Quadro 2 - Síntese de aplicação da sequência de atividades a serem executadas.

Encontro	Descrição
1	Apresentação da técnica *string art*, revisão de conceitos aplicados as cônicas e escolha do material manipulável.
2	Construção da parábola.
3	Construção da elipse.
4	Construção da hipérbole.
5	Exposição para a socialização dos trabalhos desenvolvidos.

Fonte: Arquivos dos autores (2023).

Encontro 1 - Apresentação da proposta

As atividades elencadas para o Encontro 1 envolvem: abordagem geométrica das cônicas; apresentação da técnica *string art*; descrição dos materiais a serem utilizados na confecção das telas artísticas.

Inicialmente, o professor ministrará uma aula expositiva aos alunos revisando os conceitos iniciais sobre as cônicas (elipse, parábola e hipérbole) a partir da construção geométrica dessas formas com régua e compasso, conforme orientado em trabalhos da literatura (MOREIRA, 2017). Em um segundo momento, é proposta a apresentação da técnica artística *string art*, abordando um breve histórico da temática, mostrando exemplos de desenhos geométricos já construídos (Fig. 3), materiais usuais para a confecção das telas, relações com elementos geométricos e aplicações no ensino de Matemática.

Figura 3 - Exemplos de desenhos geométricos confeccionados com *string art*.

Fonte: Arquivos dos autores (2022).

Com o uso de linhas coloridas, pregos e uma base de madeira, o professor mostrará algumas ações básicas para a confecção de figuras com *string art*, como sequências de segmentos de retas formados a partir da ligação de pares de pregos (pontos) com as linhas (LEBOUTHILLIER; SAJNA, 2020). Os objetivos específicos envolvem conhecer a técnica artística e criar interesse pela temática interdisciplinar entre Matemática e Arte.

Na parte final do encontro será apresentada a proposta de construção geométrica das cônicas com *string art*, bem como os materiais necessários para a confecção das telas. A relação dos materiais inclui: tela de madeira (50 cm x 50 cm x 1,5 cm); régua de 60 cm; régua de 30 cm; transferidor; linha de bordado; linha encerada; tesoura sem ponta; martelo; pregos de 2 cm; canetas; compasso; pincéis coloridos; papel cartão; e papel milimetrado (470 mm x 320 mm).

Encontro 2 - Construção da parábola

No Encontro 2, será colocado em prática o processo de construção de uma parábola usando *string art*. Serão apresentados oito passos ilustrados de forma sequenciada nas Fig. 4 e Fig. 5.

Inicialmente, é proposto que o professor forme grupos de três estudantes para a construção da parábola. É importante que todos os estudantes do grupo participem do processo de construção e que possam se envolver em cada etapa do processo construtivo. Essas ações envolvem desde a colocação dos pregos na superfície de madeira até manipular as linhas para formar as imagens. Em seguida, o professor pode começar a orientação dos estudantes quanto ao passo a passo para a construção da cônica em destaque. Os passos dados a seguir podem ser editados pelo professor, para que se possa disponibilizá-los na forma de um roteiro aos alunos.

Passo 1: Colocar o papel milimetrado centralizado sobre a tela de madeira, fixando um prego em cada um dos quatro cantos do papel, como ilustrado na Fig. 4a.

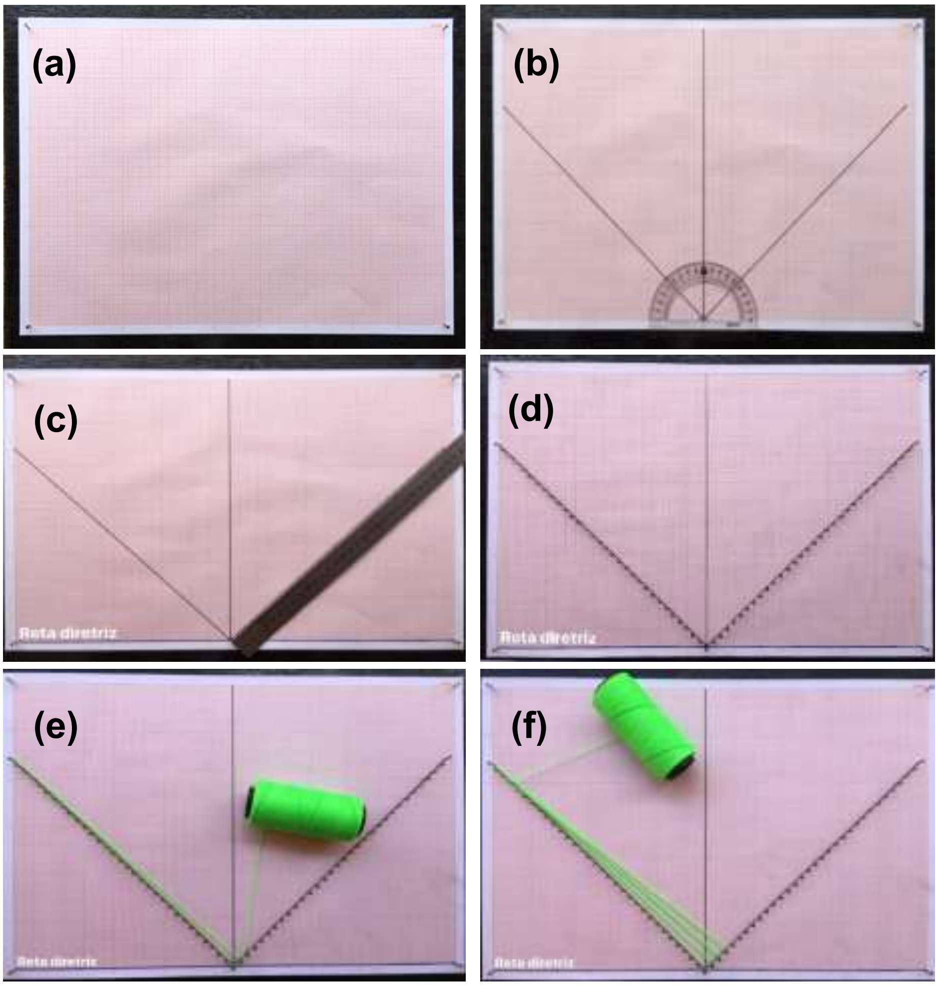
Passo 2: Esboçar uma reta auxiliar vertical (Fig. 4b), no centro do papel milimetrado, dividindo a superfície total do papel em duas regiões retangulares iguais (lados relativos e áreas congruentes). Esboçar a reta horizontal que delimita o extremo inferior do papel (Fig. 4c). Essas retas serão ortogonais entre sí e representarão o eixo de simetria (ou reta focal) e a reta diretriz da parábola, respectivamente. Em seguida, com a ajuda do transferidor, da interseção entre as retas ortogonais traçadas (origem), devem ser esboçados dois segmentos de retas formando ângulos de 45° com o eixo de simetria, como ilustrado na Fig. 4b. Nesse momento, o professor pode fazer os seguistes questionamentos aos estudantes: O que significa dizer que duas retas são ortogonais entre si? O que é um segmento de reta? O que são regiões planas com áreas congruentes? O professor também pode discutir o conceito de reta diretriz e reta focal da parábola.

Passo 3: Em seguida, deve-se marcar com uma caneta, desde a origem, todos os pontos que distam 1 cm sobre os dois segmentos de retas (Fig. 4c) e, em seguida, pregar um prego em cada ponto marcado sobre os dois segmentos de retas, como ilustrado na Fig. 4d.

Passo 4: Prender a linha (cor de preferência) ao prego situado na extremidade superior do segmento de reta à esquerda. Em seguida, deve-se fazer a ligação dessa linha ao primeiro prego da extremidade inferior do outro segmento com pregos, como ilustrado na Fig. 4e.

Passo 5: Repetir o processo anterior, trazendo a linha ao ponto inicial. Em seguida, continuar a sequência de ligações (Fig. 4f), com o penúltimo prego da primeira reta ligado ao segundo prego da outra reta, e assim por diante até que a linha percorra todos os pregos.

Figura 4 - (a) Papel milimetrado disposto sob a base de madeira; (b)-(f) sequência dos cinco passos iniciais para a proposta de construção da parábola com *string art*.

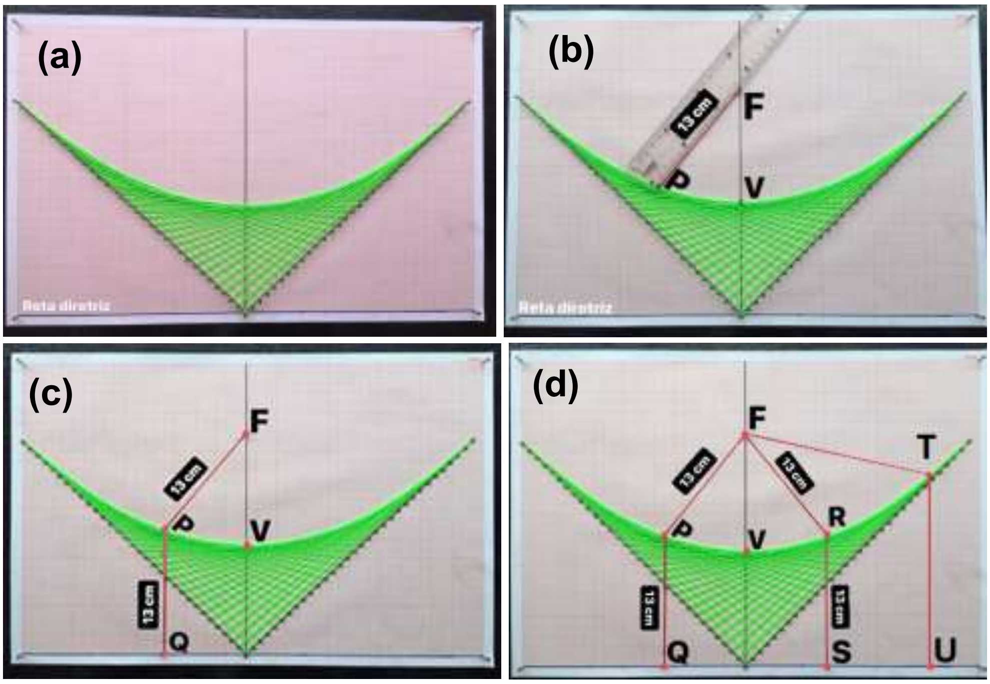


Fonte: Arquivos dos autores (2023).

Passo 6: Observar o esboço da parábola formada após a linha percorrer todos os pregos, como ilustrado na Fig. 5a. O professor deve situar e discutir com os alunos a região no plano que é representativa da parábola. Então, deve-se convidar cada grupo de alunos a marcar o ponto V na interseção entre a parábola e a reta focal. O ponto V representará o vértice da parábola. Em seguida, com a ajuda de uma régua, deve-se marcar a ponto F sobre a reta focal, que dista do ponto V a mesma distância de V até a reta diretriz. Nesse momento, o professor deve explanar para os grupos que a medida do segmento $\overline{FV}$ é igual à distância do segmento de reta definido do ponto V à reta diretriz. O ponto F representará o foco da parábola.

Passo 7: Na sequência, pede-se que seja marcado um ponto P qualquer pertencente a parábola (Fig. 5b). Com a régua, cada grupo de alunos deve ser convidado a medir o segmento de reta $\overline{PF}$ (no exemplo dado, $\overline{PF}$ mede 13 cm). De forma análoga, os estudantes também devem ser convidados a medir a distância do ponto P à reta diretriz (segmento $\overline{PQ}$, Fig. 5c) e confirmarem que essa distância é igual ao tamanho do segmento do $\overline{PF}$ (distâncias iguais). Os pontos V, F e P também podem ser marcados com pregos. Assim, os alunos podem passar uma linha (de cor diferente da usada para esboçar a parábola) entre os pinos para que essas distâncias também fiquem representadas na tela artística.

Figura 5 - (a) Parábola construída com os passos de 1 a 5. (b) Ilustração da marcação do ponto P na parábola e medição do tamanho do segmento $\overline{PF}$. (c) Medição da distância de P à reta diretriz (segmento $\overline{PQ}$) da parábola. (d) Ilustração de execução do Passo 8.



Fonte: Arquivos dos autores (2023).

Passo 8: Na continuação, o mediador pode pedir para os estudantes repetirem os procedimentos destacados nos Passos 6 e 7, substituindo P por outros pontos diferentes (por exemplo, R e T na Fig. 5d), também pertencentes à parábola. Analogamente, os alunos devem verificar que as distâncias do foco (F) a esses pontos são iguais às distâncias desses pontos à reta diretriz.

O mediador deve informar aos alunos que os pares de medições realizadas por eles podem retornar valores não exatamente iguais (mas bem próximos). Isso pode ocorrer devido a erros experimentais relativos às ferramentas de medição e às ações anteriores dos próprios alunos na preparação para a execução da tela artística. Também é preferível que o professor indique que cada aluno do grupo realize medições das distâncias para cada par de segmentos. Nesse caso, para fins de comparação, as distâncias seriam dadas como a média das três medições. Essa proposta pode ser utilizada nas relações matemáticas estudadas nas telas das demais cônicas.

Ao final do encontro, é sugerido que o professor faça os seguintes questionamentos aos alunos: Qual curva vocês acabaram de esboçar? Qual a principal característica/propriedade matemática que todos os pontos que pertencem a essa curva devem obedecer? Em suma, o objetivo do Encontro 2 é fazer com que os estudantes construam uma parábola e cheguem à conclusão que essa curva é o lugar geométrico no plano onde todos os seus pontos distam a mesma distância relativa ao foco e à sua reta diretriz.

Encontro 3 - Construção da elipse

No Encontro 3, os esforços são concentrados ao processo de construção da elipse. Serão dados oito passos sequenciados (ilustrados nas Fig. 6 e Fig. 7) para o desenvolvimento de uma tela artística com aspecto visual de profundidade.

Orienta-se que o encontro seja iniciado com uma revisão das ações básicas (colocação de pinos, disposição de linhas pino a pino, etc.) que foram usadas no Encontro 2 para a construção da parábola, as quais serão importantes para a confecção de outras figuras geométricas com *string art*. Em seguida, os grupos de estudantes devem ser orientados para esboçarem uma elipse, com o uso de pregos, barbante e caneta, conforme descrito no trabalho de Moreira (2017, p. 37).

Após essa primeira etapa do encontro, os materiais necessários à confecção da elipse podem ser entregues aos alunos que, por sua vez, seguirão os passos orientados a seguir.

Passo 1: Esboçar um quadrado de 44 cm de lado, diretamente sobre a superfície de madeira, deixando 3 cm de margem em cada lado da tela, como ilustrado na Fig. 6a.

Passo 2: Os estudantes serão orientados pelo professor a fazer marcações de 1cm em 1 cm, até preencher os quatro lados do quadrado. Em seguida, deve-se pregar um prego em cada marcação efetuada, como ilustrado na Fig. 6b.

Passo 3: Após pregar os pinos nos pontos demarcados no quadrado, deve-se pregar um prego no ponto determinado pela interseção das duas diagonais do quadrado. O ponto de interseção das diagonais do quadrado será o centro da elipse, como ilustrado na Fig. 6c. Nesse momento, o professor pode relembrar o conceito de diagonal do quadrado e de interseção entre retas no plano.

Passo 4: Aqui os estudantes serão orientados a determinar elementos básicos da elipse, a partir das marcações dadas na Fig. 6d, a saber:

i) a distância focal, $d(\overline{F_1F_2})$=2c, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse e c é a distância do centro da elipse a cada um dos focos;

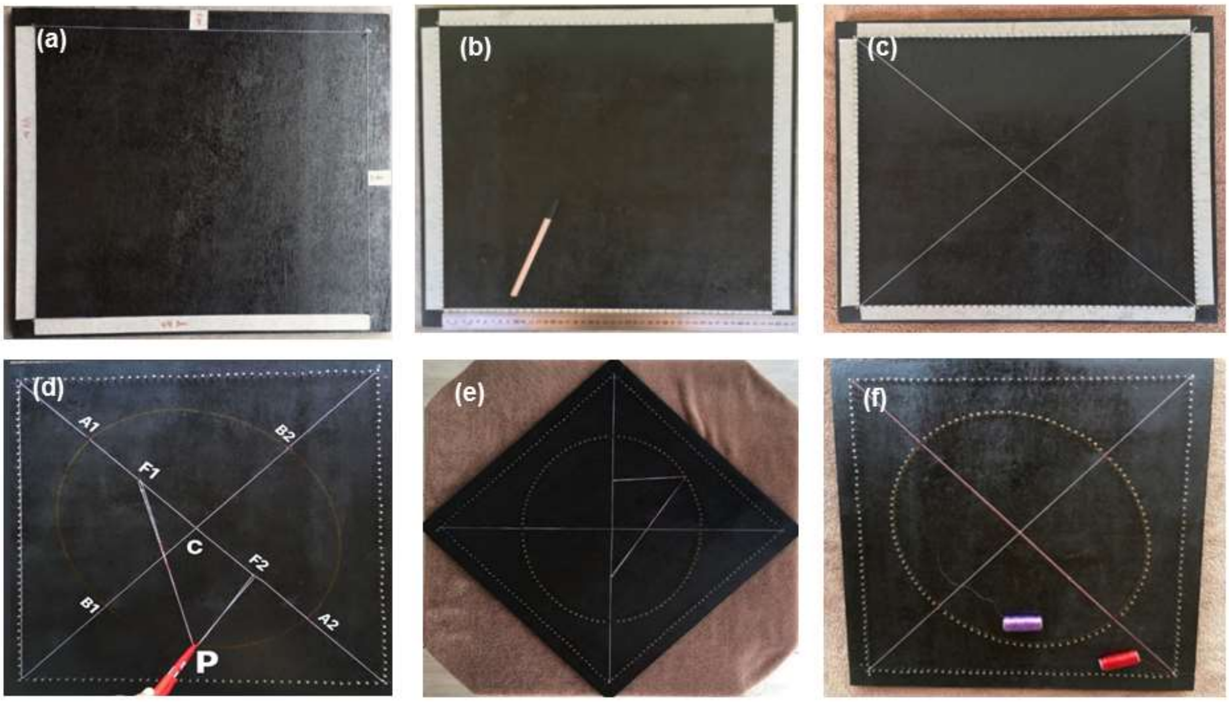
ii) a medida do eixo maior ($d(\overline{A_1A_2})$=$2a$), onde A_1 e A_2 são os pontos extremos do eixo maior da elipse e a é o tamanho do semieixo maior.

iii) a medida do eixo menor ($d(\overline{B_1B_2})$=$2b$), onde B_1 e B_2 são os pontos extremos do eixo menor da elipse e b é o tamanho do semieixo menor.

Pode-se chamar a atenção de que as distâncias requeridas dependerão da dimensão da elipse que se queira esboçar (quanto maiores forem os eixos, maior será a elipse formada). Para fins de exemplo, foram usadas as seguintes medidas: $d(\overline{F_1F_2})$ = 20 cm e $c = 10$ cm; $d(\overline{A_1A_2})$ = 38 cm e $a = 19$ cm; e $d(\overline{B_1B_2})$= 32 cm e b = 16 cm.

Com uma linha de tamanho $d(\overline{A_1A_2})$ = 38 cm, com extremidades fixadas em pregos dispostos nos pontos F_1 e F_2, deve-se esticá-la com auxílio de uma caneta para fazer a marcação do ponto P na superfície da tela (Fig. 6d).

Figura 6 - (a) a (f) Ilustração das execuções dos Passos de 1 a 6 para a construção de uma elipse com *string art*.

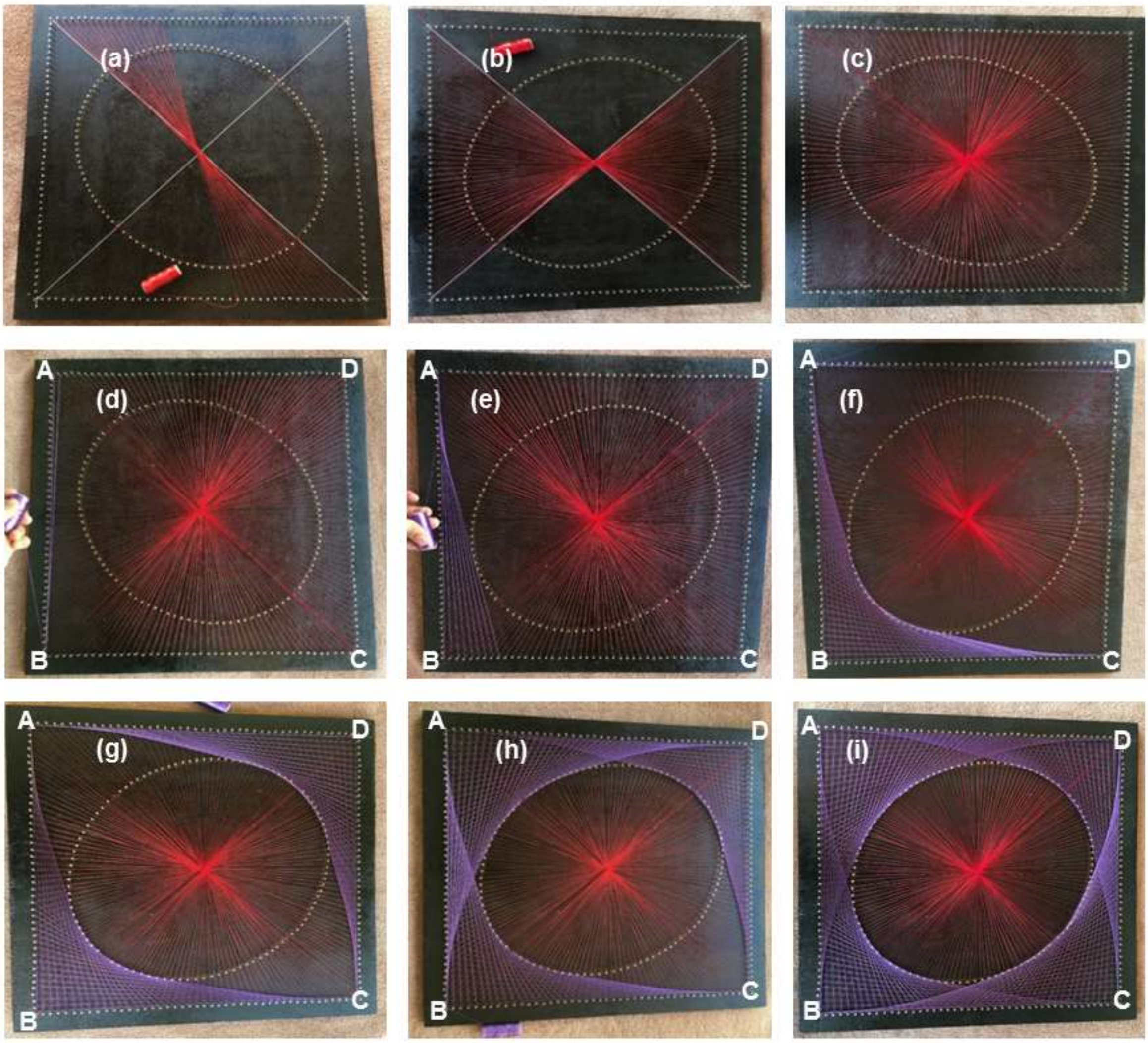


Fonte: Arquivos dos autores (2023).

Mantendo-se a linha esticada e realizando o mesmo procedimento, girando a caneta 360° a partir de P, se formará o lugar geométrico da elipse no plano, com os parâmetros dados anteriormente (MOREIRA, 2017, p. 37). Nessa etapa, o professor deve relembrar aos alunos que a medida do eixo maior $(2a)$, previamente projetada, também foi usada como tamanho da linha que ligou os focos F_1 e F_2 para gerar o ponto P pertencente à elipse. Assim, os discentes devem ser levados a notar que para todo P pertencente à elipse, a soma dos tamanhos dos segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ será sempre igual ao tamanho do segmento $\overline{A_1A_2}$ $(d(\overline{A_1A_2}) = 2a)$, a partir do fato de que o tamanho da linha é invariante. Dessa forma, os alunos podem experimentar a propriedade que define a elipse, a saber, $d(\overline{PF_1}) + d(\overline{PF_2}) = d(\overline{A_1A_2}) = 2a$, onde d é a distância entre os pontos que definem cada segmento de reta dado. Ao esboçar a elipse, com a ajuda do mediador, os alunos devem ser capazes de descrever a relação que existe entre esses segmentos de reta e de chegar à conclusão de que a elipse é o lugar geométrico no plano que obedece a essa igualdade.

Passo 5: Dando sequência à confecção da tela, marcam-se pontos sobre a elipse (utilizando um compasso) que ficaram dispostos 1 cm um do outro em toda a curva. Em seguida, deve-se fixar um prego em cada marcação realizada, como ilustrado na Fig. 6e.

Figura 7 - (a) a (i) Ilustração dos Passos 7 e 8 para a confecção de tela artística com *string art*, representativa de uma elipse.



Fonte: Arquivos dos autores (2023).

Passo 6: Devem-se escolher linhas de duas cores diferentes (para a exemplificação, foram usadas linhas nas cores vermelho e roxo) para o esboço da elipse proposto com *string art*. Deve-se usar uma das linhas (cor vermelha) para dar um nó em um dos vértices do quadrado e em seguida puxá-la até o vértice oposto, amarrando-a para formar a representação da diagonal do quadrado (Fig. 6f). Orientar aos alunos a execução do mesmo procedimento para formar a outra diagonal do quadrado.

Passo 7: A partir de dois lados paralelos do quadrado, deve-se ligar a linha que está em um dos vértices ao vértice oposto. Na sequência, o segundo prego do primeiro lado deve ser ligado ao penúltimo prego do lado oposto, e assim sucessivamente, como ilustrado na Fig. 7a. Repetir o procedimento para os outros dois lados opostos (Fig. 7b), até que todos os pontos do quadrado sejam ligados dois a dois (Fig. 7c). Antes de apresentar esse passo, o professor pode relembrar e discutir os conceitos de lados opostos, paralelos e adjacentes, em especial no quadrado.

Passo 8: Dando início a essa etapa, deve-se amarrar a linha da outra cor escolhida (roxa) no prego situado no vértice superior esquerdo (ponto A, Fig. 7d). A próxima ação é executar os Passos

4 e 5 da construção da parábola (Encontro 2) para ligar os pontos do lado AB e do lado BC. Todos os pontos disponíveis nesses dois lados devem ser ligados dois a dois, conforme orientado (Fig. 7 e-f). Esse procedimento é similar ao utilizado para construir a parábola. A diferença é que os pregos que marcaram o lugar geométrico da elipse irão modificar a curvatura resultante da ligação entre os pontos dos lados adjacentes, uma vez que as linhas tocarão a cônica. O Passo 8 deve ser repetido para os lados AD e CD (Fig. 7g), AB e AD (Fig. 7h) e BC e CD (Fig. 7i), nessa ordem. A tela artística resultante da execução desses passos mostrará um efeito visual tridimensional, comum em telas produzidas com *string art*.

Encontro 4 - Construção da hipérbole

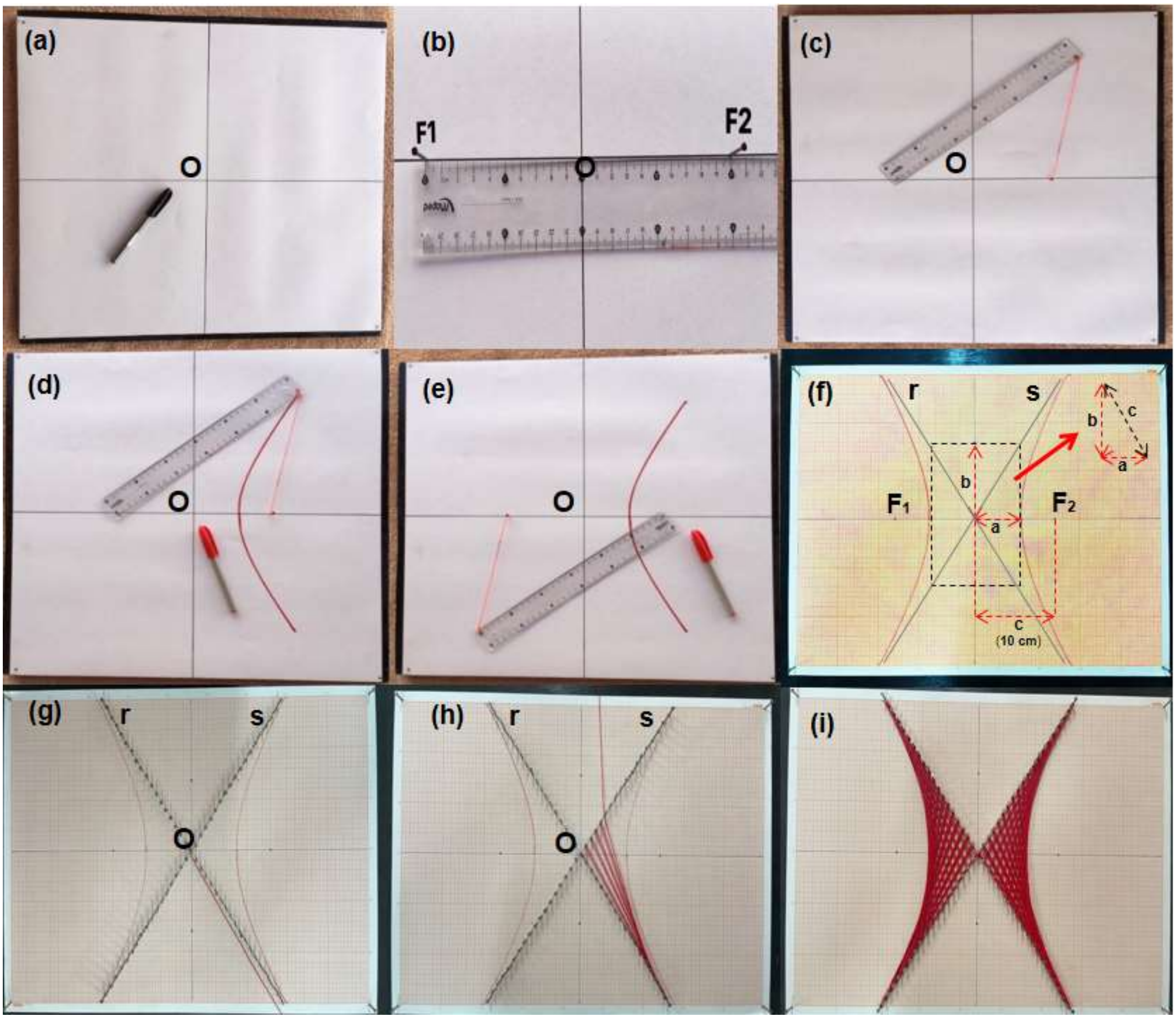
O Encontro 4 é programado para a construção da hipérbole. São dados oito passos, ilustrados sequencialmente nas Fig. 8 e Fig. 9, para que o professor possa preparar o seu roteiro para mediar as ações dos alunos na construção de uma tela artística representativa da hipérbole, com o uso da *string art*. Previamente ao encontro, deve-se fazer dois furos em uma régua de 30 cm (diâmetro maior que o da cabeça do prego utilizado), nas cotas 0 e 30 cm. Os furos podem ser realizados facilmente com algum material metálico perfuro cortante aquecido.

Inicialmente, os estudantes podem ser orientados para construção da hipérbole utilizando régua, barbante e caneta, conforme técnica de construção disponível no trabalho de Moreira (2017, p. 66). Esse conhecimento é importante ser obtido pelos alunos, visto que eles deverão utilizar essa técnica de construção para marcar o lugar geométrico da hipérbole com os pregos.

Passo 1: Inicialmente, deve-se cobrir a superfície de madeira (formato quadrado) com papel milimetrado. Então, coloca-se um prego em cada canto do plano para fixar o papel na madeira, como ilustrado na Fig. 8a. Em seguida, com o auxílio de uma régua e um pincel/caneta, devem ser marcados dois segmentos de retas perpendiculares, com extremidades nos pontos médios dos lados paralelos da base de madeira/papel (Fig. 8a). A hipérbole será alocada no plano, com relação a esses eixos perpendiculares entre si. O ponto de intersecção entre esses eixos será chamado de centro (O) da hipérbole. Para a execução desse passo, o professor pode discutir e relembrar com os alunos os conceitos de ponto médio de um segmento de reta e de retas perpendiculares entre si.

Passo 2: Dois pontos (F_1 e F_2) devem ser marcados com pregos sobre o eixo horizontal, distando 20 cm entre si ($d(\overline{F_1F_2}) = 20\ cm$). O ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ deve ser o centro da hipérbole (ponto O, de interseção entre os eixos, Fig. 8b). Deve ser explanado que os pontos F_1 e F_2 representarão os focos da hipérbole e que $d(\overline{F_1F_2})$= 20 cm = 2c, onde c é uma constante positiva (c=10 cm, Fig. 8f), é chamada de distância focal da hipérbole.

Figura 8 - (a) a (i) Ilustração da sequência de passos para a construção da hipérbole.



Fonte: Arquivos dos autores (2023).

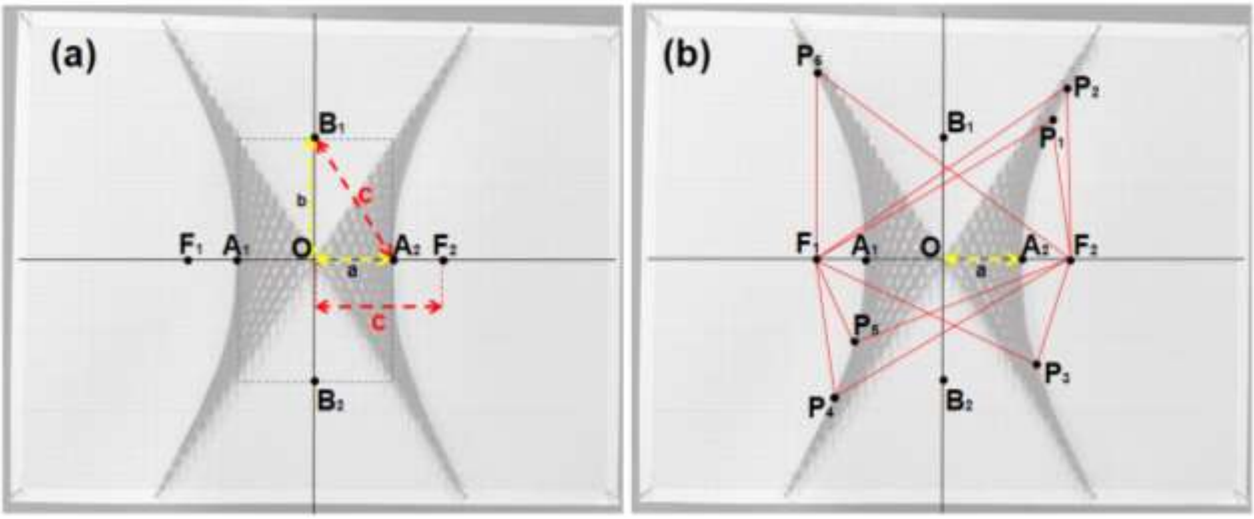
Passo 3: Prender a extremidade da régua de 30 cm ao prego em F_1 (encaixar o prego em um dos furos efetuados na régua), deixando-a presa a esse ponto. Em seguida, deve-se ligar a outra extremidade da régua ao prego em F_2, utilizando uma linha com 18 cm de comprimento (o comprimento da linha deve ser maior que a diferença entre o tamanho da régua e a distância entre os pregos), como ilustrado na Fig. 8c.

Passo 4: Para a marcação da curva no papel, deve-se colocar a ponta do pincel na junção da régua com a linha. Em seguida, mantendo-se a linha esticada, fazer o pincel percorrer na direção da régua, sempre a margeando com o pincel. A marcação sobre o papel (representada em vermelho, na Fig. 8d), resultante do movimento ordenado do pincel, representará um dos ramos da hipérbole. Para representar o outro ramo da hipérbole no papel, executa-se o mesmo procedimento realizado no passo anterior, mas agora com uma das extremidades da régua presa a F_2 (Fig. 8e). Ao fim desse procedimento, os dois ramos de uma hipérbole estarão marcados no papel (Fig. 8f).

Nesse momento, o mediador pode pedir que os alunos determinem os valores das distâncias do centro da hipérbole (ponto O) aos vértices (pontos A_1 e A_2, Fig. 9) de cada um dos seus ramos e cheguem à conclusão que esses valores são iguais a a=6cm. Em seguida, deve-se informar que o segmento $\overline{A_1A_2}$ (Fig. 9a) que representa a distância entre os vértices ($2a$=12 cm) é chamado de eixo real da hipérbole.

Passo 5: Fazendo c=10 cm como o tamanho da hipotenusa do triângulo retângulo com catetos medindo a=6cm e b (detalhe na Fig. 8f), pelo Teorema de Pitágoras, calcula-se o tamanho b=8cm. Deve-se explanar que o tamanho 2b=16 cm é a medida do chamado eixo imaginário (segmento $\overline{B_1B_2}$, Fig. 9a) da hipérbole.

Figura 9 – Construção da hipérbole com *string art*. Em destaque, a ilustração de elementos da hipérbole e marcações de pontos pertencentes à curva.



Fonte: Arquivos dos autores (2023).

Passo 6: Nessa etapa, o professor deve pedir aos alunos que, com o auxílio de uma régua de 60 cm, esbocem duas retas auxiliares, r e s, tais que contenham cada uma das duas diagonais do retângulo de lados 2a e 2b, com a= 6 cm e b= 8 cm e centro no ponto O, conforme ilustrado na Fig. 8f. Verifica-se que r e s são concorrentes no centro da hipérbole. Logo após, chamar a atenção dos alunos de que essas retas irão se aproximar, simultaneamente, dos dois ramos da hipérbole, na eminência de tocarem os ramos, à medida que seus pontos se afastam do ponto O. Os alunos devem ser orientados de que se os passos anteriores tiverem sido executados sem acúmulos significativos de erros de medição, as retas poderão se aproximar dos ramos da hipérbole, mas não os tocarão (Fig. 8f). O professor pode então introduzir a descrição das retas r e s como assíntotas da hipérbole e explanar sobre o conceito geral desse ente geométrico.

Passo 7: Com uma régua, marcam-se pontos de 1 em 1 cm sobre as duas assíntotas (retas r e s) e colocam-se os pregos nessas marcações (Fig. 8g). Em seguida, deve-se conectar uma linha a cada par de pregos disponíveis nas partes das assíntotas que estão à direita do centro da hipérbole (Fig. 8h), até que a linha tenha percorrido todos os pregos. Esse passo é similar aos Passos 4 e 5 para a construção da parábola. À medida que os alunos forem desenvolvendo as conexões entre os pregos, o professor deve fazer com que percebam a formação progressiva do ramo da hipérbole sobre a marcação realizada anteriormente em vermelho (Fig. 8c-d). Deve-se repetir o processo para as partes das assíntotas à esquerda do centro da hipérbole, até que se tenham os dois ramos completados (Fig. 8i).

Passo 8: Com a hipérbole disposta na tela, os alunos podem ser convidados a testarem a propriedade que define o lugar geométrico dessa cônica no plano. Inicialmente, os grupos devem ser orientados a marcarem no mínimo cinco pontos (P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5) em quaisquer dos dois ramos da hipérbole (Fig. 9b). Em seguida, com auxílio de uma régua, eles devem medir $d(\overline{F_1P})$ e $d(\overline{F_2P})$ para cada ponto P marcado. Ao anotarem os valores dessas distâncias de forma organizada (em uma tabela, por exemplo), os alunos devem realizar as operações $|d(\overline{F_1P}) - d(\overline{F_2P})|$ (módulo da diferença entre as distâncias dadas). O objetivo é fazer com que eles assimilem que o valor dessa expressão é invariante (e igual a $2a$) para todo P pertencente a hipérbole. Dessa forma, os alunos devem chegar à conclusão de que a hipérbole é o lugar geométrico no plano cujo módulo da diferença entre as distâncias do foco F_1 a um ponto P e do foco F_2 a P (P pertence à curva) é sempre constante e igual ao tamanho do seu eixo real ($2a$).

Acabadas as abordagens sugeridas, o professor deve deixar a finalização das telas artísticas (inclusão de novos elementos artísticos, inclusão de molduras, etc.) a cargo de cada grupo de alunos, antes de serem apresentadas ao público em uma exposição na escola. Por exemplo, eles também podem usar linhas de diferentes cores para marcar os elementos dessas cônicas na própria tela ou até mesmo para representar as propriedades que as definem no plano.

Encontro 5 – Exposição das telas artísticas produzidas

O último encontro é programado para a socialização das telas que foram produzidas por cada grupo de alunos. Essa sequência didática propõe que cada um dos grupos de estudantes apresente as telas artísticas em uma exposição às outras turmas do Ensino Médio, no próprio ambiente escolar. É sugerido que os alunos produzam e disponibilizem ao lado de cada tela exposta, um cartão/banner contendo as principais informações relativas à tela, tais como: uma breve apresentação da técnica *string art* e dos materiais básicos necessários à sua confecção; a descrição da curva cônica representada na tela e seus principais elementos geométricos. Cada grupo deve apresentar essas informações oralmente aos colegas durante a exposição.

As telas podem permanecer expostas em local de preferência na escola. Em adição, os alunos podem ser encorajados à produção de novas telas artísticas usando *string art* que envolvam padrões matemáticos e outras formas geométricas de interesse.

Considerações finais

Os elementos e propriedades das cônicas que serão experimentadas pelos alunos com a execução da proposta estão diretamente relacionados aos procedimentos algébricos necessários à determinação/demonstração das equações dessas curvas.

A técnica artística *string art* foi apresentada com conceitos, relações históricas, tipos de expressões artísticas e práticas vigentes que vêm sendo utilizadas para o ensino de Matemática com Artes. Em adição, mostrou-se que a *string art* pode ser utilizada como uma potencial ferramenta para o ensino de geometria plana, em especial de seções cônicas, a partir do uso de materiais concretos manipuláveis de baixo custo.

A proposta de sequência didática para o ensino de seções cônicas com *string art* no 3.° Ano do Ensino Médio foi desenvolvida, detalhando procedimentos para a reprodução das curvas como telas artísticas.

Em suma, as construções artísticas realizadas pelos alunos, de forma ativa e lúdica, podem auxiliar significativamente no reconhecimento das formas cônicas, de seus elementos e suas propriedades, as quais são importantes para a identificação e interpretação dos parâmetros das equações que as representam e para as aplicações em Ciência e Tecnologia.

Recebido em: 19/09/2022
Aprovado em: 17/09/2023

Referências

AMARAL, L. **Práticas inovadoras de ensino e sua associação com a aprendizagem empreendedora, em escolas do ensino fundamental em situação de vulnerabilidade social**. 157 f. Dissertação (Mestrado em Administração) – Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2020.

BARROS, P. B. Z. A **Arte na Matemática: contribuições para o ensino de geometria**. 2017. 206 f. Dissertação (Mestrado em Docência para Educação Básica) – Universidade Estadual Paulista. Bauru, 2017.

BEZERRA, L. S.; LOPES, J. P. **O tangram e suas contribuições para o processo de abstração e Compreensão dos conceitos geométricos de área e perímetro**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo: Anais [...]., p. 1-13, 2016.

BIRSAK, M.; *et al*. String Art: towards computational fabrication of string images. **Computer Graphics Forum**, v. 37, n. 2, 2018.

BONE, P. **Weave algorithm to approximate an image. MATLAB Central File Exchange**. Disponível em: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/59831-weave-algorithm-to-approximate-an-image. Acesso em: 15 ago. 2022.

BOUGHANMI, H.; LAZAAR, M.; FARHAT, A.; GUIZANI, A. Evaluation of soil thermal potential under Tunisian climate using a new conic basket geothermal heat exchanger: Energy and exergy analysis. **Applied Thermal Engineering**, v. 113, n. 25, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 01 set. 2022.

CHEN, W. H. Applying problem-based learning model and creative design to conic-sections teaching. **International Journal of Education and Information Technologies**, v. 7, n. 3, 2013.

CHERNOV, N.; WIJEWICKREMA, S. Algorithms for projecting points onto conics. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 251, n. 15, 2013.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I)**. Tradução: LEVY, L. F.; SILVEIRA, M. R. A. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FLUGSEDER, R. L.; VARGAS, N. P. Matemática e Artes Visuais: uma escala possível. **Revista Insignare Scientia**, v. 4, n. 2, 2021.

INNES, S. Mary Boole and curve stitching: A look into Heaven. **Endeavor**, v. 28, n. 1, 2004.

KREMER, M.; BOMMES, D.; LIM, I.; KOBBELT, L. **Advanced Automatic Hexahedral Mesh Generation from Surface Quad Meshes**. In: Sarrate, J., Staten, M. (eds) Proceedings of the 22nd International Meshing Roundtable. Springer, Cham. 2014.

LA HAYE, R. String Art in a First Calculus Course. **Primus**, v. 26, n. 4, 2016.

LEBOUTHILLIER, C.; SAJNA, M. The Mathematics of String Art Nets. **arXiv preprint arXiv**, 2008.10693, 2020.

LEIVAS, J. C. P.; FOGAÇA, L. S. Registros de representação semiótica e geometria dinâmica para o ensino de congruência de figuras geométricas planas. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia**, v. 10, n. 3, 2017.

LEPAGE, D.; JIMÉNEZ, A.; BEAUVAIS, J.; DUBOWSKI, J. Conic hyperspectral dispersion mapping applied to semiconductor plasmonics. **Light: Science & Applications**, v. 1, 2012.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista katálysis**, v. 10, 2007.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5 ed. São Paulo, Atlas, 2003.

MOREIRA, J. S. **Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e os instrumentos concretos**. 2017. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2017.

NOVAIS, A. **A identificação de cônicas e das quádricas com o uso do software GeoGebra**. 2019. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Triângulo Mineiro. Uberaba, 2019.

OLIVEIRA, F.; BIANCHINI, L.; REIS, L. Significações do professor e indicadores de resiliência em estudantes com dificuldades de aprendizagem em matemática. **Educação Temática Digital**, v. 21, n. 2, 2019.

OSTANIN, I. “String art” approach to the design and manufacturing of optimal composite materials and structures. **Composite Structures**, v. 246, 2020.

PINTO, A. N. **Matemática e música: uma reflexão à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de

Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2019.

QUENELL, G. Envelopes and string art. **Mathematics Magazine**, v. 82, n.3, 2019.

SAMPER, A.; GONZÁLEZ, G.; HERRERA, B. Determination of the geometric shape which best fits an architectural arch within each of the conical curve types and hyperbolic-cosine curve types: The case of Palau Güell by Antoni Gaudí. **Journal of Cultural Heritage**, v. 25, 2017.

SANTOS, M.; BICUDO, M. Experiência de Formação Continuada com Professores de Arte e Matemática no Ensino de Geometria. **Bolema**, v. 29, n. 53, 2015.

SILVA, C. **Ciência e Arte: o origami no ensino da geometria: uma experiência interdisciplinar com alunos brasileiros no Japão**. Anais do II Encontro Internacional, Estética e Arte em Educação, Instituto Politécnico de Lisboa. Lisboa-PT, 2016.

SOUSA, J. D. N. **Desenvolvimento de um software para auxiliar na confecção de Circle string art**. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Software) - Universidade Federal do Ceará, Campus de Russas. Russas, 2021.

YAN, Y.-S.; CAI, H.-L.; YAN, B. Data Hiding in Symmetric Circular String Art. **Symmetry**, v. 12, 2020.

ZRINSCAK, L. **Prostorna instalacija, String Art**. 58 f. Tese (Doutorado em Artes) - University North (University centre Koprivnica). Koprivnica, Croácia, 2019.